INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

Exercícios

Cap. VIII – Programação Linear Inteira

António Carlos Morais da Silva

Professor de I.O.

VIII. Programação Linear Inteira

1. Considere um problema de PLIP com Max $f(X) = 2x_1 + 3x_2$.

   Aplicando o método Branch and Bound foi feita uma Partição. Um dos sub problemas tem $x_1 = 10$. Decida o valor de x_2 que satisfaça as seguintes condições:

   $x_2 \geq 3$

   $x_2 \leq 8$

   $x_2 \geq 4$

2. Considere um problema de PLIP com Min $f(X) = 3x_1 + 4x_2$.

   Aplicando o método Branch and Bound foi feita uma Partição. Um dos sub problemas tem $x_1 = 6$. Decida o valor de x_2 que satisfaça as seguintes condições:

   $x_2 \geq 4$

   $x_2 \leq 12$

   $x_2 \geq 7$

   $x_2 \leq 14$

   Indique o valor que atribui à variável x_2.

3. Considere um problema de PLIP com Max $f(X) = 3x_1 - 10x_2$.

   Aplicando o método Branch and Bound foi feita uma Partição. Um dos sub problemas tem $x_1 = 3$. Decida o valor de x_2 que satisfaça as seguintes condições:

   $x_2 \geq 0$

   $x_2 \leq 12$

   $x_2 \geq 3$

   $x_2 \leq 16$

4. Considere um problema de PLIP com Min $f(X) = 10x_1 - 3x_2$.

   Aplicando o método Branch and Bound foi feita uma Partição. Um dos sub problemas tem $x_1 = 6$. Decida o valor de x_2 que satisfaça as seguintes condições:

   $x_2 \geq 2$

   $x_2 \leq 10$

   $x_2 \geq 1$

   $x_2 \leq 8$

5. Determine a solução óptima do seguinte problema de PLIP :

   Max $f(X) = 6x_1 + 4x_2$

   s.a.

$$\begin{array}{rcrcl} 12x_1 & + & 8x_2 & \leq & 40 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & \leq & 20 \end{array}$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \text{ e Inteiro}$$

6. Determine a solução óptima do seguinte problema de PLIP :

   Max $f(X) = 3x_1 + 15x_2$

   s.a.

$$\begin{array}{rcrcl} 10x_1 & + & 2x_2 & \leq & 75 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & \leq & 60 \end{array}$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \text{ e Inteiro}$$

7. Determine a solução óptima do seguinte problema de PLIP :

   Max $f(X) = 12x_1 + 9x_2$

   s.a.

$$\begin{array}{rcrcl} 11x_1 & + & 19x_2 & \leq & 88 \\ x_1 & & & \leq & 5 \\ 20x_1 & + & 14x_2 & \leq & 110 \end{array}$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \text{ e Inteiro}$$

8. Determine a solução óptima do seguinte problema de PLIP :

   Max $f(X) = 2x_1 + 3x_2$

   s.a.

$$\begin{array}{rcrcl} 5x_1 & + & 4x_2 & \leq & 35 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & \geq & 36 \end{array}$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \text{ e Inteiro}$$

   Solução óptima do problema relaxado da condição de integralidade:

$$x_1 = 31/9 = 3.44\ldots$$

$$x_2 = 40/9 = 4.44\ldots$$

$$f(X) = 182/9 = 20.22\ldots$$

9. Determine a solução óptima do seguinte problema de PLIP :

   Max $f(X) = 2x_1 - 3x_2$

   s.a.

$$\begin{array}{rcrcl} 5x_1 & + & 4x_2 & \leq & 35 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & \geq & 36 \end{array}$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \text{ e Inteiro}$$

Solução óptima do problema relaxado da condição de integralidade:

$x_1 = 31/9 = 3.44\ldots$

$x_2 = 40/9 = 4.44\ldots$

$f(X) = -58/9 = -6.44\ldots$

10. Uma fábrica de cerâmica produz 2 tipos de vasos (A e B) nas suas secções de Cozedura e Pintura.

Os tempos necessários à preparação de uma unidade de cada tipo nas secções referidas, bem como a disponibilidade diária destas constam do quadro seguinte:

	Tempo necessário (h)		
Secção	Tipo A	Tipo B	Disponível / dia
Cozedura	1	1	6
Pintura	1	1.8	8

O lucro unitário da venda de A e B é respectivamente de 4 e 6.4 u.m.

A solução óptima do problema relaxado é $x_1 = 7/2$; $x_2 = 5/2$; $f(X) = 30$.

Calcular o plano óptimo de produção recorrendo ao método Branch and Bound executando o cálculo "em profundidade" optando sempre por "descer" no ramo da Partição "≤" quando há dois ramos para explorar no mesmo nível.

11. Determine a solução óptima do seguinte problema de PLIP:

Min $f(X) = x_1 + x_2$

s.a.

$$
\begin{array}{rcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 20 \\
2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\
3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 6
\end{array}
$$

$x_1 , x_2 \geq 0$ e Inteiro

A solução óptima do problema relaxado é $x_1 = 1.2$; $x_2 = 1.2$; $f(X) = 2.4$

12. Numa empresa a decisão sobre a produção de dois componentes A e B apoia-se no seguinte modelo de PL:

Max $f(X) = 3x_1 + 2x_2$

s.a.

$$
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 25 \\
5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 25 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 7
\end{array}
$$

$x_1 , x_2 \geq 0$ e Inteiro

A função objectivo representa o lucro da venda (u.m.); as variáveis x_1 e x_2 representam níveis de produção de cada um dos componentes referidos ; as restrições técnicas traduzem limites de horas de trabalho e horas de uma máquina.

<u>Relaxando a condição de integralidade</u> a solução óptima não admissível é : $x_1 = 11/3$; $x_2 = 10/3$; $f(X) = 17.67$

Calcule os níveis óptimos da produção de A e B.

13. Determine a solução óptima do seguinte problema de PLIP:

Min $f(X) = 6x_1 + 8x_2$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcr} 6x_1 & + & 7x_2 & \geq & 84 \\ 2x_1 & & & \geq & 10 \\ & & 3x_2 & \geq & 6 \end{array}$$

$x_1 , x_2 \geq 0$ e Inteiro

A solução óptima contínua é: $x_1 = 35/3$; $x_2 = 2$; $f(X) = 86$

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

Soluções dos Exercícios

Cap. VIII – Programação Linear Inteira

António Carlos Morais da Silva

Professor de I.O.

1. Para decidir sobre o valor a atribuir à variável x_2 é necessário considerar em simultâneo:

    - se pretende maximizar ou minimizar o valor da função objectivo
    - o sinal do coeficiente da variável na função objectivo
    - o intervalo de admissibilidade dos valores da variável

    Neste exemplo temos:

    - Maximizar $f(X) = 2x_1 + 3x_2$
    - Variável com coeficiente positivo pelo que é favorável atribuir-lhe o maior valor admissível
    - Intervalo de admissibilidade = [4 , 8]

    Decisão : $x_2 = 8$

2. Neste exemplo temos:

    - Minimizar $f(X) = 3x_1 + 4x_2$
    - Variável com coeficiente positivo pelo que é favorável atribuir-lhe o menor valor admissível
    - Intervalo de admissibilidade = [7 , 12]

    Decisão : $x_2 = 7$

3. Neste exemplo temos:

    - Maximizar $f(X) = 3x_1 - 10x_2$
    - Variável com coeficiente negativo pelo que é favorável atribuir-lhe o menor valor admissível
    - Intervalo de admissibilidade = [3 , 12]

    Decisão : $x_2 = 3$

4. Neste exemplo temos:

    - Minimizar $f(X) = 10x_1 - 3x_2$
    - Variável com coeficiente negativo pelo que é favorável atribuir-lhe o maior valor admissível
    - Intervalo de admissibilidade = [2 , 8]

    Decisão : $x_2 = 8$

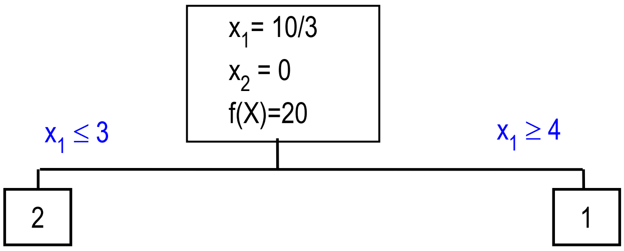
5. É necessário obter a solução óptima do problema relaxando a condição de integralidade (problema relaxado):

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 10/3 \\ x_2 &= 0 \\ Max\ f(X) &= 20 \end{aligned}}$$

Em todas as soluções descendentes desta solução o valor da função não excederá 20.

A solução em espaço contínuo não é admissível (x_1 tem valor fraccionário).

Procede-se à Partição do domínio da variável x_1:



Sub problema 1:

Domínio das variáveis neste sub problema : $x_1 \in [\,4\,,+\infty\,[\ ;\ x_2 \in [\,0\,,+\infty\,[$

Fixar $x_1 = 4$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

12(4)	+	$8x_2$	$\leq$	40	
3(4)	+	$6x_2$	$\leq$	20	
1(4)			$\geq$	4	(partição)

Obtém-se para x_2:

$x_2 \leq -1$	Sem solução $x_1 < 0$
$x_2 \leq 8/6$	

Sub problema 2:

Domínio das variáveis neste sub problema : $x_1 \in [\,0\,,\,3\,]\ ;\ x_2 \in [\,0\,,+\infty\,[$

Fixar $x_1 = 3$.

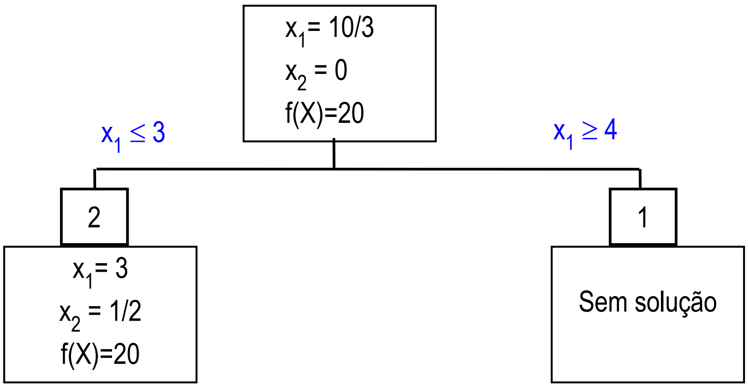
Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

12(3)	+	$8x_2$	$\leq$	40	
3(3)	+	$6x_2$	$\leq$	20	
1(3)			$\leq$	3	(partição)

Obtém-se para x_2:

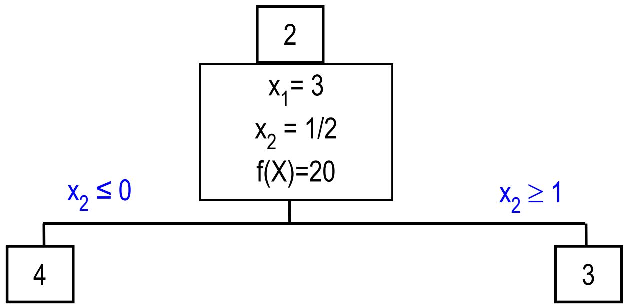
$x_2 \le 1/2$	$x_2 = 1/2$
$x_2 \le 11/6$	

Valor da função com $x_1 = 3$ e $x_2 = 1/2$: $f(X) = 6x_1 + 4x_2 = 20$



A solução do sub problema 2 não é admissível pois x_2 tem valor fraccionário.

Procede-se à Partição do domínio da variável x_2:



Sub problema 3:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,\,3\,]$; $x_2 \in [\,1\,,\,+\infty\,[$

Fixar $x_2 = 1$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_2 pelo valor corrente:

$12x_1$	+	8(1)	$\le$	40	
$3x_1$	+	6(1)	$\le$	20	
x_1			$\le$	3	(partição)
		1(1)	$\ge$	1	(partição)

Obtém-se para x_1:

$x_1 \le 8/3$	$x_1 = 8/3$
$x_1 \le 14/3$	
$x_1 \le 3$	

Valor da função com $x_1 = 8/3$ e $x_2 = 1$: $f(X) = 6x_1 + 4x_2 = 20$

Sub problema 4:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,\,3\,]$; $x_2 \in [\,0\,,\,0\,]$

Fixar $x_2 = 0$.

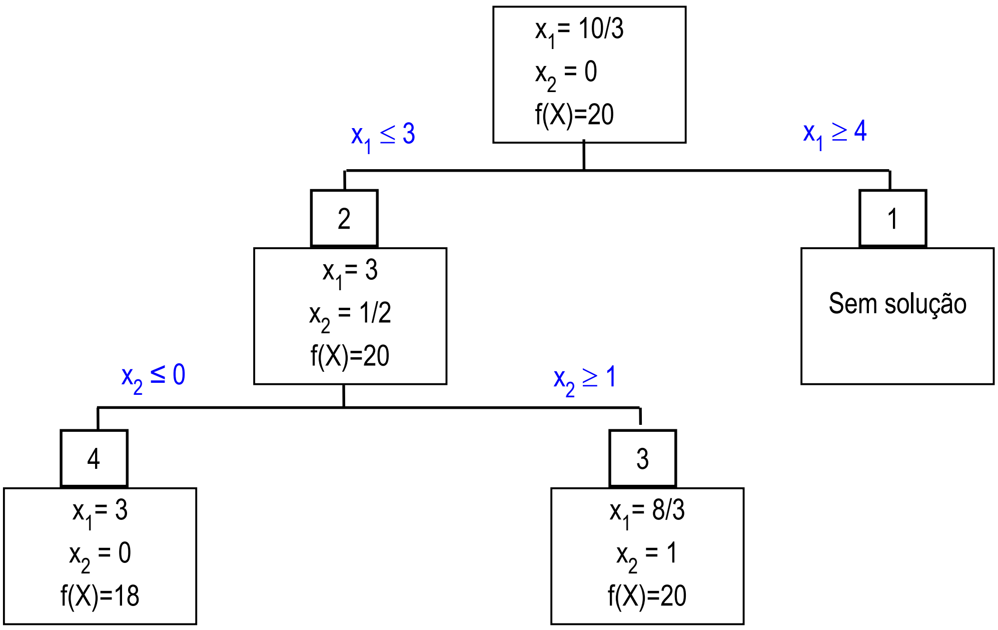
Nas restrições técnicas substitui-se x_2 pelo valor corrente:

$$\begin{array}{lclcll} 12x_1 & + & 8(0) & \leq & 40 & \\ 3x_1 & + & 6(0) & \leq & 20 & \\ x_1 & & & \leq & 3 & \text{(partição)} \\ & & 1(0) & \leq & 0 & \text{(partição)} \end{array}$$

Obtém-se para x_1:

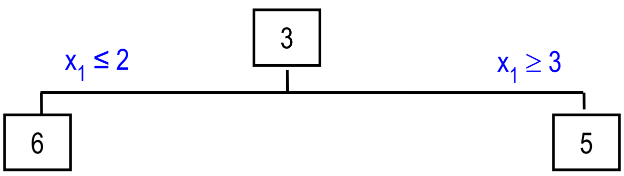
$x_1 \leq 10/3$	$x_1 = 3$
$x_1 \leq 20/3$	
$x_1 \leq 3$	

Valor da função com $x_1 = 3$ e $x_2 = 0$: $f(X) = 6x_1 + 4x_2 = 18$



A solução do sub problema 4 é admissível com f(X) = 18. A partir deste momento do cálculo só serão objecto de partição as soluções não admissíveis com f(X) ≥ 18 (Limite Inferior).

A solução do sub problema 3 não é admissível pois x_1 tem valor fraccionário. Como tem valor de f(X) superior ao limite inferior corrente, procede-se à Partição do domínio da variável x_1:



Sub problema 5:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,3\,,\,3\,]$; $x_2 \in [\,1\,,\,+\,\infty\,[$

Fixar $x_1 = 3$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

12(3)	+	$8x_2$	$\le$	40	
3(3)	+	$6x_2$	$\le$	20	
1(3)			$\le$	3	(partição)
		x_2	$\ge$	1	(partição)
1(3)			$\ge$	3	(partição)

Obtém-se para x_2:

$x_2 \le 1/2$	Sem solução
$x_2 \le 11/6$	
$x_2 \ge 1$	

Sub problema 6:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,\,2\,]$; $x_2 \in [\,1\,,\,+\,\infty\,[$

Fixar $x_1 = 2$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

12(2)	+	$8x_2$	$\le$	40	
3(2)	+	$6x_2$	$\le$	20	
1(2)			$\le$	3	(partição)
		x_2	$\ge$	1	(partição)
1(2)			$\le$	2	(partição)

Obtém-se para x_2:

$x_2 \le 2$	$x_2 = 2$
$x_2 \le 7/3$	
$x_2 \ge 1$	

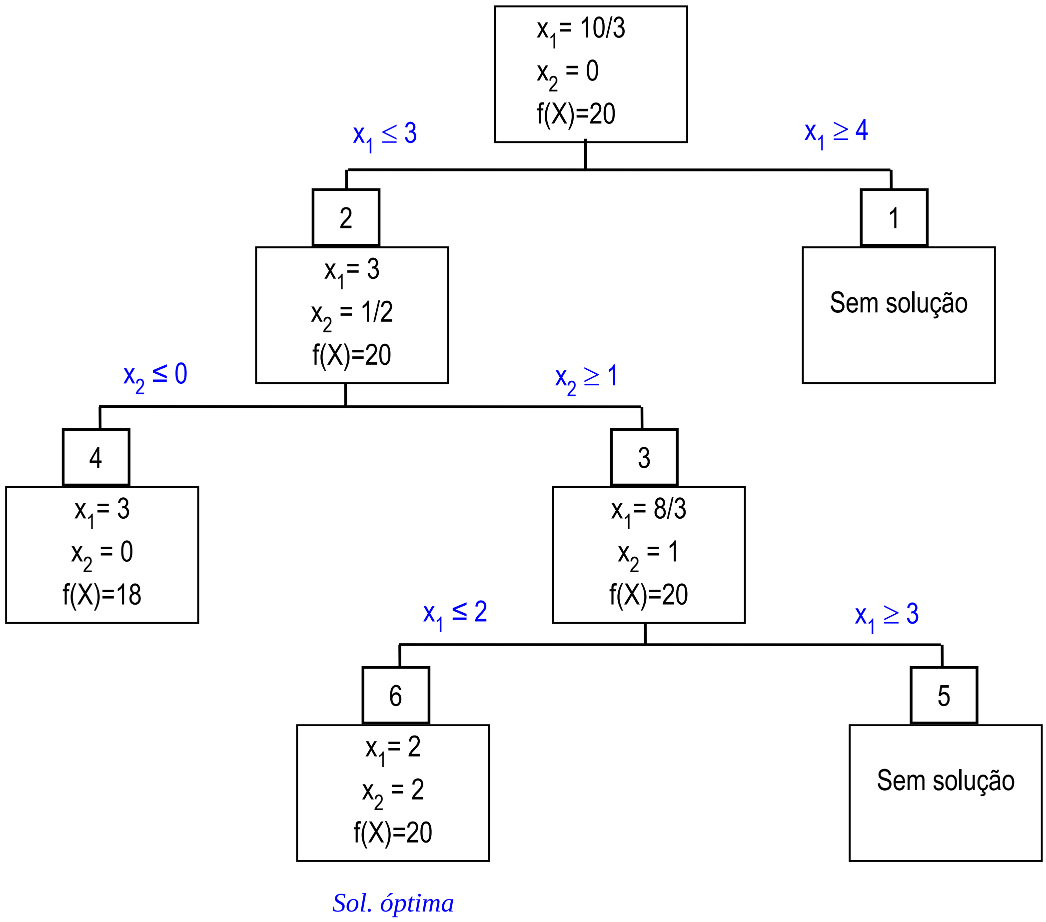
Valor da função com $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$: $f(X) = 6x_1 + 4x_2 = 20$

A solução do sub problema 6 é admissível com f(X) = 20 que passa a ser o novo limite inferior.

Como não há mais sub problemas para análise esta solução é óptima:

$x_1 = 2$; $x_2 = 2$; Max $f(X) = 20$

A árvore resultante do cálculo efectuado é a seguinte:



Vejam-se os modelos lineares associados a cada um dos “nós” da árvore de cálculo:

$$\begin{array}{l} Max\ f(X) = 6x_1 + 4x_2 \\ s.a. \\ 12x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0\ e\ Int. \end{array}$$

$x_1 \leq 3$ $x_1 \geq 4$

2

$$\begin{array}{l} Max\ f(X) = 6x_1 + 4x_2 \\ s.a. \\ 12x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0\ e\ Int. \end{array}$$

1

$$\begin{array}{l} Max\ f(X) = 6x_1 + 4x_2 \\ s.a. \\ 12x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0\ e\ Int. \end{array}$$

$x_2 \leq 0$ $x_2 \geq 1$

4

$$\begin{array}{l} Max\ f(X) = 6x_1 + 4x_2 \\ s.a. \\ 12x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0\ e\ Int. \end{array}$$

3

$$\begin{array}{l} Max\ f(X) = 6x_1 + 4x_2 \\ s.a. \\ 12x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0\ e\ Int. \end{array}$$

$x_1 \leq 2$ $x_1 \geq 3$

6

$$\begin{array}{l} Max\ f(X) = 6x_1 + 4x_2 \\ s.a. \\ 12x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0\ e\ Int. \end{array}$$

Sol. óptima

5

$$\begin{array}{l} Max\ f(X) = 6x_1 + 4x_2 \\ s.a. \\ 12x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0\ e\ Int. \end{array}$$

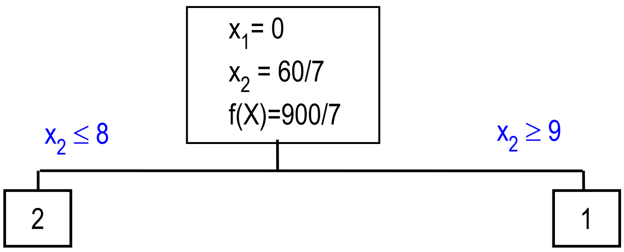
6. É necessário obter a solução óptima do problema relaxando a condição de integralidade (problema relaxado):

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 60/7 \\ Max\ f(X) = 900/7 \end{array}}$$

Em todas as soluções descendentes desta solução o valor da função não excederá 900/7.

A solução em espaço contínuo não é admissível pois as variáveis têm valor fraccionário.

Procede-se à Partição do domínio da variável x_2:



Sub problema 1:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\, 0 \,,\, +\infty\, [$; $x_2 \in [\, 9 \,,\, +\infty\, [$

Fixar $x_2 = 9$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_2 pelo valor corrente:

$$\begin{array}{ccccl} 10x_1 & + & 2(9) & \leq & 75 \\ 6x_1 & + & 7(9) & \leq & 60 \\ & & 1(9) & \leq & 9 \quad \text{(partição)} \end{array}$$

Obtém-se para x_1:

$x_1 \leq 57/10$	Sem solução
$x_1 \leq -1/2$	$x_1 < 0$

Sub problema 2:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\, 0 \,,\, +\infty\, [$; $x_2 \in [\, 0 \,,\, 8\,]$

Fixar $x_2 = 8$.

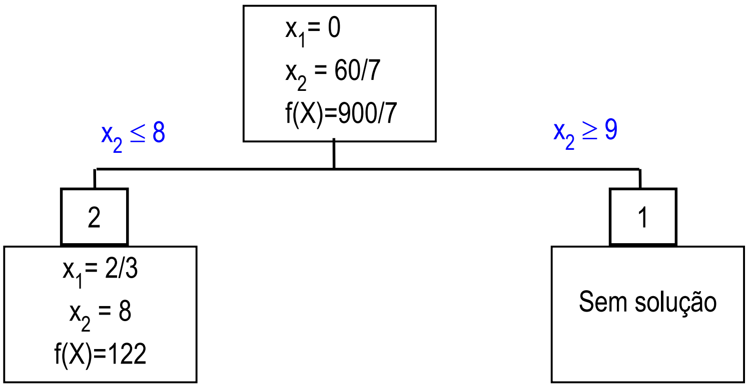
Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

$$\begin{array}{ccccl} 10x_1 & + & 2(8) & \leq & 75 \\ 6x_1 & + & 7(8) & \leq & 60 \\ & & 1(8) & \leq & 8 \quad \text{(partição)} \end{array}$$

Obtém-se para x_1:

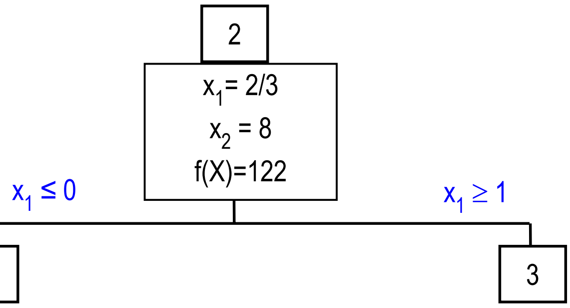
$x_1 \leq 59/10$	$x_1 = 2/3$
$x_1 \leq 2/3$	

Valor da função com $x_1 = 2/3$ e $x_2 = 8$: $f(X) = 3x_1 + 15x_2 = 122$



A solução do sub problema 2 não é admissível pois x_1 tem valor fraccionário.

Procede-se à Partição do domínio da variável x_1:



Sub problema 3:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,1\,,+\infty\,[\ ;\ x_2 \in [\,0\,,8\,]$

Fixar $x_1 = 1$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

10(1)	+	$2x_2$	$\leq$	75	
6(1)	+	$7x_2$	$\leq$	60	
		x_2	$\leq$	8	(partição)
1(1)			$\geq$	1	(partição)

Obtém-se para x_2:		
	$x_2 \leq 65/2$	$x_2 = 54/7$
	$x_2 \leq 54/7$	
	$x_2 \leq 8$	

Valor da função com $x_1 = 1$ e $x_2 = 54/7$: $f(X) = 3x_1 + 15x_2 = 831/7$

Sub problema 4:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,0\,]$; $x_2 \in [\,0\,,8\,]$

Fixar $x_1 = 0$.

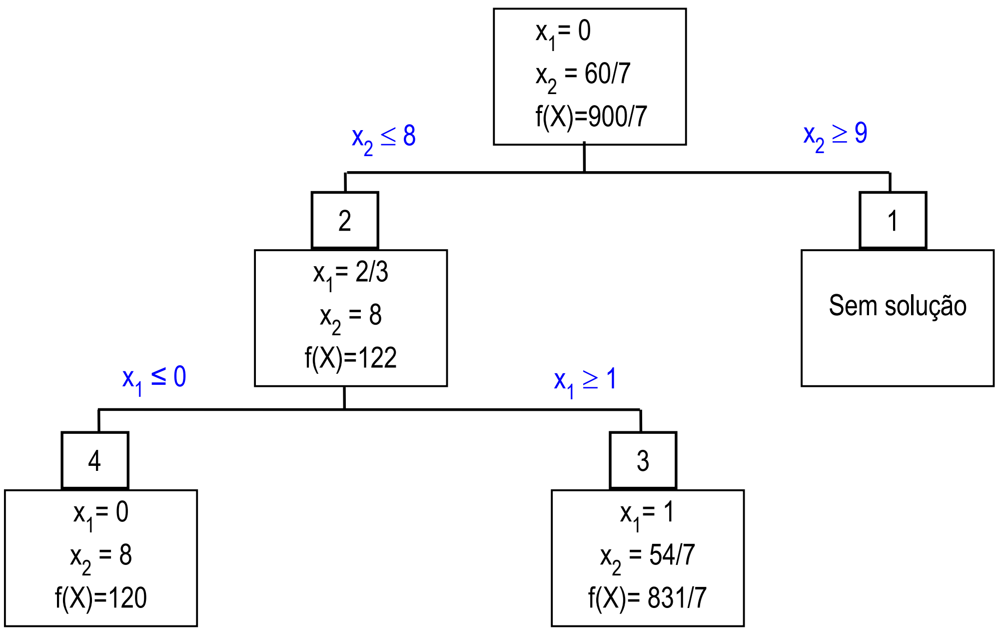
Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

$$\begin{array}{lcccl} 10(0) & + & 2x_2 & \leq & 75 \\ 6(0) & + & 7x_2 & \leq & 60 \\ & & x_2 & \leq & 8 \quad \text{(partição)} \\ 1(0) & & & \leq & 0 \quad \text{(partição)} \end{array}$$

Obtém-se para x_2:

$x_2 \leq 75/2$	$x_2 = 8$
$x_2 \leq 60/7$	
$x_2 \leq 8$	

Valor da função com $x_1 = 0$ e $x_2 = 8$: $f(X) = 3x_1 + 15x_2 = 120$



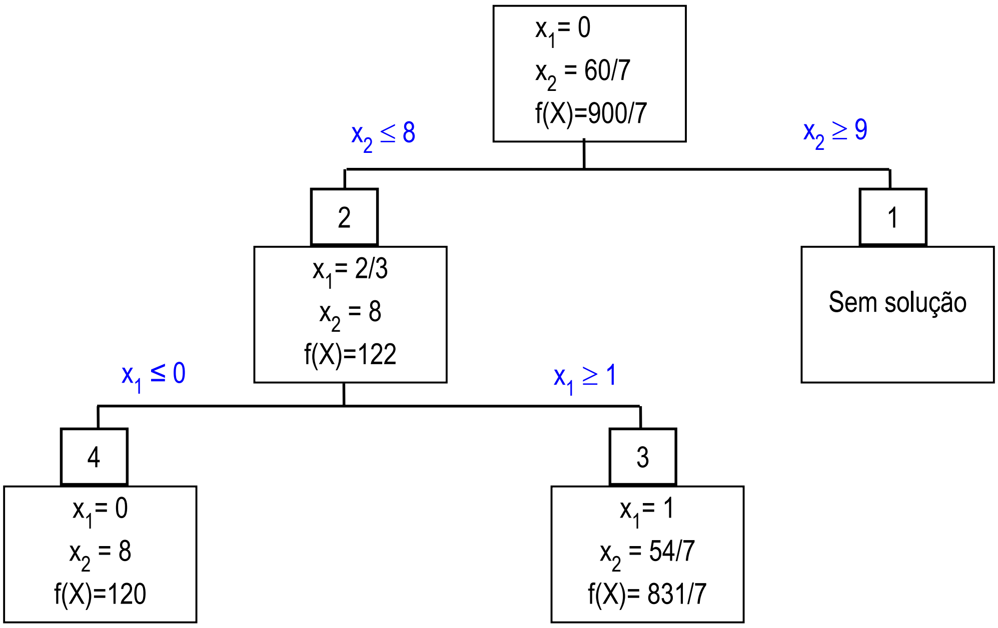
A solução do sub problema 4 é admissível com f(X) = 120. A partir deste momento do cálculo só serão objecto de partição as soluções não admissíveis com f(X) ≥ 120 (Limite Inferior).

A solução do sub problema 3 não é admissível pois x_2 tem valor fraccionário. Como f(X) tem valor inferior a 120 não tem interesse realizar partição pois os sub problemas descendentes terão garantidamente valor da função inferior a 120.

Como não há mais sub problemas para análise a solução do sub problema 4 é óptima:

$x_1 = 0$; $x_2 = 8$; Max f(X) = 120

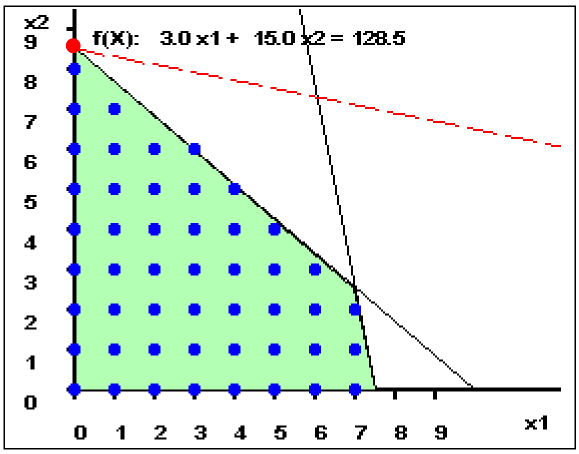
A árvore resultante do cálculo efectuado é a seguinte:



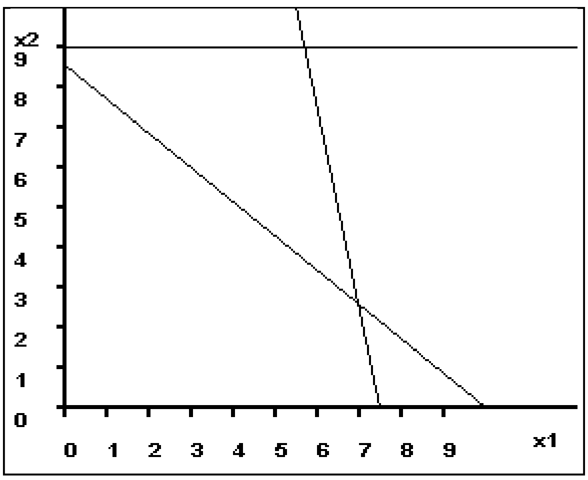
Sol. óptima

Veja-se a geometria do problema relaxado e dos sub problemas gerados por Partição:

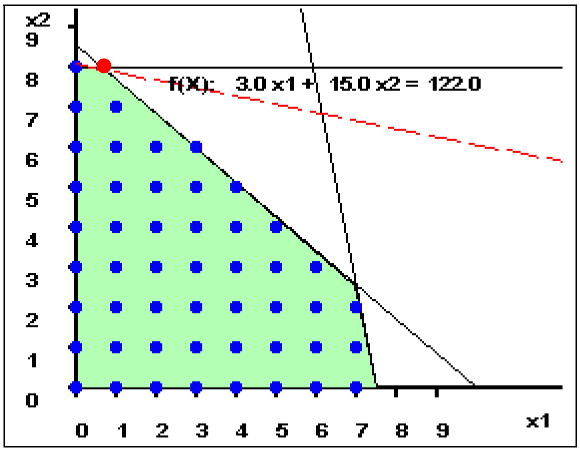
<u>Problema relaxado</u>



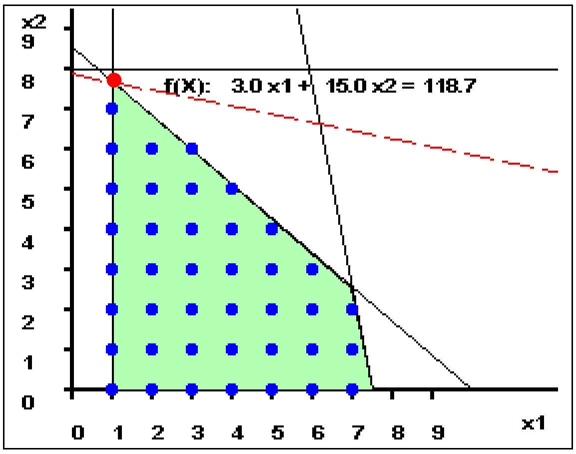
<u>Sub problema 1</u> (Conjunto de soluções Vazio)



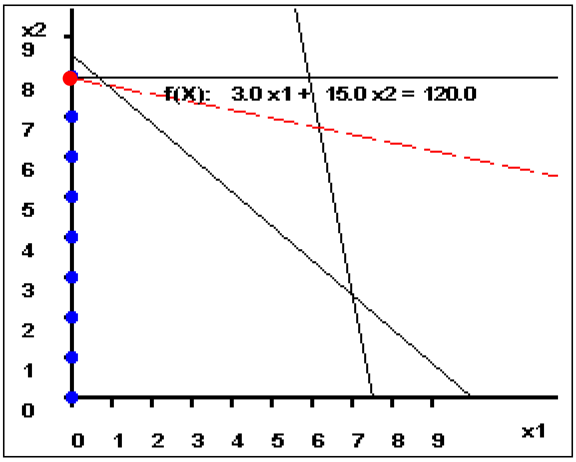
Sub problema 2



Sub problema 3



Sub problema 4



7. É necessário obter a solução óptima do problema relaxando a condição de integralidade (problema relaxado):

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
0	0	Problema relaxado da cond. inteira (solução contínua)	x_1 x_2 f(X)	3.79646018 2.43362832 67.46017699	Variável x_1

Em todas as soluções descendentes desta solução o valor da função não excederá 67.46.

A solução em espaço contínuo não é admissível pois as variáveis têm valor fraccionário.

Sub problemas 1 e 2 resultantes da Partição do domínio da variável x_1 no problema relaxado (Nível 0)

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
1	1	Derivado do problema 0 Intervalo x_1 : [4 , Ilimitado [Intervalo x_2 : [0 , Ilimitado [	x_1 x_2 f(X)	4 2.14285714 67.28571429	Variável x_2

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
1	2	Derivado do problema 0 Intervalo x_1 : [0 , 3] Intervalo x_2 : [0 , Ilimitado [	x_1 x_2 f(X)	3 2.89473684 62.05263158	Variável x_2

As duas soluções não são admissíveis (ambas têm variáveis com valor fraccionário).

Sub problemas 3 e 4 resultantes da Partição do domínio da variável x_2 no sub problema 1 (Nível 1)

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
2	3	Derivado do problema 1 Intervalo x_1 : [4 , Ilimitado [Intervalo x_2 : [3 , Ilimitado [			Sem solução

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
2	4	Derivado do problema 1 Intervalo x_1 : [4 , Ilimitado [Intervalo x_2 : [0 , 2]	x_1 x_2 f(X)	4.1 2 67.2	Variável x_1

Sub problemas 5 e 6 resultantes da Partição do domínio da variável x_2 no sub problema 2 (Nível 1)

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
2	5	Derivado do problema 2 Intervalo x_1 : [0 , 3] Intervalo x_2 : [3 , Ilimitado [	x_1 x_2 f(X)	2.81818182 3 60.81818182	Variável x_1

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
2	6	Derivado do problema 2 Intervalo x_1 : [0 , 3] Intervalo x_2 : [0 , 2]	x_1 x_2 f(X)	3 2 54 (1º LI)	Não Sol. Admissível

No Nível 2 temos o sub problema 6 com solução admissível pelo que o valor de f(X) = 54 passa a ser o Limite Inferior dos valores de f(X), ou seja, só serão agora objecto de partição os sub problemas com solução não admissível e valor de f(X) ≥ 54.

Os sub problemas 4 e 5 têm valor de f(X) superior ao Limite Inferior corrente pelo que serão objecto de partição.

Sub problemas 7 e 8 resultantes da Partição do domínio da variável x_1 no sub problema 4 (Nível 2)

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
3	7	Derivado do problema 4 Intervalo x_1 : [5 , Ilimitado [Intervalo x_2 : [0 , 2]	x_1 x_2 f(X)	5 0.71428571 66.42857143	Variável x_2

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
3	8	Derivado do problema 4 Intervalo x_1 : [4 , 4] Intervalo x_2 : [0 , 2]	x_1 x_2 f(X)	4 2 66 (2º LI)	Não Sol. Admissível

Sub problemas 9 e 10 resultantes da Partição do domínio da variável x_1 no sub problema 5 (Nível 2)

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
3	9	Derivado do problema 5 Intervalo x_1 : [3 , 3] Intervalo x_2 : [3 , Ilimitado [			Sem solução

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
3	10	Derivado do problema 5 Intervalo x_1 : [0 , 2] Intervalo x_2 : [3 , Ilimitado [	x_1 x_2 f(X)	2 3.47368421 55.26315789	Variável x_2

No Nível 3, o sub problema 8 tem solução admissível com f(X) = 66 pelo que não será feita Partição em sub problemas deste nível com f(X) < 66 como é o caso do sub problema 10 com f(X) = 55.26.

Resta no Nível 3 o sub problema 7 com f(X) = 66.43. Porque este valor é superior ao Limite Inferior corrente há que efectuar Partição.

Sub problemas 11 e 12 resultantes da Partição do domínio da variável x_2 no sub problema 7 (Nível 3)

Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
4	11	Derivado do problema 7 Intervalo x_1 : [5 , Ilimitado [Intervalo x_2 : [1 , 2]			Sem solução

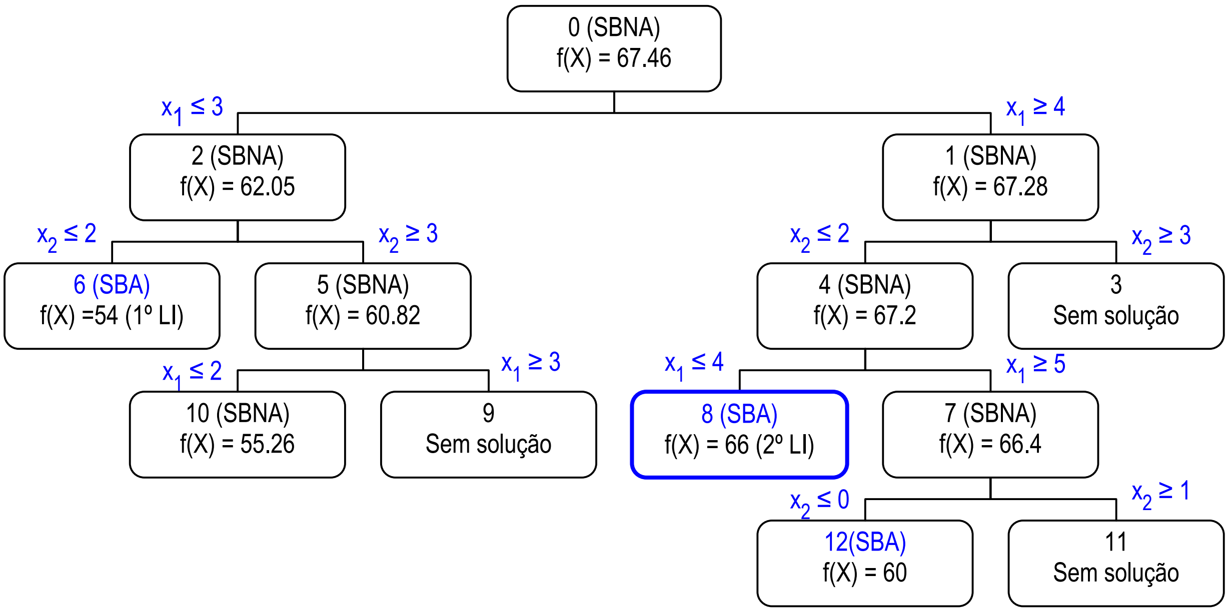
Nível	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Partição
4	12	Derivado do problema 7 Intervalo x_1 : [5 , Ilimitado [Intervalo x_2 : [0 , 0]	x_1 x_2 f(X)	5 0 60	Não Sol. Admissível

No Nível 4 o sub problema 12 tem solução admissível com f(X) menor do que o limite inferior corrente, pelo que não é objecto de partição.

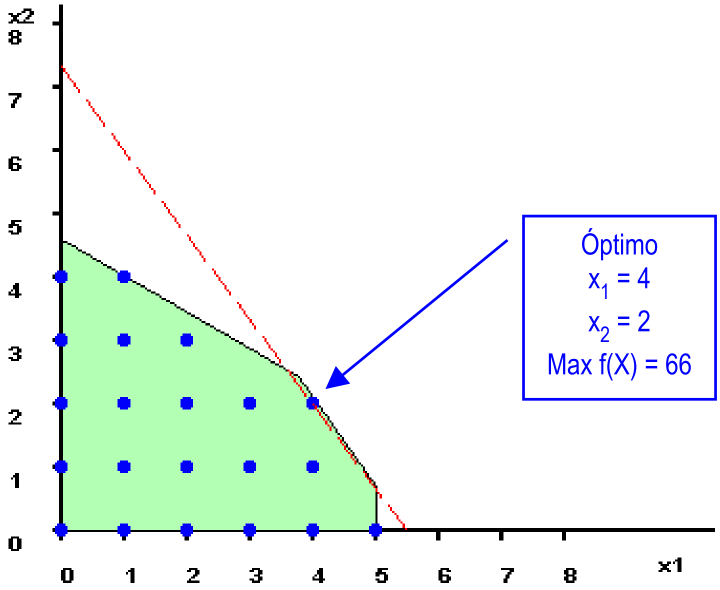
Não há sub problemas pendentes pelo que a solução obtida no sub problema 8 é a solução óptima:

$$x_1 = 4 \; ; \; x_2 = 2 \; ; \; \text{Max } f(X) = 66$$

Árvore associada ao cálculo efectuado



Geometria do modelo



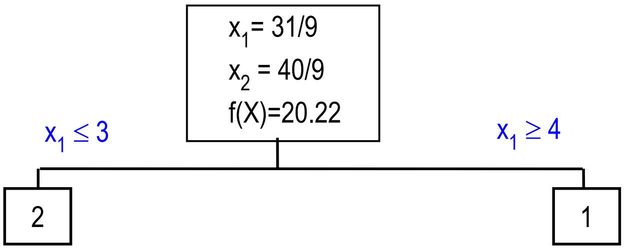
8.

$$x_1 = 31/9$$
$$x_2 = 40/9$$
$$Max\ f(X) = 20.22$$

Em todas as soluções descendentes desta solução o valor da função será, pelo menos, 20.22.

A solução em espaço contínuo não é admissível (varáveis com valor fraccionário).

Procede-se à Partição do domínio da variável x_1:



Sub problema 1:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,4\,,+\infty\,[\ ;\ x_2 \in [\,0\,,+\infty\,[$

Fixar $x_1 = 4$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

$$\begin{array}{lcccl} 5(4) & + & 4x_2 & \leq & 35 \\ 4(4) & + & 5x_2 & \geq & 36 \\ 1(4) & & & \geq & 4 \quad \text{(partição)} \end{array}$$

Obtém-se para x_2:		
	$x_2 \leq 15/4$	Sem solução
	$x_2 \geq 4$	

Sub problema 2:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,3\,]\ ;\ x_2 \in [\,0\,,+\infty\,[$

Fixar $x_1 = 3$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

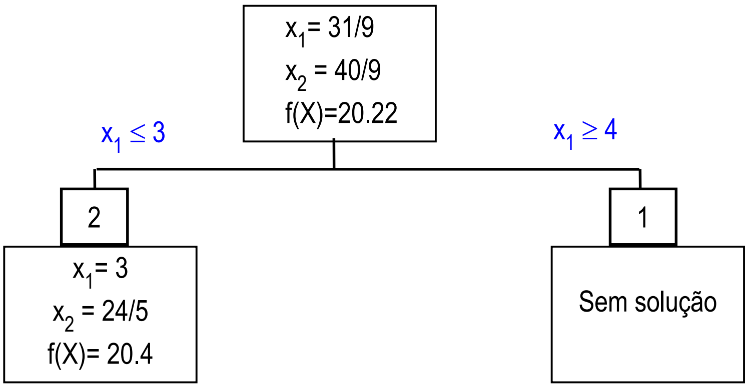
$$\begin{array}{lcccl} 5(3) & + & 4x_2 & \leq & 35 \\ 4(3) & + & 5x_2 & \geq & 36 \\ 1(3) & & & \leq & 3 \quad \text{(partição)} \end{array}$$

Obtém-se para x_2:		
	$x_2 \leq 5$	$x_2 = 24/5$
	$x_2 \geq 24/5$	

Notando que está em cálculo o mínimo da função objectivo e que nesta a variável x_2 tem coeficiente positivo, quanto menor for o valor de x_2, tanto melhor para o valor de f(X).

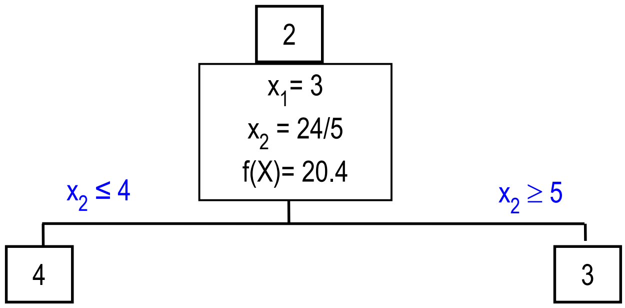
Neste caso o valor de x_2 tem deve pertencer ao intervalo [24/5 , 5] pelo que se decide $x_2 = 24/5$.

Valor da função com $x_1 = 3$ e $x_2 = 24/5$: $f(X) = 2x_1 + 3x_2 = 102/5 = 20.4$



A solução do sub problema 2 não é admissível pois x_2 tem valor fraccionário.

Procede-se à Partição do domínio da variável x_2:



<u>Sub problema 3</u>:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,\,3\,]$; $x_2 \in [\,5\,,\,+\infty\,[$

Fixar $x_2 = 5$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_2 pelo valor corrente:

$$\begin{array}{cccccl}
5x_1 & + & 4(5) & \leq & 35 & \\
4x_1 & + & 5(5) & \geq & 36 & \\
x_1 & & & \leq & 3 & \text{(partição)} \\
 & & 1(5) & \geq & 5 & \text{(partição)}
\end{array}$$

Obtém-se para x_1:

$x_1 \leq 3$	$x_1 = 11/4$
$x_1 \geq 11/4$	
$x_1 \leq 3$	

Valor da função com $x_1 = 11/4$ e $x_2 = 5$: $f(X) = 6x_1 + 4x_2 = 20.5$

Sub problema 4:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,3\,]$; $x_2 \in [\,0\,,4\,]$

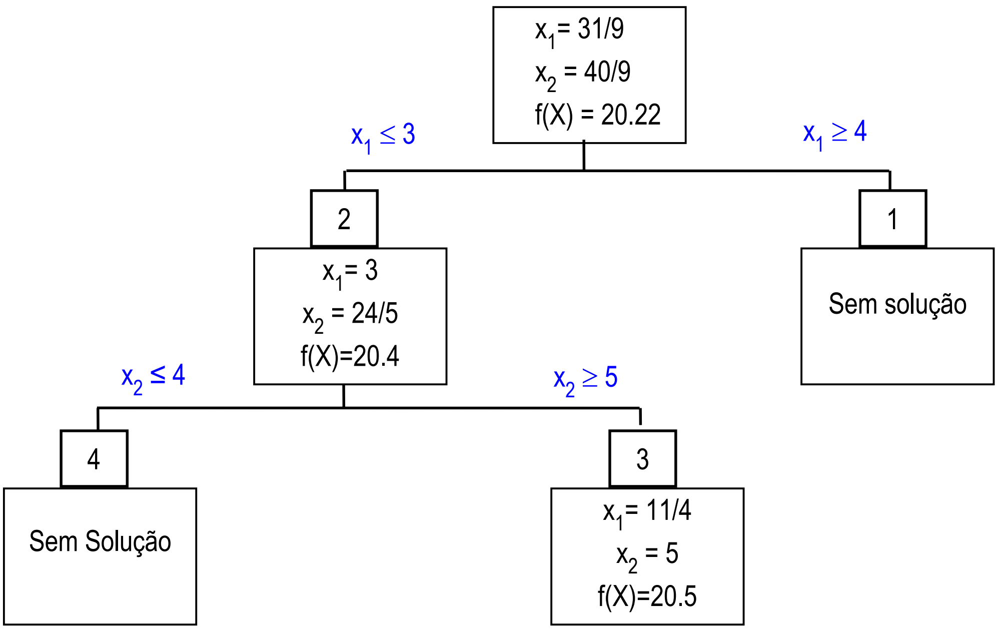
Fixar $x_2 = 4$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_2 pelo valor corrente:

$$
\begin{array}{lclcll}
5x_1 & + & 4(4) & \leq & 35 & \\
4x_1 & + & 5(4) & \geq & 36 & \\
x_1 & & & \leq & 3 & \text{(partição)} \\
 & & 1(4) & \leq & 4 & \text{(partição)}
\end{array}
$$

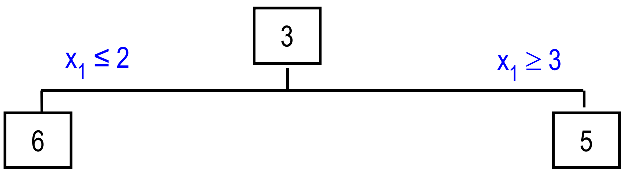
Obtém-se para x_1:

$x_1 \leq 19/5$	Sem solução
$x_1 \geq 4$	
$x_1 \leq 3$	



A solução do sub problema 3 não é admissível pois x_1 tem valor fraccionário.

Procede-se à Partição do domínio da variável x_1:



Sub problema 5:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,3\,,3\,]$; $x_2 \in [\,5\,,+\infty\,[$

Fixar $x_1 = 3$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

5(3)	+	$4x_2$	$\leq$	35	
4(3)	+	$5x_2$	$\geq$	36	
1(3)			$\leq$	3	(partição)
		x_2	$\geq$	5	(partição)
1(3)			$\geq$	3	(partição)

Obtém-se para x_2:

$x_2 \leq 5$	$x_2 = 5$
$x_2 \geq 24/5$	
$x_2 \geq 5$	

Valor da função com $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$: $f(X) = 2x_1 + 3x_2 = 21$

A solução é admissível com f(X) = 21 (1º limite Superior)

A partir de agora só é feita Partição nos sub problemas com solução não admissível e com valor de $f(X) \leq 21$.

Sub problema 6:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,2\,]$; $x_2 \in [\,5\,,+\infty\,[$

Fixar $x_1 = 2$.

Nas restrições técnicas (notar o aumento do problema com as restrições $x_1 \leq 3$ e $x_2 \geq 5$) substitui-se x_1 pelo valor corrente:

5(2)	+	$6x_2$	$\leq$	35	
6(2)	+	$5x_2$	$\geq$	36	
1(2)			$\leq$	3	(partição)
		x_2	$\geq$	5	(partição)
1(2)			$\leq$	2	(partição)

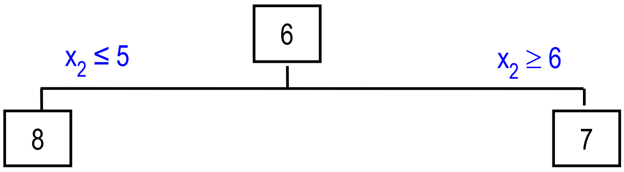
Obtém-se para x_2:

$x_2 \leq 25/4$	$x_2 = 28/5$
$x_2 \geq 28/5$	
$x_2 \geq 5$	

Valor da função com $x_1 = 2$ e $x_2 = 28/5$: $f(X) = 2x_1 + 3x_2 = 20.8 <$ Limite Superior Corrente

A solução do sub problema 6 não é admissível pois x_2 tem valor fraccionário.

Procede-se à Partição do domínio da variável x_2:



<u>Sub problema 7</u>:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,\,2\,]$; $x_2 \in [\,6\,,\,+\infty\,[$

Fixar $x_2 = 6$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_2 pelo valor corrente:

$5x_1$	+	4(6)	$\le$	35	
$4x_1$	+	5(6)	$\ge$	36	
x_1			$\le$	3	(partição)
		1(6)	$\ge$	5	(partição)
x_1			$\le$	2	(partição)
		1(6)	$\ge$	6	(partição)

Obtém-se para x_1:

$x_1 \le 11/5$	$x_1 = 3/2$
$x_1 \ge 3/2$	
$x_1 \le 3$	
$x_1 \le 2$	

Valor da função com $x_1 = 3/2$ e $x_2 = 6$: $f(X) = 2x_1 + 3x_2 = 21$

<u>Sub problema 8</u>:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,\,2\,]$; $x_2 \in [\,5\,,\,5\,]$

Fixar $x_2 = 5$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_2 pelo valor corrente:

$5x_1$	+	4(5)	$\le$	35	
$4x_1$	+	5(5)	$\ge$	36	
x_1			$\le$	3	(partição)
		1(5)	$\ge$	5	(partição)
x_1			$\le$	2	(partição)
		1(5)	$\le$	5	(partição)

Obtém-se para x_1:

$x_1 \leq 3$	Sem solução
$x_1 \geq 11/4$	
$x_1 \leq 3$	
$x_1 \leq 2$	

A solução do sub problema 7 não é admissível pois x_1 tem valor fraccionário.

O valor da função objectivo neste sub problema é f(X) = 21.

Se efectuarmos a Partição do domínio da variável x_1 neste sub problema qualquer dos sub problemas resultantes não terá f(X) < 21 pelo que este valor é o mínimo da função objectivo proposta (a solução admissível do sub problema 5 é óptima).

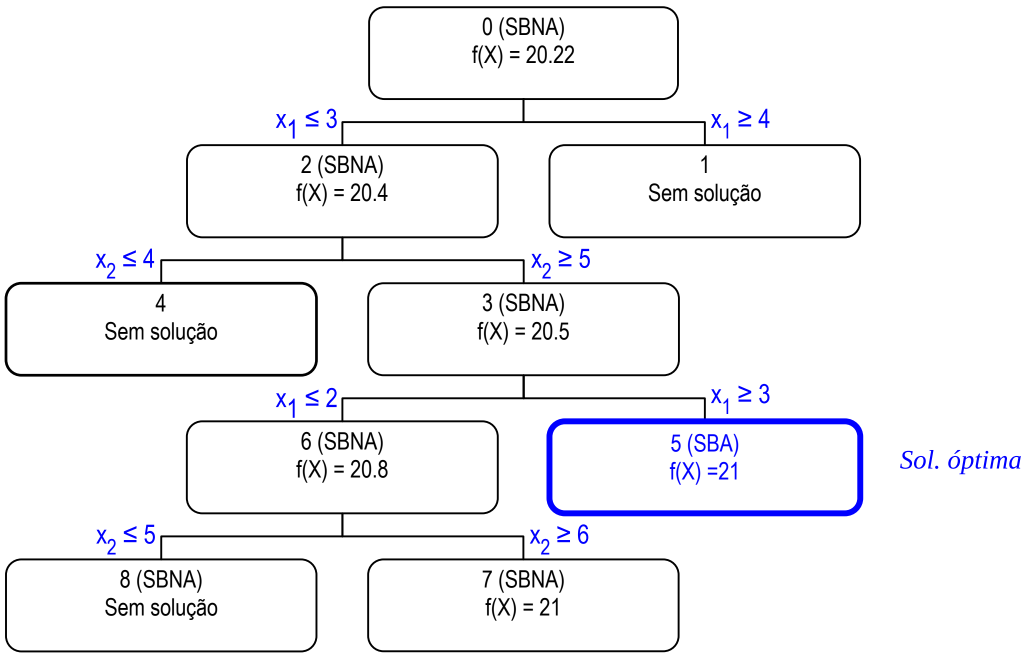
Concluindo a solução óptima é:

$x_1 = 3$

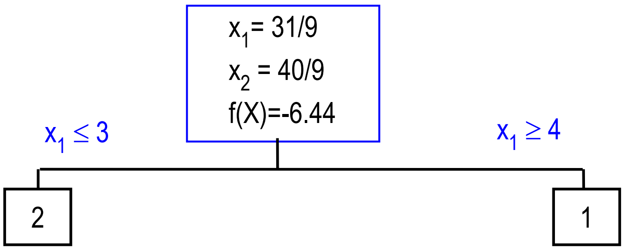
$x_2 = 5$

Min f(X) = 21

Árvore associada ao cálculo efectuado



9. A solução do problema relaxado não é admissível. Escolhendo a Partição do domínio da variável x_1 temos:



<u>Sub problema 1</u>:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,4 \,,\, +\infty\,[$; $x_2 \in [\,0 \,,\, +\infty\,[$

Fixar $x_1 = 4$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

5(4)	+	$4x_2$	$\leq$	35	
4(4)	+	$5x_2$	$\geq$	36	
1(4)			$\leq$	4	(partição)

Obtém-se para x_2:

Obtém-se para x_2:

$x_2 \leq 15/4$	Sem solução
$x_2 \geq 4$	

<u>Sub problema 2</u>:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0 \,,\, 3\,]$; $x_2 \in [\,0 \,,\, +\infty\,[$

Fixar $x_1 = 3$.

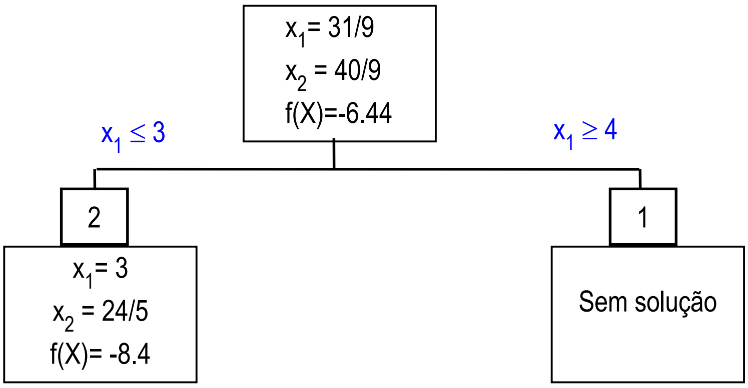
Nas restrições técnicas substitui-se x_1 pelo valor corrente:

5(3)	+	$4x_2$	$\leq$	35	
4(3)	+	$5x_2$	$\geq$	36	
1(3)			$\leq$	3	(partição)

Obtém-se para x_2:

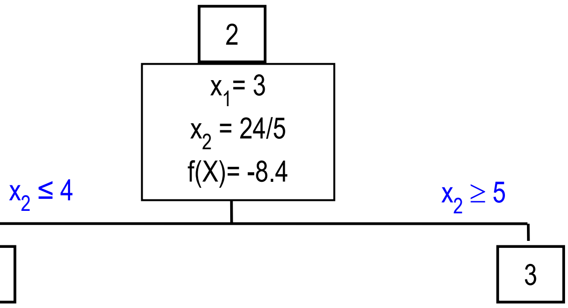
$x_2 \leq 5$	$x_2 = 24/5$
$x_2 \geq 24/5$	

Valor da função com $x_1 = 3$ e $x_2 = 24/5$: $f(X) = 2x_1 + 3x_2 = -8.4$



A solução do sub problema 2 não é admissível pois x_2 tem valor fraccionário.

Procede-se à Partição do domínio da variável x_2:



Sub problema 3:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,3\,]$; $x_2 \in [\,5\,,+\infty\,[$

Fixar x_2 = 5.

Nas restrições técnicas substitui-se x_2 pelo valor corrente:

$$\begin{array}{lcccll} 5x_1 & + & 4(5) & \leq & 35 & \\ 4x_1 & + & 5(5) & \geq & 36 & \\ x_1 & & & \leq & 3 & \text{(partição)} \\ & & 1(5) & \geq & 5 & \text{(partição)} \end{array}$$

Obtém-se para x_1:		
	$x_1 \leq 3$	$x_1 = 3$
	$x_1 \geq 11/4$	
	$x_1 \leq 3$	

Valor da função com x_1 = 3 e x_2 = 5 : f(X) = $6x_1 + 4x_2$ = -9

Este sub problema tem solução admissível com f(X) = -9 que passa a constituir Limite Inferior.

Sub problema 4:

Domínio das variáveis neste sub problema: $x_1 \in [\,0\,,\,3\,]$; $x_2 \in [\,0\,,\,4\,]$

Fixar $x_2 = 4$.

Nas restrições técnicas substitui-se x_2 pelo valor corrente:

$$\begin{array}{llllll} 5x_1 & + & 4(4) & \leq & 35 & \\ 4x_1 & + & 5(4) & \geq & 36 & \\ x_1 & & & \leq & 3 & \text{(partição)} \\ & & 1(4) & \leq & 4 & \text{(partição)} \end{array}$$

Obtém-se para x_1:

$x_1 \leq 19/5$	Sem solução
$x_1 \geq 4$	
$x_1 \leq 3$	

Não há mais sub problemas para analisar.

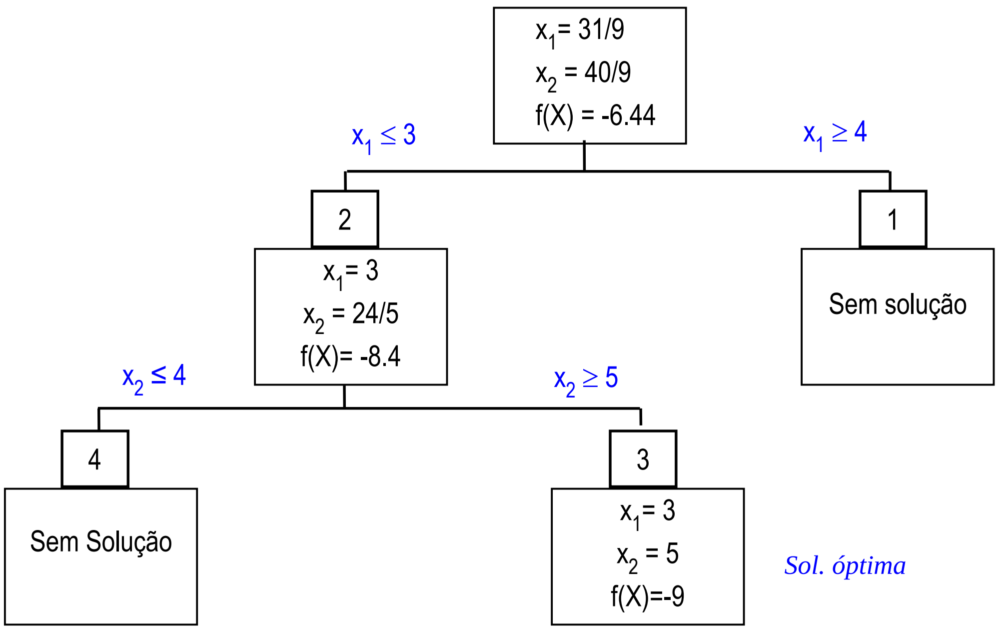
A solução óptima é a do sub problema 3:

$x_1 = 3$

$x_2 = 5$

$f(X) = -9$

A árvore resultante do cálculo efectuado é a seguinte:



10. O modelo de PL para a produção diária é o seguinte:

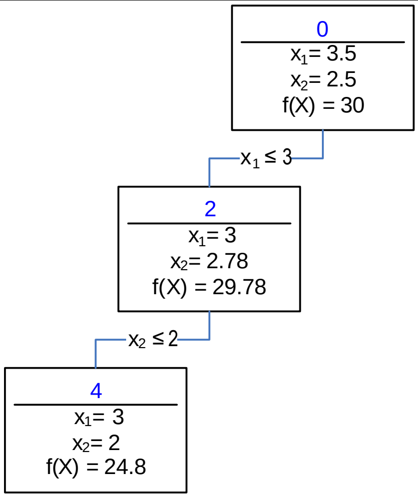
Max $f(X) = 4x_1 + 6.4x_2$

s.a.

$$\begin{array}{lllll} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & + & 1.8x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \text{ e Inteiro} & & \end{array}$$

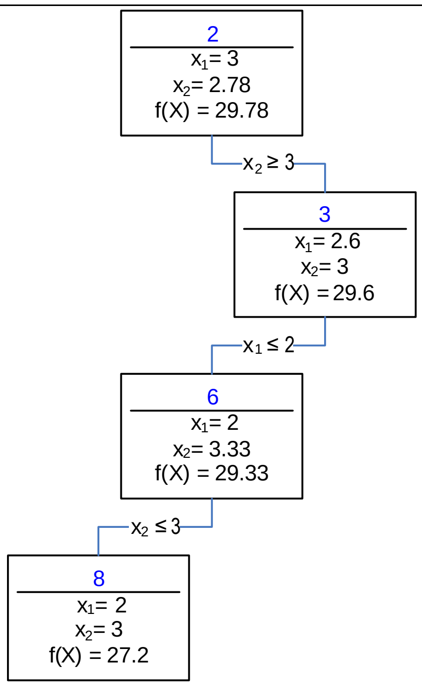
em que x_1 e x_2 representam o nível de produção diária de vasos dos tipos A e B respectivamente.

A análise "em profundidade" ("por ramos") e os resultados obtidos são os seguintes:



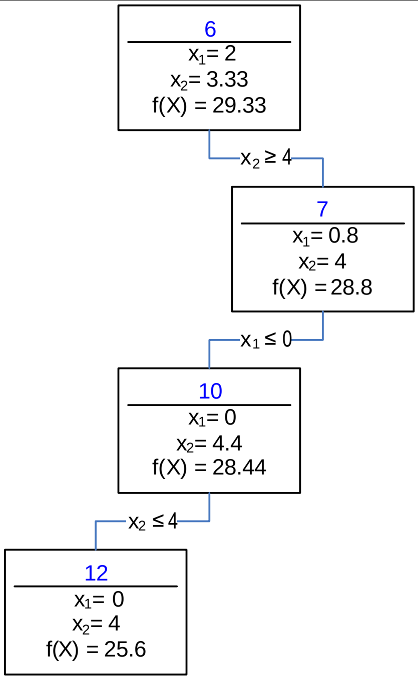
É encontrada solução admissível no nó 4 com f(X) = 24.8 (1º Limite Inferior).

"Sobe-se" na árvore para o nó 2 onde tem início nova descida.



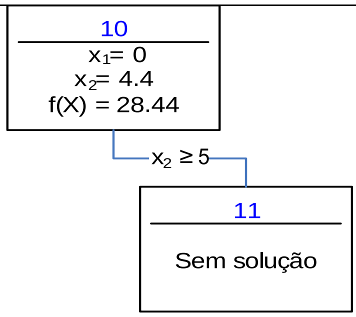
È encontrada solução admissível no nó 8 com f(X) = 27.2 que é o Novo Limite Inferior.

"Sobe-se" na árvore para o nó 6 onde tem início nova descida.



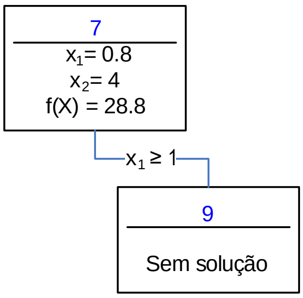
È encontrada solução admissível no nó 12 com $f(X) = 25.6$ < Limite Inferior corrente.

"Sobe-se" na árvore para o nó 10 onde tem início nova descida.



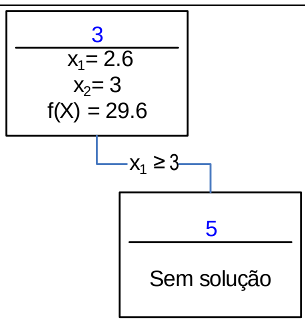
Não há solução no nó 11.

"Sobe-se" na árvore para o nó 7 onde tem início nova descida.



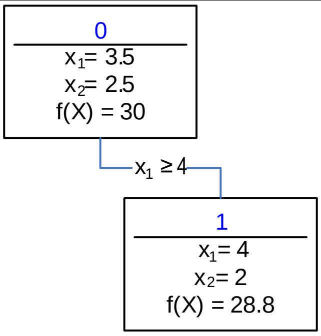
Não há solução no nó 9.

"Sobe-se" na árvore para o nó 3 onde tem início nova descida.



O sub problema 5 não tem solução

"Sobe-se" na árvore para o nó da raiz onde tem início nova descida.



O sub problema 1 tem solução admissível com f(X) = 28.8 > Limite Inferior corrente.

Passa a ser novo Limite Inferior.

Não há mais nós para Partição.

A solução do sub problema 1 é Óptima.

A solução óptima é a do sub problema 1:

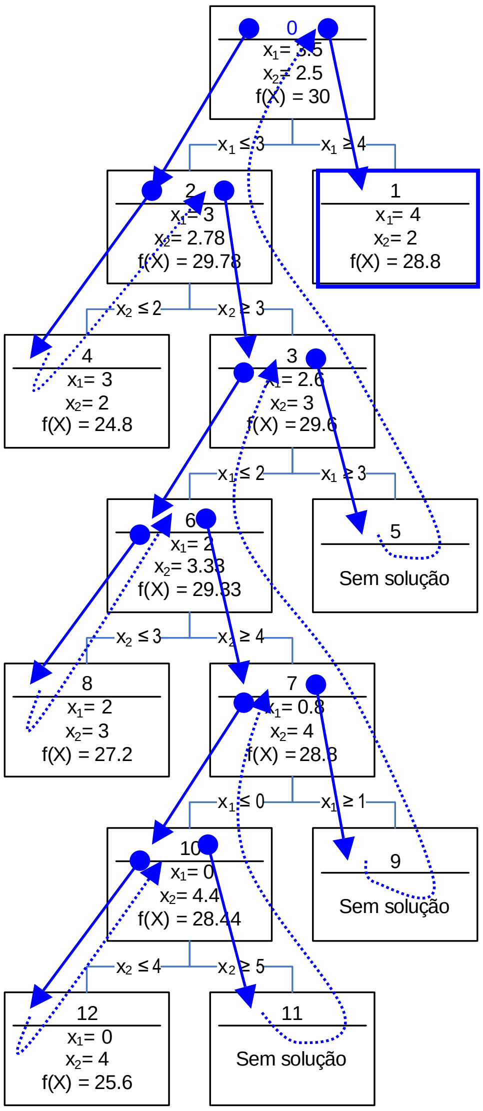
$x_1 = 4$

$x_2 = 2$

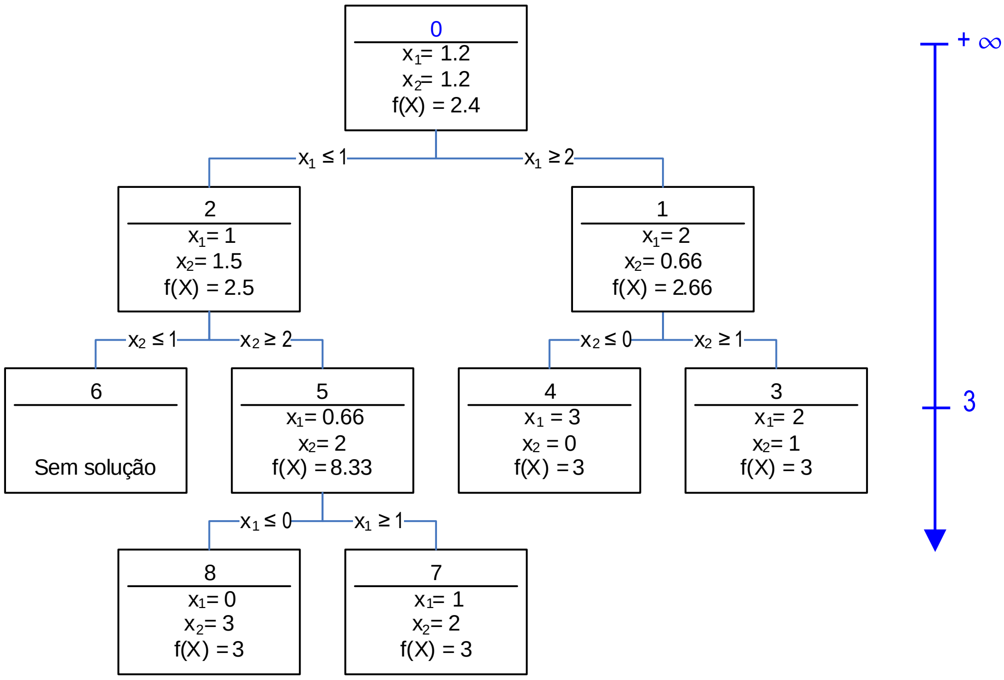
Max f(X) = 28.8

Plano óptimo de produção: 4 vasos do tipo "A" e 2 vasos do tipo "B" ; Lucro total máximo de 28.8 u.m.

Na figura seguinte está assinalada a exploração sequencial dos ramos da arborescência:



11. Minimização da função objectivo:

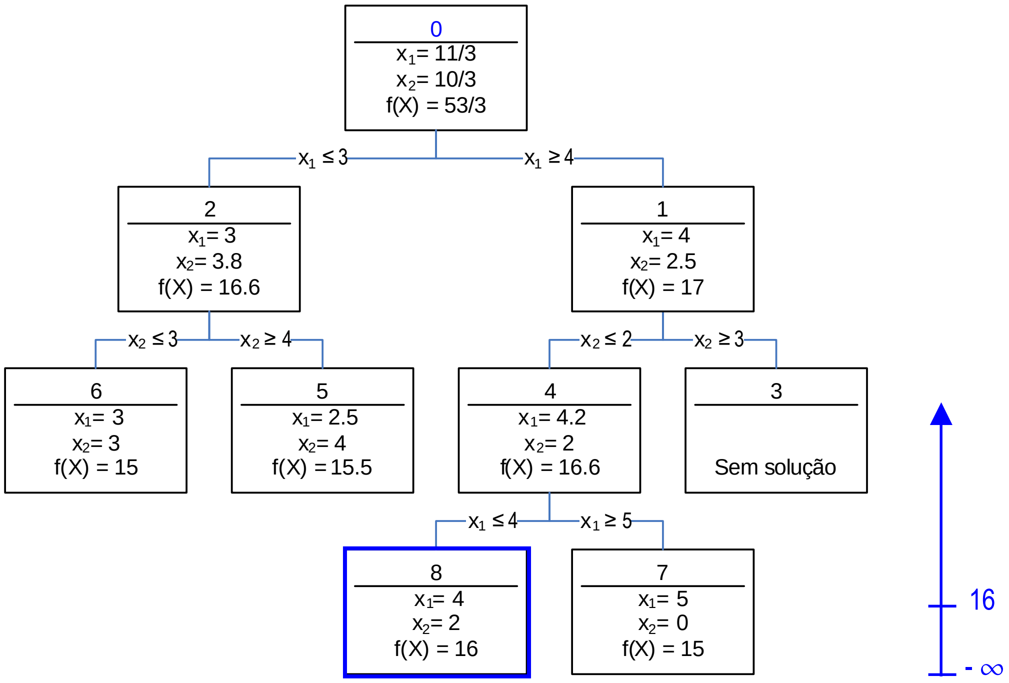


Solução Óptima (múltipla)

$$X_1^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; X_2^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}; X_3^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; X_4^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$f(X^*) = f(X_1^*) = f(X_2^*) = f(X_3^*) = f(X_4^*) = 3 \Rightarrow Min$$

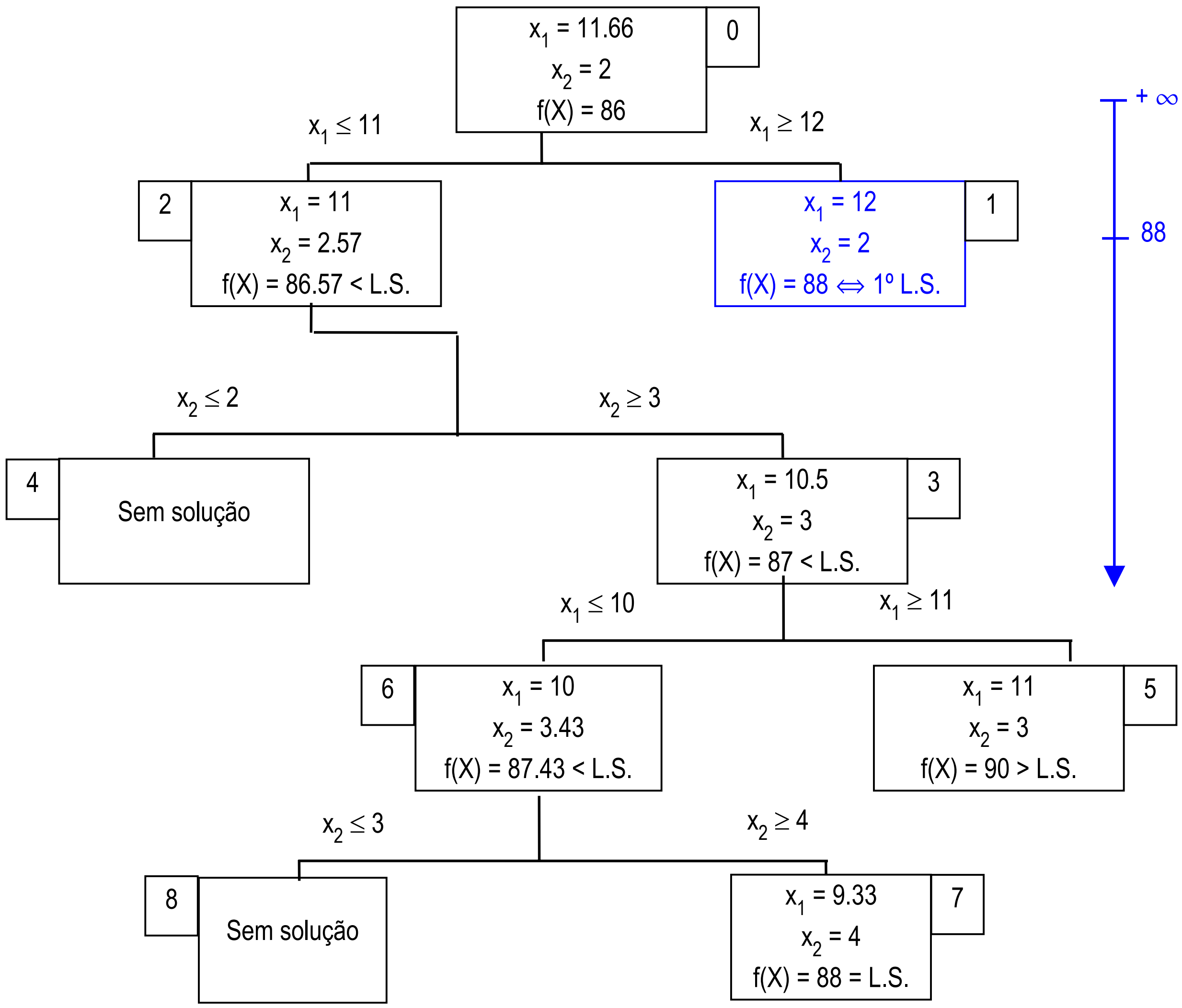
12. Maximização da função objectivo:



Plano óptimo de produção: 4 componentes "A" e 2 componentes "B" ; Lucro total máximo de 16 u.m.

Nota: Da partição no nó 4 obteve-se no nó 6 uma solução admissível com f(X) =16 (novo limite inferior) que limita a partição no nó 5 onde f(X) = 15.5 é menor do que 16.

13. Minimização da função objectivo:



Nó	Domínio de x_1	Domínio de x_2	Valor da função	Decisão
0	[0 , + ∞ [	[0 , + ∞ [		
1	[12 , + ∞ [	[0 , + ∞ [	88 (LS)	Parar
2	[0 , 11]	[0 , + ∞ [	86.57	Partição de x_2
3	[0 , 11]	[3 , + ∞ [	87	Partição de x_1
4	[0 , 11]	[0 , 2]		Parar
5	[11]	[3 , + ∞ [	87.43	Partição de x_2
6	[0 , 10]	[3 , + ∞ [	90	Parar
7	[0 , 10]	[4 , + ∞ [	88	Parar
8	[0 , 10]	[3]		Parar

Solução Óptima (nó 1)

$x_1 = 12$; $x_2 = 2$; Min $f(X) = 88$

Na figura seguinte (geometria do modelo) pode visualizar-se a progressão do cálculo efectuado: