INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

Exercícios

Cap. IX – Programação Linear Paramétrica

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O.

IX. Programação Linear Paramétrica

1. Admita que pretende parametrizar simultaneamente dois coeficientes da função objectivo nas seguintes condições:

   - c_1: variar no intervalo [3 , 11]
   - c_2: variar no intervalo [2 , 6]
   - relação linear entre os dois coeficientes

   Apresente os coeficientes parametrizados.

2. Considere o modelo de PL:

   Max $f(X) = (4 - 10t)x_1 + (8 - 4t)x_2$

   s.a.

   $$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 3 - t \\ & & x_1 , x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

   Recorra à PL Paramétrica para caracterizar as soluções óptimas no intervalo de $t \in [\, 0 , +\infty \,[$.

3. Considere o modelo de PL para optimizar a produção de dois bens (A e B) em quantidades x_1 e x_2:

   Max $f(X) = 6x_1 + 3x_2$

   s.a.

   $$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 720 \text{ horas de trabalho} \\ 4x_1 & + & 4x_2 & \leq & 880 \text{ kg de matéria-prima} \\ x_1 & & & \leq & 160 \text{ (produção máxima do bem “A”)} \\ & & x_1 , x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

   Calcular e apresentar os cenários de optimalidade variando as horas de trabalho de 240 a 1000.

4. Considere um problema de produção de que se apresenta o quadro inicial do Simplex.

   A avaliação dos níveis de produção x_1, x_2 , x_3 associados respectivamente aos produtos A, B e C, é feita à luz do lucro da venda. As variáveis F_1 , F_2 , F_3 estão associadas às 1ª, 2ª e 3ª restrições técnicas, respectivamente.

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
F_1	2	3	4	1	0	0	60
F_2	1	1	1	0	1	0	40
F_3	2	3	0	0	0	1	50
f(X)	-4	-5	-6	0	0	0	0

   Estudar a optimalidade da produção considerando a variação do recurso R_1(matéria prima) de 40 a 120 quilogramas.

5. Uma empresa tem vindo a optimizar a produção de dois bens (A e B), em quantidades x_1 e x_2, usando o modelo de PL:

Max $f(X) = 8x_1 + 24x_2$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \text{ horas de trabalho} \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \text{ relação entre produções} \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

É possível modificar as margens de lucro por troca de pessoal entre actividades associadas às produções de "A" e "B". Assim, no bem "A" a margem de lucro pode ser aumentada de 8 até 18 u.m. reduzindo a margem de lucro do produto "B" de valor igual ao dobro do aumento efectuado em "A".

Apresentar os cenários de optimalidade para a variação das margens de lucro indicadas.

6. Considere um problema de produção de que se apresenta o quadro inicial do Simplex.

A avaliação dos níveis de produção x_1, x_2, x_3 associados respectivamente aos produtos A, B e C, é feita à luz do lucro da venda. As variáveis F_1, F_2, F_3 estão associadas às 1ª, 2ª e 3ª restrições técnicas, respectivamente.

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
F_1	1	2	1	1	0	0	$40 - \lambda$
F_2	3	0	2	0	1	0	$60 + 2\lambda$
F_3	1	4	0	0	0	1	$30 - 7\lambda$
f(X)	$-3 + 6\lambda$	$-2 + 2\lambda$	$-5 - 5\lambda$	0	0	0	0

Recorra à PL Paramétrica para caracterizar as soluções óptimas no intervalo de $\lambda \in [\, 0 , +\infty [$.

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

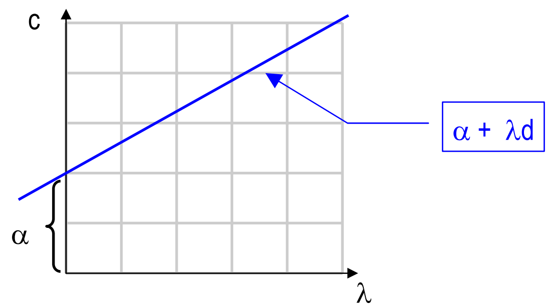
Programação Linear

Soluções dos Exercícios

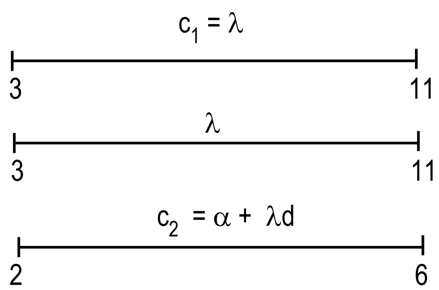
Cap. IX – Programação Linear Paramétrica

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O.

1. Genericamente um coeficiente "c" parametrizado é da forma geral " $c = \alpha + \lambda d$ " que mais não é do que a expressão geral da recta definida por pontos (λ , c), com declive "d" e ordenada na origem igual a "α":



Considerando $c_1 = \lambda$ (considerados $\alpha = 0$ e d=1) é necessário definir a expressão de c_2 em ordem a "λ":

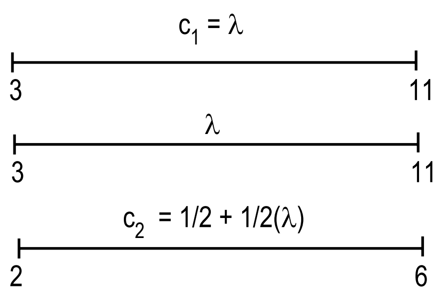


Da figura conclui-se que:

$$c_2 = \alpha + \lambda d \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = 2 \ para \ \lambda = 3 \\ c_2 = 6 \ para \ \lambda = 11 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2 = \alpha + 3d \\ 6 = \alpha + 11d \end{cases} \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\lambda$$

Os coeficientes parametrizados são pois:

$$\begin{aligned} & c_1 = \lambda \\ & c_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\lambda \\ & \lambda \in [3,11] \end{aligned}$$



2. Inicia-se o cálculo considerando t = 0 (extremo inferior do intervalo para estudo).

Vamos exemplificar em detalhe a análise do quadro Simplex Inicial:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	1	1	1	0	4
F_2	2	1	0	1	3 - t
f(X,t)	-4 + 10t	-8+ 4t	0	0	0

Considerando t = 0 o quadro inicial é:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	1	1	1	0	4
F_2	2	1	0	1	3
f(X,t)	- 4	- 8	0	0	0

A decisão será a mudança de base (entra x_2 por troca com F_2).

A informação necessária vai ser registada numa coluna de Observações por forma a que os termos em ordem a "t" sejam calculados para cada uma das bases.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_1	1	1	1	0	4	t = 0
F_2	2	1	0	1	3 - t	3 - t = 3 ; -4 + 10t = -4 ; -8+ 4t= -8
f(X,t)	-4+ 10t	-8+ 4t	0	0	0	Entra x_2 . Sai F_2
x_2	2	1	0	1	3 - t	3 – t = 3 ; 1+ t = 1 ; 12 +2t = 12;
F_1	-1	0	1	-1	1 + t	8 – 4t = 8
f(X,t)	12+ 2t	0	0	8 - 4t	$4t^2$ - 20t + 24	1ª Solução óptima

$$X_1^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3-t \\ 1+t \\ 0 \end{bmatrix};\ f(X_1^*) = 4t^2 - 20t + 24$$

Qual o limite superior de "t" que mantém a optimalidade desta base ?

As condições a observar para que a base mantenha a optimalidade permitem calcular aquele limite superior:

$$\begin{cases} 3-t \ge 0 \\ 1+t \ge 0 \\ 12+2t \ge 0 \\ 8-4t \ge 0 \end{cases} \begin{cases} t \le 3 \\ t \ge -1 \\ t \ge -6 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow t \le 2$$

Conclusão: Para valores até "t = 2" esta base mantém-se óptima.

Analisando as condições impostas, verifica-se que só os termos em que "t" tem coeficiente negativo é que estabelecem limite superior para "t" pelo que bastaria ter feito:

$$\begin{cases} 3-t \geq 0 \\ 8-4t \geq 0 \end{cases} \begin{cases} t \leq 3 \\ t \leq 2 \end{cases} \Rightarrow t \leq 2$$

para concluir que a base corrente permanece óptima até t = 2, ou seja:

$$X_1^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3-t \\ 1+t \\ 0 \end{bmatrix} ; \ f(X_1^*) = 4t^2 - 20t + 24 \ ; t \in [0,2]$$

Qual é a utilidade desta conclusão?

Conhecendo o sub intervalo de "t" onde a base corrente é óptima se necessitar saber qual é a solução óptima para qualquer valor de "t" no sub intervalo a resposta é imediata. Por exemplo para t=1 temos:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3-t \\ 1+t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \ f(X^*, t=1) = 4 - 20 + 24 = 8$$

Retome-se o cálculo em curso pois ainda não está percorrido o intervalo proposto para "t".

Sabendo que o limite superior "t = 2" foi obtido com 8 – 4t ≥ 0, este termo tem valor negativo para "t > 2" ou seja, a base corrente deixa de ser óptima pois F_2 fica com coeficiente negativo na equação de f(X).

Mudança de base: Entra F_2 ; Sai x_2

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_2	2	1	0	1	3 - t	t = 2 (limite inferior corrente)
F_1	1	1	1	0	4	3 - t = 1 ; -4 + 10t = 16 ; -8 + 4t = 0
f(X)	-4+ 10t	-8+ 4t	0	0	0	2ª Solução óptima

Qual o intervalo de "t" onde se mantém a optimalidade desta base ?

Recorrendo apenas aos termos onde "t" tem coeficiente negativo temos para limite superior de"t":

$$\{3-t \geq 0 \Rightarrow t \leq 3$$

Conclusão: Para valores de "t" entre "2" e "3" (ambos inclusive) a solução óptima é:

$$X_2^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3-t \\ 4 \end{bmatrix} ; \ f(X_2^*) = 0 \ ; t \in [2,3]$$

Avançando no intervalo de "t" vemos que para "t > 3" o termo "3 – t" tem valor negativo e a base corrente deixa de ser óptima.

Para efectuar mudança de base é necessário recorrer ao método Dual-Simplex.

Sai da base a variável F_2 (fica com valor negativo) mas não há limite superior para a nova VB (não há ratio admissível no problema Dual). Assim sendo conclui-se que o Dual é Ilimitado pelo que o problema Primal é Vazio para "t > 3" pelo que está concluído o estudo.

De facto para "t = 4" , por exemplo, o modelo fica:

Max $f(X) = -36x_1 - 8x_2$

s.a.

$$\begin{array}{lclcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array} \qquad \text{(conjunto vazio)}$$

Relatório do Estudo feito:

t	x_1	x_2	F_1	F_2	f(X)
[0 , 2]	0	3 - t	1 + t	0	$4t^2 - 20t + 24$
[2 , 3]	0	0	3 - t	4	0
> 3	Não há solução				

3. É necessário parametrizar o termo independente da 1ª restrição técnica (b_1):

Vamos considerar $b_1 = \alpha + d\lambda$ em que "α" e "d" são constantes.

Considerando $\alpha = 720$ e $d = 4$ fica $b_1 = 720 + 4\lambda$ que é equação da recta de $b_1(\lambda)$.

Para variar b_1 de 240 a 1000 horas é necessário variar "λ" no seguinte intervalo:

$$\begin{cases} b_1 = 720 + 4\lambda = 240 \Rightarrow \lambda = -120 \\ b_1 = 720 + 4\lambda = 1000 \Rightarrow \lambda = +70 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in [-120, 70]$$

O modelo de PL parametrizado é então:

Max $f(X) = 6x_1 + 3x_2$

s.a.

$$\begin{array}{lclcl} 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 720 + 4\lambda \\ 4x_1 & + & 4x_2 & \leq & 880 \\ x_1 & & & \leq & 160 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & \\ & & \lambda \in [-120, 70] & & \end{array}$$

Tenha-se em atenção que ao percorrer o intervalo de "b_1" se surgirem situações de inadmissibilidade será necessário recorrer ao método Dual-Simplex.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM	Obs.
F_1	2	4	1	0	0	$720 + 4\lambda$	$\lambda = -120$ (limite inferior corrente)
F_2	4	4	0	1	0	880	$720 + 4\lambda = 140 > 0$
F_3	1	0	0	0	1	160	
f(X)	-6	-3	0	0	0	0	Entra x_1 . Sai F_1
x_1	1	2	1/2	0	0	$360 + 2\lambda$	$360 + 2\lambda = 120 > 0$
F_2	0	-4	-2	1	0	$-560 - 8\lambda$	$-560 - 8\lambda = 400 > 0$
F_3	0	-2	-1/2	0	1	$-200 - 2\lambda$	$-200 - 2\lambda = 40 > 0$
f(X)	0	9	3	0	0	$2160 + 12\lambda$	1ª Solução Óptima

A admissibilidade desta solução mantém-se desde que se verifiquem as condições seguintes:

$$\begin{cases} -560 - 8\lambda \geq 0 \\ -200 - 2\lambda \geq 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda \leq -70 \\ \lambda \leq -100 \end{cases} \Rightarrow \lambda \leq -100$$

Conclusão:

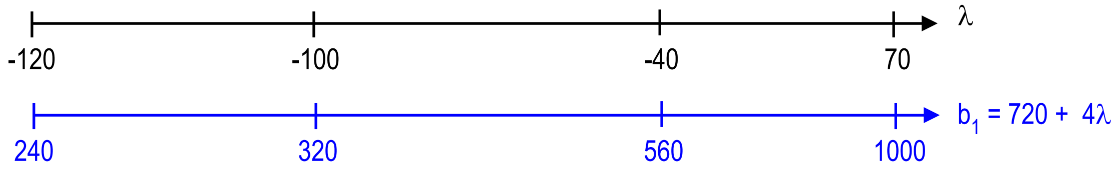
A 1ª solução óptima mantém-se para "λ" no intervalo [-120 , -100].

Para "λ" superior a "-100" o 2º membro "-200 - 2λ" fica negativo e a solução deixa de ser admissível para o problema Primal mantendo-se admissível para o problema Dual.

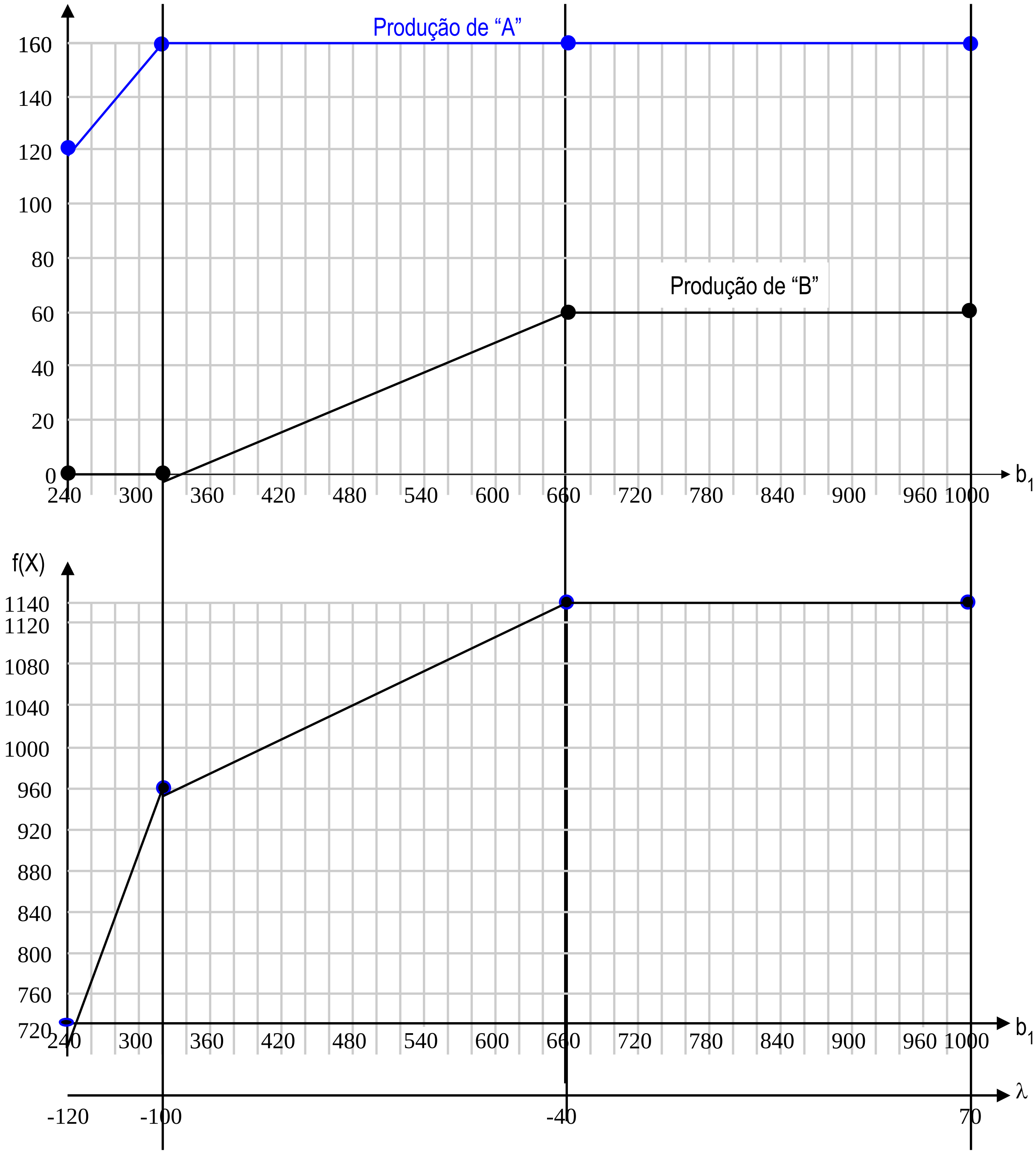
Aplicando o método Dual-Simplex para mudar de base (sai F_3 ; entra x_2) temos:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM	Obs.
x_2	0	1	1/4	0	-1/2	$100 + \lambda$	$\lambda = -100$ (limite inferior corrente) $100 + \lambda = 0$
x_1	1	0	0	0	1	160	$-160 - 4\lambda = 240 > 0$ 2ª Solução Óptima
F_2	0	0	-1	1	-2	$-160 - 4\lambda$	Mantém-se até $\lambda = -40$ Para $\lambda > -40$:
f(X)	0	0	3/4	0	9/2	$1260 + 3\lambda$	Sai F_2 ; Entra F_1
F_1	0	0	1	-1	2	$160 + 4\lambda$	$\lambda = -40$ (limite inferior corrente) $160 + 4\lambda = 0$
x_2	0	1	0	1/4	-1	60	3ª Solução Óptima Mantém-se até $\lambda \leq +\infty$
x_1	1	0	0	0	1	160	
f(X)	0	0	0	3/4	3	1140	Estudo terminado

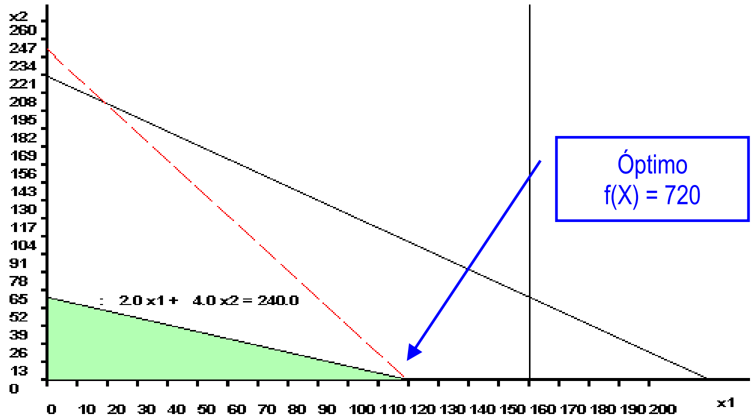
Soluções Óptimas		
$x_1 = 360 + 2\lambda$; $x_2 = 0$	$x_1 = 160$; $x_2 = 100 + \lambda$	$x_1 = 160$; $x_2 = 60$
$f(X) = 2160 + 12\lambda$	$f(X) = 1260 + 3\lambda$	$f(X) = 1140$

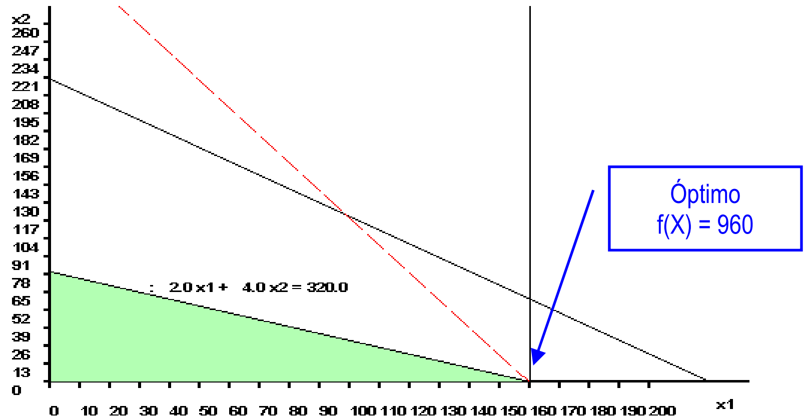


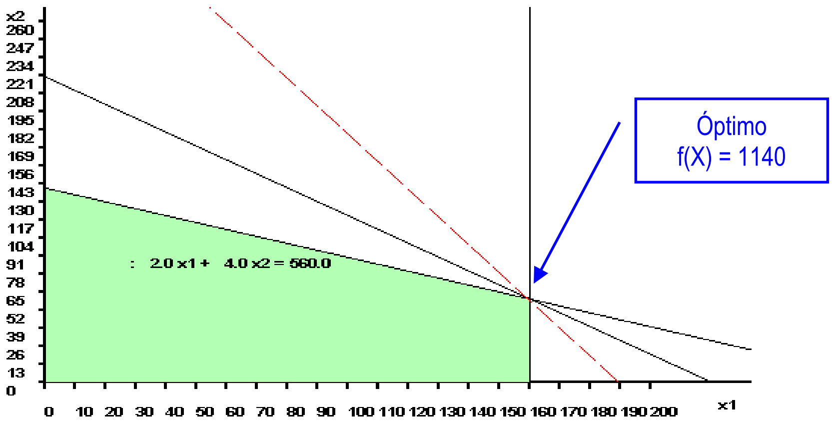
Na figura seguinte apresenta-se o gráfico com o andamento da produção e do lucro:

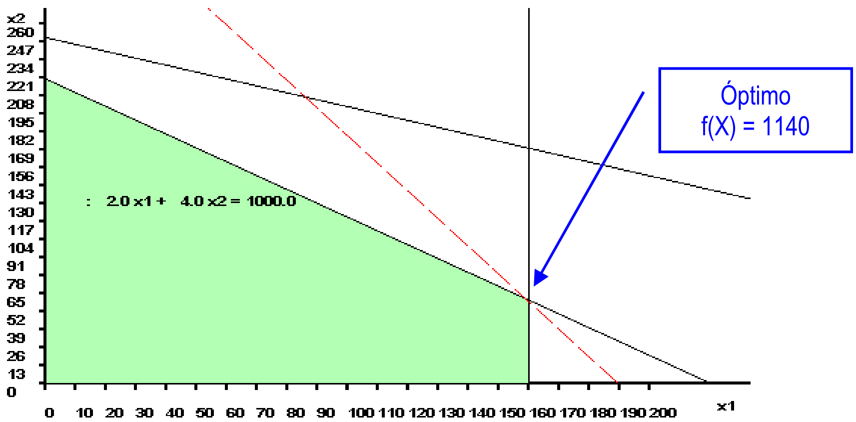


Nas figuras seguintes veja a geometria do modelo nos limites dos sub intervalos calculados:









4. É necessário parametrizar o termo independente da 1ª restrição técnicas (b_1):

Vamos considerar $b_1 = \alpha + d\lambda$ em que "α" e "d" são constantes.

Considerando $\alpha = 60$ e d = 1 fica $b_1 = 60 + \lambda$.

Para variar b_1 de 40 a 120 kg é necessário variar "λ" no seguinte intervalo:

$$\begin{cases} b_1 = 60 + \lambda = 40 \Rightarrow \lambda = -20 \\ b_1 = 60 + \lambda = 120 \Rightarrow \lambda = 60 \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda \in [-20, 60]$$

O quadro inicial do Simplex com o valor de R_1 parametrizado é o seguinte:

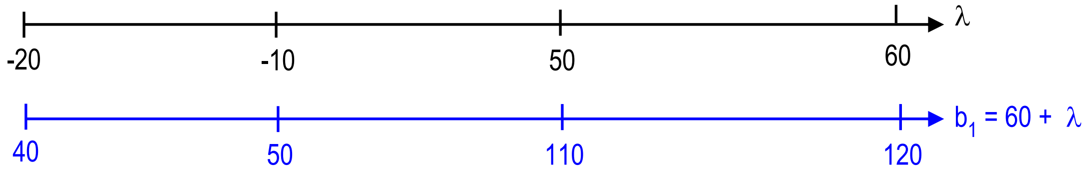
VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
F_1	2	3	4	1	0	0	$60 + \lambda$
F_2	1	1	1	0	1	0	40
F_3	2	3	0	0	0	1	50
f(X)	-4	-5	-6	0	0	0	0

Cálculo das soluções óptimas, variando "λ" no intervalo [-20 , 60] :

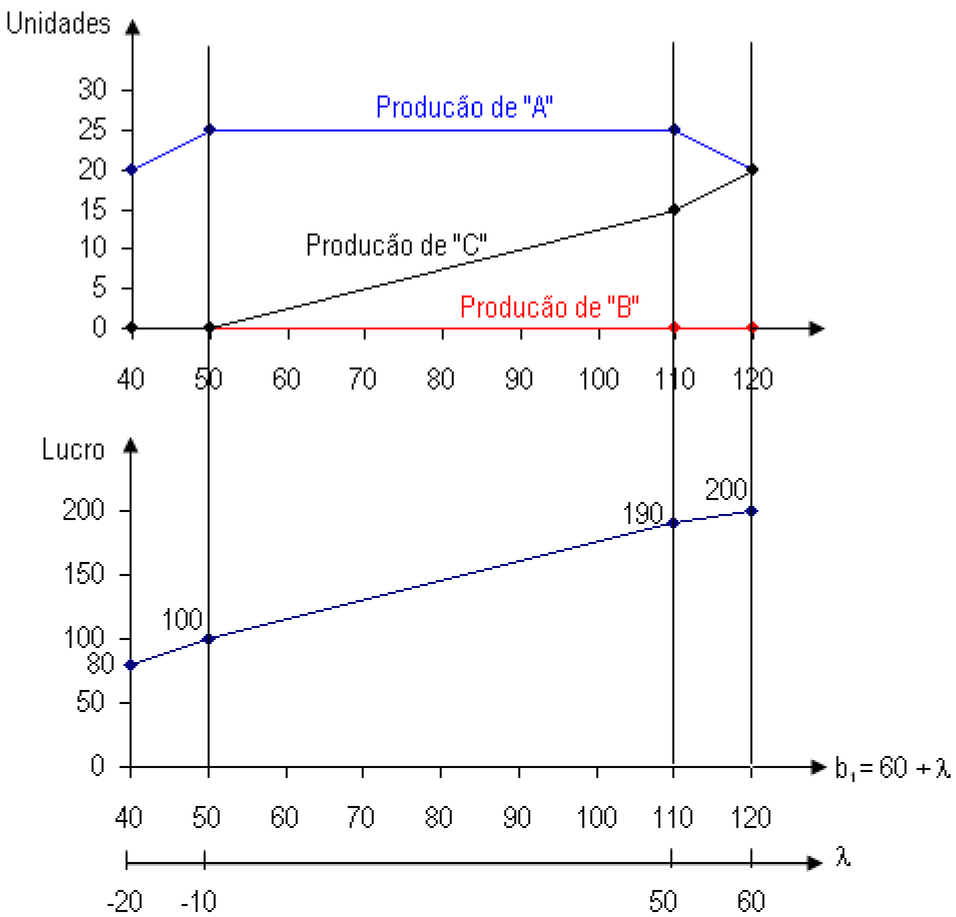
VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM	Observações
F_1	2	3	4	1	0	0	$60 + \lambda$	$\lambda = -20$
F_2	1	1	1	0	1	0	40	$60 + \lambda = 40 > 0$
F_3	2	3	0	0	0	1	50	Entra x_3
f(X)	-4	-5	-6	0	0	0	0	Sai F_1
x_3	1/2	3/4	1	1/4	0	0	$15 + \lambda/4$	$15 + \lambda/4 = 10$
F_2	1/2	1/4	0	-1/4	1	0	$25 - \lambda/4$	$25 - \lambda/4 = 30$
F_3	2	3	0	0	0	1	50	Entra x_1
f(X)	-1	-1/2	0	3/2	0	0	$90 + 3/2\,(\lambda)$	Sai x_3
x_1	1	3/2	2	1/2	0	0	$30 + \lambda/2$	$30 + \lambda/2 = 20 > 0$ $10 - \lambda/2 = 20 > 0$
F_2	0	-1/2	-1	-1/2	1	0	$10 - \lambda/2$	$-10 - \lambda = 10 > 0$ 1ª Solução Óptima
F_3	0	0	-4	-1	0	1	$-10 - \lambda$	Mantém-se até $\lambda = -10$ Para $\lambda > -10$:
f(X)	0	1	2	2	0	0	$120 + 2\lambda$	Sai F_3 ; Entra x_3
x_3	0	0	1	1/4	0	-1/4	$5/2 + \lambda/4$	$\lambda = -10$ $5/2 + \lambda/4 = 0$
x_1	1	3/2	0	0	0	1/2	25	$25/2 - \lambda/4 = 15 > 0$ 2ª Solução Óptima
F_2	0	-1/2	0	-1/4	1	-1/4	$25/2 - \lambda/4$	Mantém-se até $\lambda = 50$ Para $\lambda > 50$:
f(X)	0	1	0	3/2	0	1/2	$115 + 3/2(\lambda)$	Sai F_2 ; Entra F_3

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM	Observações
F_3	0	2	0	1	-4	0	$-50 + \lambda$	$\lambda = 50$ $-50 + \lambda = 0$
x_3	0	1/2	1	1/2	-1	0	$-10 + \lambda/2$	$-10 + \lambda/2 = 15 > 0$ $50 - \lambda/2 = 25 > 0$
x_1	1	1/2	0	-1/2	2	1	$50 - \lambda/2$	3ª Solução Óptima Mantém-se até $\lambda = 100$
f(X)	0	0	0	1	2	0	$140 + \lambda$	Estudo terminado

Soluções Óptimas		
$x_1 = 30 + \lambda/2$; $x_2 = x_3 = 0$	$x_1 = 25$; $x_3 = 5/2 + \lambda/4$; $x_2 = 0$	$x_1 = 50 - \lambda/2$; $x_3 = -10 + \lambda/2$; $x_2 = 0$
$f(X) = 120 + 2\lambda$	$f(X) = 115 + 3/2(\lambda)$	$f(X) = 140 + \lambda$



Na figura seguinte apresenta-se o gráfico com o andamento da produção e do lucro:



5. Trata-se de uma situação que exige a parametrização das margens de lucro dos dois bens.

Usando a variável "λ" e considerando "c_1" e "c_2" as margens de lucro unitário de "A" e "B" respectivamente, consideremos:

$c_1 = 8 + \lambda$

8 ——————————————— 18

λ

0 ——————————————— 10

$c_2 = ?$

24 ——————————————— 4

Tendo decidido $c_1 = 8 + \lambda$, é necessário parametrizar c_2.

Sendo $c_2 = \alpha + \lambda d$, a equação da recta que passa pelos pontos ($\lambda = 0$, $c_2 = 24$) e ($\lambda = 10$, $c_2 = 4$) é a seguinte:

$$\begin{cases} \alpha + (0)d = 24 \\ \alpha + 10d = 4 \end{cases} \begin{cases} \alpha = 24 \\ d = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_2 = 24 - 2\lambda$$

O modelo parametrizado para estudo é então:

Max $f(X) = (8 + \lambda)x_1 + (24 - 2\lambda)x_2$

s.a.

$x_1 + 2x_2 \leq 10$ (horas de trabalho)

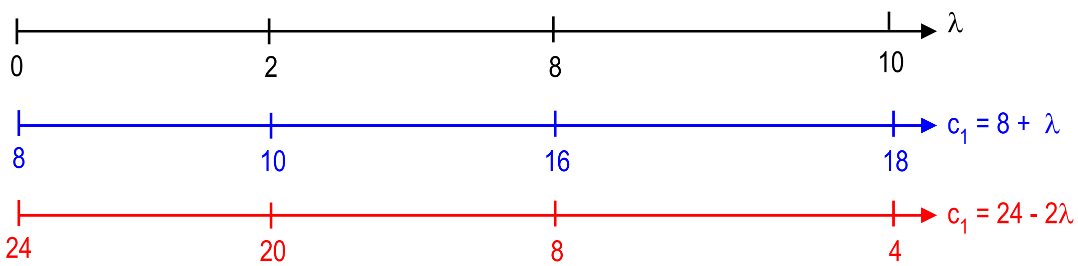
$2x_1 + x_2 \leq 10$ (relação entre produções)

$x_1 , x_2 \geq 0$

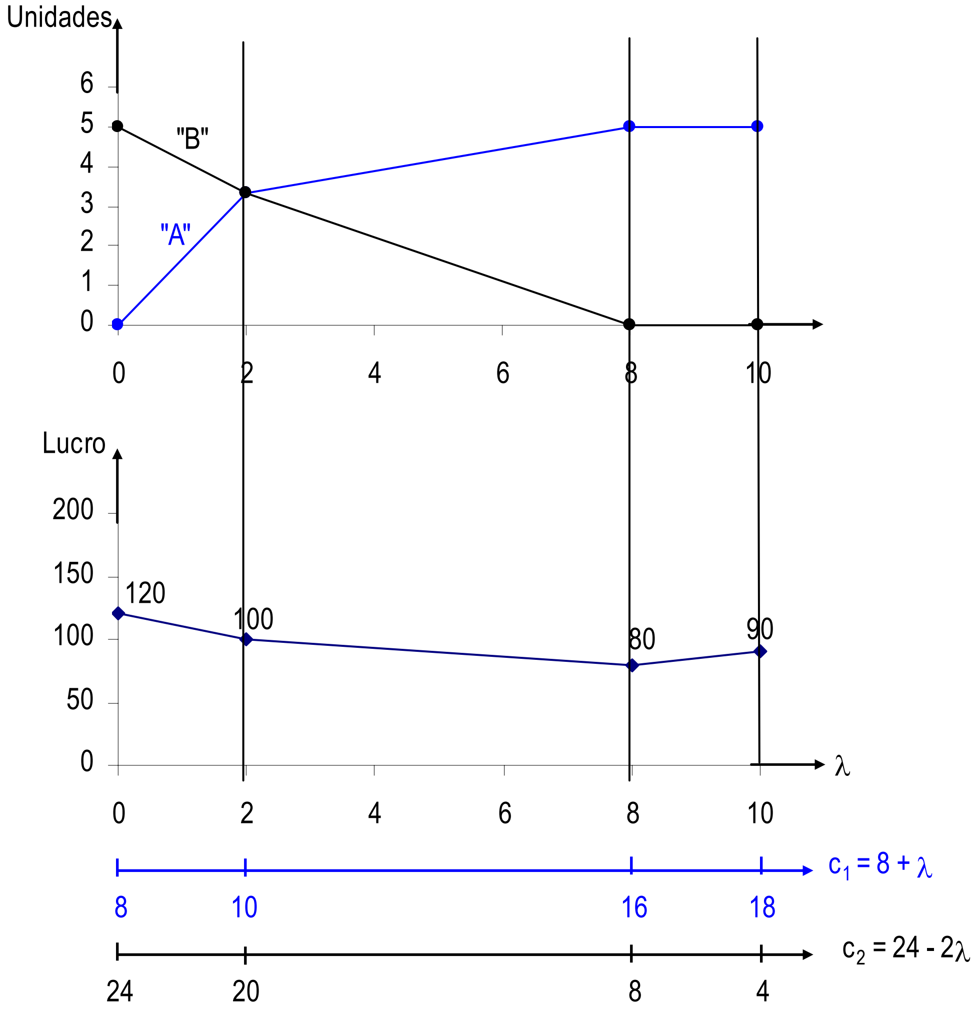
Vamos usar o método Simplex para calcular os sub intervalos de optimalidade tendo em atenção que estando apenas parametrizados coeficientes de f(X) só será necessário recorrer ao Primal-Simplex.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_1	1	2	1	0	10	$\lambda = 0$ (limite inferior corrente) $-8 - \lambda = -8 < 0$ $-24 + 2\lambda = -24 < 0$ Entra x_2 . Sai F_1
F_2	2	1	0	1	10	
f(X)	$-8 - \lambda$	$-24 + 2\lambda$	0	0	0	
x_2	1/2	1	1/2	0	5	$4 - 2\lambda = 4 > 0$ $12 - \lambda = 12 > 0$ 1ª Solução Óptima Mantém-se até $\lambda = 2$ Para $\lambda > 2$: Entra x_1 ; Sai F_2
F_2	3/2	0	-1/2	1	5	
f(X)	$4 - 2\lambda$	0	$12 - \lambda$	0	$120 - 10\lambda$	
x_1	1	0	-1/3	2/3	10/3	$\lambda = 2$ (limite inferior corrente) $40/3 - 5/3(\lambda) = 10 > 0$ $-8/3 + 4/3(\lambda) = 0$ 2ª Solução Óptima Mantém-se até $\lambda = 8$ Para $\lambda > 8$: Entra F_1 ; Sai x_2
x_2	0	1	2/3	-1/3	10/3	
f(X)	0	0	$40/3 - 5/3(\lambda)$	$-8/3 + 4/3(\lambda)$	$320/3 - 10/3(\lambda)$	
F_1	1	3/2	1	-1/2	5	$\lambda = 8$ (limite inferior corrente) $-20 + 5/2(\lambda) = 0$ $4 + \lambda/2 = 8 > 0$ 3ª Solução Óptima Mantém-se até $\lambda = +\infty$ Estudo terminado
x_1	0	1/2	0	1/2	5	
f(X)	0	$-20 + 5/2(\lambda)$	0	$4 + \lambda/2$	$40 + 5\lambda$	

Soluções Óptimas		
$x_1 = 0$; $x_2 = 5$	$x_1 = 10/3$; $x_2 = 10/3$	$x_1 = 5$; $x_2 = 0$
$f(X) = 120 - 10\lambda$	$f(X) = (320 - 10\lambda)/3$	$f(X) = 40 + 5\lambda$



Na figura seguinte estão graficadas as conclusões do estudo:



Foram identificados 3 cenários:

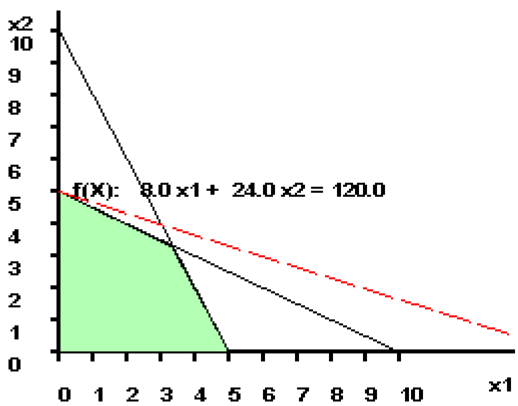
Cenário nº 1

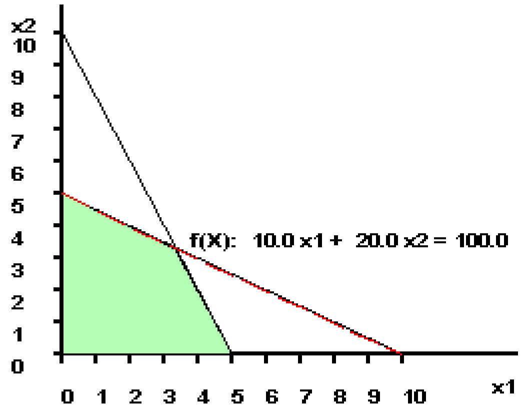
Margem de lucro unitário do produto “A” : 8 até 10 u.m.

Margem de lucro unitário do produto “B” : 24 até 20 u.m.

A produção de “A” aumenta de 0 a 3.33 unidades e a de “B” decresce de 5 para 3.33 unidades

O lucro total decresce de 120 até 100 u.m.





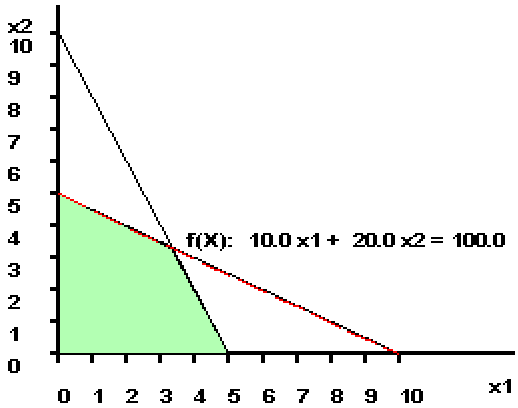
Cenário nº 2

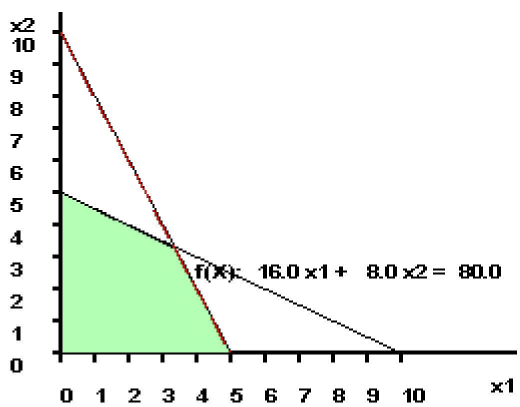
Margem de lucro unitário do produto “A” : 10 até 16 u.m.

Margem de lucro unitário do produto “B” : 20 até 8 u.m.

A produção de “A” aumenta de 3.33 a 5 unidades e a de “B” decresce de 3.33 ara 0 unidades

O lucro total decresce de 100 até 80 u.m.





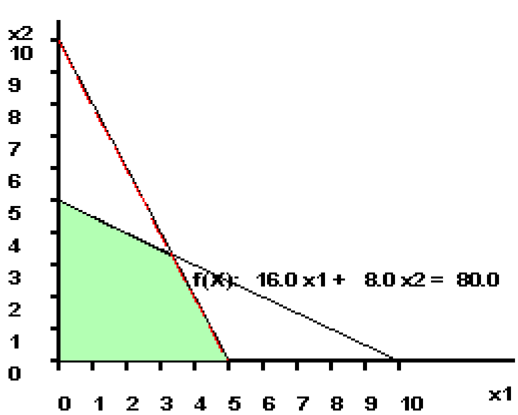
Cenário nº 3

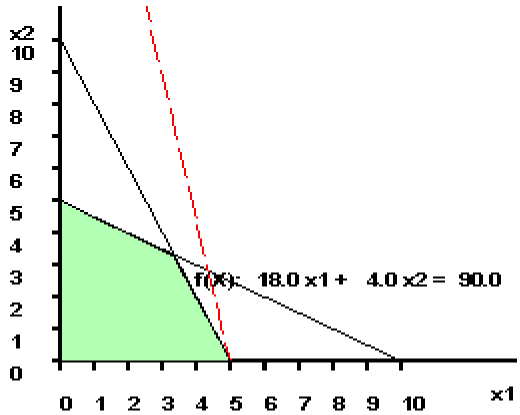
Margem de lucro unitário do produto “A” : 16 a18 u.m.

Margem de lucro unitário do produto “B” : 8 a 4 u.m.

As produções de “A” e “B” mantêm-se em 5 e 0 unidades respectivamente.

O lucro total aumenta de 80 até 90 u.m.





Veja-se a rotação do gradiente de f(X) e consequente rotação da recta de isolucro máximo.

6.

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM	Observações
F_1	1	2	1	1	0	0	$40 - \lambda$	$\lambda = 0$ Entra x_3 Sai F_2
F_2	3	0	2	0	1	0	$60 + 2\lambda$	
F_3	1	4	0	0	0	1	$30 - 7\lambda$	
f(X)	$-3 + 6\lambda$	$-2 + 2\lambda$	$-5 - 5\lambda$	0	0	0	0	
x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	$30 + \lambda$	Entra x_2 Sai F_1
F_1	-1/2	2	0	1	-1/2	0	$10 - 2\lambda$	
F_3	1	4	0	0	0	1	$30 - 7\lambda$	
f(X)	$9/2 + 27/2(\lambda)$	$-2 + 2\lambda$	0	$1 - \lambda$	$5/2 + 5/2(\lambda)$	0	$150 + 155\lambda + 5\lambda^2$	
x_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	$5 - \lambda$	1ª Solução Óptima Mantém-se até $\lambda = 1$ Para $\lambda > 1$: Entra F_1 ; Sai x_2
x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	$30 + \lambda$	
F_3	2	0	0	-2	1	1	$10 – 3\lambda$	
f(X)	$4 + 14\lambda$	0	0	$1 - \lambda$	$2 + 3\lambda$	0	$160 + 143\lambda + 7\lambda^2$	
F_1	-1/2	2	0	1	-1/2	0	$10 - 2\lambda$	$\lambda = 1$ 2ª Solução Óptima Mantém-se até $\lambda = 30/7$ Para $\lambda > 30/7$: Não há soluções (solução Ilimitada do problema Dual)
x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	$30 + \lambda$	
F_3	1	4	0	0	0	1	$30 - 7\lambda$	
f(X)	$9/2 + 27/2(\lambda)$	$-2 - 2\lambda$	0	0	$5/2 + 5/2(\lambda)$	0	$150 + 155\lambda + 5\lambda^2$	

Soluções Óptimas

	$0 \leq \lambda \leq 1$	$1 \leq \lambda \leq 30/7$	$\lambda > 30/7$
x_1	0	0	Não há soluções
x_2	$5 - \lambda$	0	
x_3	$30 + \lambda$	$30 + \lambda$	
f(X)	$7\lambda^2 + 143\lambda + 160$	$5\lambda^2 + 155\lambda + 155$	