INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

Exercícios

Cap. VII – Interpretação económica do modelo de PL

António Carlos Morais da Silva

Professor de I.O.

VII. Interpretação económica do modelo de PL

Utilize o software do autor para obter a solução óptima em algumas das questões propostas.

1. Uma empresa utiliza o seguinte modelo linear para optimizar o lucro (€) da produção dos bens A, B e C utilizando 110, 150 e 200 horas de trabalho de 3 máquinas (M1, M2 e M3):

   $\text{Max } f(X) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$

   s.a.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 110 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 150 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 200 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

   As variáveis x_1 , x_2 e x_3 representam o nível de produção (em litros) de A, B e C respectivamente.

   O valor do lucro óptimo é de 156€ (são produzidas 46 litros de "A" e 6 litros de "B").

   a. Calcule o contributo óptimo, para a formação do lucro, de uma hora de cada uma das máquinas utilizadas.

   b. Que designação se dá, na programação matemática, aos valores indicados na alínea anterior?

   c. Os valores calculados na primeira alínea serão válidos se operar apenas com 80 horas de M1? Justifique a resposta.

   d. Exponha as consequências na produção óptima se resolver produzir o bem "C". Apresente o cálculo em que baseia a resposta.

2. No modelo de uma nova linha de produção :

   $\text{Max } f(X) = 9x_1 + 8x_2 + 5x_3$

   s.a.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & \leq & 11 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

   - x_1, x_2, x_3 representam a produção mensal de 3 novos tipos de aglomerado (A1, A2, A3) vendidos com margens de lucro unitário de 9, 8, 5 u.m. respectivamente.
   - a 1ª restrição materializa o limite de venda no mercado
   - a 2ª restrição limita a capacidade produtiva (11 unidades)

   a. Visando a competitividade do aglomerado do tipo A_1 qual a margem mínima de lucro a considerar, mantendo a estrutura do plano óptimo de produção (aglomerados A_1 e A_3) ? Justifique a resposta.

   b. Actuando apenas na margem de lucro, que modificação é necessário introduzir para que o plano óptimo de produção inclua o aglomerado do tipo A_2 sem alterar o lucro total (19 u.m.) do plano óptimo corrente?

   c. De quanto é possível aumentar o lucro total à custa do aumento da capacidade produtiva, sem alterar a estrutura da base óptima corrente ?

3. Numa exploração de suinicultura, estuda-se a alimentação diária de um animal com base nos dados seguintes:

a.

1 kg de grão fornece ao animal :	20 g do nutriente A 40 g do nutriente B 20 g do nutriente C
1 kg de farinha fornece ao animal :	40 g do nutriente A 20 g do nutriente C

Custos	1 kg de grão :	10 u.m.
	1 kg de farinha :	5 u.m.

Diariamente, o animal necessita de, pelo menos, 200 g do nutriente "A", 160 g do nutriente "B" e 210 g do nutriente "C".

O modelo de PL para optimizar o custo da alimentação diária, é o seguinte:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Min } f(X) = & 10x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{s.a.} & 20x_1 & + & 40x_2 & \geq & 200 \\ & 40x_1 & & & \geq & 160 \\ & 20x_1 & + & 20x_2 & \geq & 210 \end{array}$$

em que a f(X) minimiza o custo da ração diária e as variáveis decisionais significam :

- x_1 : quantidade (kg) de grão a considerar na ração diária
- x_2 : quantidade (kg) de farinha a considerar na ração diária

A solução óptima é a seguinte : $x_1 = 4$ kg ; $x_2 = 6.5$ kg ; Min f(X) = 72.5 u.m., ou seja, a dieta do animal será constituída por 4 kg de grão e 6.5 kg de farinha com o custo de 72.5 u.m./dia.

Pretende-se efectuar um estudo sumário dos resultados obtidos, recorrendo exclusivamente ás relações Primal-Dual e à versão matricial do Simplex.

b. Qual ou quais dos nutrientes mais encarece, internamente, a ração diária?

c. Se pretender que a dieta passe a ser mais rica em nutriente B, de quanto pode aumentar, no máximo, a quantidade deste sem alterar a estrutura corrente da base óptima ?

d. Uma empresa de cereais recomenda o uso de Soja para este tipo de ração oferecendo as seguintes condições:

- Custo de 1 kg : 8 u.m.
- 1 kg de Soja fornece ao animal: 25 g de A ; 20 g de B ; 40 g de C.

Verifique se, utilizando Soja, é possível reduzir o actual custo óptimo da ração (72.5 u.m. por dia).

4. Uma empresa produz 4 tipos de bens (A, B, C, D) que coloca no mercado com lucro de 5, 7, 4 e 8 u.m. respectivamente. A produção envolve Aquecimento, Centrifugação e Filtragem.

Para o próximo mês, a disponibilidade de tempo para a produção é a seguinte:

Actividade	Horas disponíveis
Aquecimento	300
Centrifugação	400
Filtragem	200

Os tempos (horas) associados à produção de cada um dos tipos de bens são os seguintes:

Tipo	Aquecimento	Centrifugação	Filtragem
A	1	5	3
B	3	2	5
C	5	4	4
D	4	2	2

Admita que os custos por hora (u.m.) são os seguintes:

Aquecimento	Centrifugação	Filtragem
10	8	5

Da solução óptima do modelo de PL associado à situação exposta, sabe-se que:

- são produzidas 20 unidades do bem "A" e 70 do bem "D".
- há um excesso 160 horas para Centrifugação.

a. Calcule os preços unitários de venda para A, B, C e D.

b. Considere que o custo do Aquecimento passa a ser de 11 u.m./hora.

Admitindo que pretende manter os Preços de Venda calculados e a base óptima corrente, indique a alteração que é necessário fazer nos lucros unitários de venda dos produtos.

5. Uma empresa tem 3 fábricas (F1, F2, F3) onde produz os bens "A" e/ou "B" que vende com lucro unitário de 3 e 5 u.m., respectivamente.

A disponibilidade de matéria-prima e os consumos unitários na produção em cada uma das fábricas são os seguintes:

	Fábricas		Matéria-prima disponível (unidades)
	A	B	
F_1	1		4
F_2		2	12
F_3	3	2	18

O modelo de PL para optimizar a produção, é o seguinte:

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{Max } f(X) = & 3x_{1A} & + & 5x_{2B} & + & 3x_{3A} & + & 5x_{3B} & & \\
\text{s.a.} & x_{1A} & & & & & & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_{2B} & & & & & \leq & 12 \\
 & & & & & 3x_{3A} & + & 2x_{3B} & \leq & 18
\end{array}$$

em que a função objectivo maximiza o lucro da venda e as variáveis decisionais significam :

- x_{1A} : nível da produção do bem "A em F1
- x_{2B} : nível da produção do bem "B" em F2
- x_{3A} : nível da produção do bem "A" em F3
- x_{3B} : nível da produção do bem "B" em F3

O quadro óptimo da produção é o seguinte:

VB	x_{1A}	x_{2B}	x_{3A}	x_{3B}	F_1	F_2	F_3	VSM
x_{1A}	1	0	0	0	1	0	0	4
x_{2B}	0	1	0	0	0	1/2	0	6
x_{3B}	0	0	3/2	1	0	0	1/2	9
f(X)	0	0	9/2	0	3	5/2	5/2	87

a. A fábrica F3 não produz o bem "A". Será por escassez de matéria-prima ? Justifique.

b. Do ponto de vista interno, em qual das fábricas é de maior interesse produzir "B" ? Justifique.

c. Admita uma variação marginal na disponibilidade de matéria-prima em F1 . Qual é o impacto nos valores da função e das variáveis básicas ? Justifique algebricamente a resposta.

d. Mantendo o valor óptimo do lucro total (87 u.m.), qual deve ser, no mínimo, o lucro unitário da venda de "A" para rentabilizar a sua produção em F3 ? Justifique algebricamente.

6. Uma empresa usa o seguinte modelo linear para optimizar o lucro (€) da produção dos bens A e B utilizando 20 kg e 25 kg das matérias-primas MP1 e MP2 respectivamente.

Max $f(X) = 3x_1 + 4x_2$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 20 \\
3x_1 & + & x_2 & \leq & 25 \\
 & & x_1 , x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

As variáveis x_1 e x_2 representam o nível de produção (em litros) de A e B respectivamente.

O valor do lucro óptimo é de 46 € (são produzidas 6 litros de "A" e 7 litros de "B").

Considere "k_1" e "k_2" os custos unitários de MP1 e MP2 respectivamente e "v_1" e "v_2" os preços unitários de venda de "A" e "B".

a. Apresente as expressões de cálculo de “v_1” e “v_2” em ordem a “$k_!$” e “k_2”.

b. Apresente a expressão geral da receita total da venda em ordem a “k_1” e “k_2”.

c. Admita a redução de 0.1 €/kg no custo de aquisição dos 25 kg de MP2 e a seguinte decisão:

- Incorporar no lucro total o desconto de 2.5 €
- Manter as margens correntes de lucro
- Reflectir nos preços de venda o desconto na aquisição de MP2

Calcule a quantidade adicional de MP2 que deve ser adquirida nestas condições.

d. Para a quantidade de MP2 calculada na alínea anterior, apresente a expressão geral da receita total da venda em ordem a “k_1” e “k_2”.

e. Considere:

- k_1 = 5 €/kg
- k_2 = 10 €/kg
- v_1 = 38 €/litro
- v_2 = 24 €/litro

Para os dois modelos anteriores (com 25 kg e 31.25 kg de MP2, respectivamente) e suas soluções óptimas apresente um relatório comparativo onde constem:

e.1. Custo dos recursos por litro produzido de “A” e “B”, Preço e Lucro unitários de venda.

e.2. Custo total de aquisição das matérias-primas, Receita e Lucro totais da venda.

7. Uma empresa produz os bens A, B, C e D.

Entre outras, participam na produção as secções de Acabamento, Montagem e Corte.

Prevê-se que estas secções tenham disponíveis para o plano de produção, respectivamente 480 horas, 800 horas e 1000 horas.

O tempo (horas) utilizado por cada secção para os trabalhos de uma unidade de cada tipo é o seguinte:

	Tipo			
Secção	A	B	C	D
Acabamento	2	8	4	2
Montagem	5	4	8	5
Corte	7	8	3	5

O lucro unitário da venda é de 90, 160, 40 e 100 u.m. para os bens “A”, “B”, “C” e “D”respectivamente.

O modelo de PL desenvolvido para optimizar a produção, maximizando o lucro da venda, é o seguinte:

Max $f(X) = 90x_1 + 160x_2 + 40x_3 + 100x_4$

s.a.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 480 \\
5x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 5x_4 & \leq & 800 \\
7x_1 & + & 8x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & \leq & 1000 \\
 & & & & & & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 & \geq & 0 \text{ e Inteiro}
\end{array}
$$

(x_1, x_2, x_3 , x_4 representam o nível da produção de A, B, C e D expresso em unidades)

a. Admita a possibilidade de obter uma redução de 1.5 €/h nas 480 horas de Acabamento e que se pretende:

- Incorporar no lucro total a redução associada às 480 horas
- Manter as margens correntes de lucro
- Reflectir nos preços de venda a redução referida

Nestas condições quantas horas cativa para o Acabamento? Qual é o novo plano óptimo de produção?

b. São necessários cenários de rentabilização da produção do bem “A” harmonizando o tempo unitário de produção em todas as secções.

Apresente o conjunto de condições a observar que permitem rentabilizar a produção do bem “A” com a base óptima corrente e sem alterar os lucros unitários de venda e efectue um teste das mesmas.

8. Uma empresa utiliza 3 máquinas no fabrico de 3 produtos (A, B e C).

O tempo de operação em cada máquina para produzir uma unidade de cada um dos bens referidos e as disponibilidades de tempo para planeamento são as seguintes:

	M1 (h)	M2 (h)	M3(h)
A	3	2	1
B	4	1	3
C	2	2	2
Disponível (h)	90	54	93

A margem de lucro unitário é de 30 , 40 e 35 u.m. para A, B e C, respectivamente.

O modelo de PL desenvolvido é o seguinte:

Max $f(X) = 30x_1 + 40x_2 + 35x_3$

s.a.

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 90 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 54 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 93 \\
 & & & & x_1 , x_2 , x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Sendo x_1, x_2 e x_3 os níveis de produção de A, B e C, o quadro óptimo da produção é o seguinte:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
x_2	1/3	1	0	1/3	-1/3	0	12
x_3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0	21
F_3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1	15
f(X)	25/2	0	0	15/2	10	0	1215

a. Qual é o valor marginal de 1 hora em M1? Que limites de validade impõe?

b. Se alterar a disponibilidade de tempo nas máquinas para 100, 50 e 88 horas, a base óptima corrente mantém-se?

c. Qual é o valor do custo de oportunidade associado ao bem “A”? Como interpretá-lo?

d. Se a margem de lucro de venda do bem “A” for alterada para 43 u.m. mantém-se a base óptima corrente?

e. Estude o cenário de produção de outro bem cuja produção unitária carece de 4 horas em M1, 2 horas em M2 , 3 horas em M3 e se planeia vender com margem de lucro de 55 u.m.

9. Uma fábrica de têxteis produz 3 tipos de tecido (Tramas Ligeira, Normal e Densa, respectivamente).

O modelo de PL para estudo da produção optimizada é o seguinte:

Max $f(X) = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

s.a.

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$ (toneladas de algodão)

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$ (relação de mercado)

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$ (níveis de produção em milhares de metros)

Os lucros de venda para <u>1000 m de cada tecido</u> foram obtidos do seguinte modo:

	Trama Ligeira	Trama Normal	Trama Densa
Algodão necessário para 1000 m	1 ton.	2 ton.	1 ton.
Custo de 1 ton. algodão	5 u.m.		

Custo de algodão para 1000 m	5 u.m.	10 u.m.	5 u.m.
Outros custos para 1000 m	10 u.m.	12 u.m.	9 u.m.
Custo Total para 1000 m	15 u.m.	22 u.m.	14 u.m.

Preço de Venda de 1000 m	20 u.m.	34 u.m.	18 u.m.

Lucro por 1000 m	5 u.m.	12 u.m.	4 u.m.

O quadro óptimo (método Simplex) do modelo de PL é o seguinte:

	x_1	x_2	x_3	F_1	A_2	VSM
x_1	1	0	$^7/_5$	$^1/_5$	$^2/_5$	$^9/_5$
x_2	0	1	$^{-1}/_5$	$^2/_5$	$^{-1}/_5$	$^8/_5$
f(X)	0	0	$^3/_5$	$^{29}/_5$	$^{-2}/_5$	$^{141}/_5$

(F_1 e A_2 são variáveis auxiliares das 1ª e 2ª restrições técnicas, respectivamente)

A produção óptima é:

- $x_1 = {}^9/_5$ milhares de metros = 1800 m de tecido de trama ligeira ;
- $x_2 = {}^8/_5$ milhares de metros = 1600 m de tecido de trama normal ;

a que está associado o lucro máximo de $^{141}/_5 = 28.2$ u.m.

a. Se pretender rentabilizar a produção de tecido de Trama densa de quanto é necessário reduzir, no mínimo, o consumo de Algodão necessário à produção de 1000 m?

b. Admita a possibilidade de adquirir Algodão com custo de 3.84 u.m./ton. e que pretende:
   - Incorporar no lucro total a redução associada a 5 toneladas
   - Manter as margens correntes de lucro
   - Reflectir nos preços de venda dos tecidos a redução referida

   Nestas condições quantas toneladas de Algodão adquire? Quais os novos preços de venda?

10. Uma empresa para optimizar a produção dos bens A, B e C em quantidades x_1 , x_2 , e x_3 utiliza o seguinte modelo de PL:

	x_1	x_2	x_3		
f(X)=	2	3	2		
Restrição 1	1	3	2	$\leq$	32
Restrição 2	3	1	3	$\leq$	40
Restrição 3	1	1	1	$\geq$	12

O objectivo é maximizar o lucro da venda (u.m.), estando a produção condicionada às disponibilidades de matéria-prima MP1 e MP2 (32 e 40 ton respectivamente) e à necessidade de a produção total ser , no mínimo, 12 unidades.

A produção óptima é de 11 toneladas do bem “A” e 7 toneladas do bem “B” com lucro máximo de 43 u.m.

a. Estude o cenário de rentabilização da produção do bem “C” alterando conjuntamente o lucro unitário e os consumos das matérias-primas MP1 e MP2 por forma a que estas alterações tenham, respectivamente, o valor de 20%, 50% e 30% da anti economia corrente associada à produção deste bem.

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

Soluções dos Exercícios

Cap. VII – Interpretação económica do modelo de PL

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O.

1. Modelo proposto:

Max f(X) = $3x_1 + 3x_2 + 2x_3$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 110 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 150 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 200 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

a. Usando o método Simplex obtém-se o quadro óptimo:

(Matriz inversa da base nas colunas amarelas) **Quadro Óptimo**

	x1	x2	x3	F1	F2	F3	VSM	
x2	0	1	6/5	3/5	-2/5	0	6	
x1	1	0	1/5	-2/5	3/5	0	46	
F3	0	0	-1/5	2/5	-8/5	1	4	
f(X)	0	0	11/5	3/5	3/5	0	156	Óptimo

O contributo de uma hora (de cada uma das máquinas) para a formação do lucro é igual ao valor da variável de decisão do problema Dual, associada à respectiva restrição técnica.

No quadro óptimo lê-se:

- y_1 = 3/5 euros por hora da máquina M1
- y_2 = 3/5 euros por hora da máquina M2
- y_3 = 0 euros por hora da máquina M3

Veja-se que o contributo total é de $110y_1 + 150y_2 + 200y_3 = 66 + 90 = 156$€ = Max f(X)

b. Preços-sombra ou Custos de Oportunidade.

c. É necessário verificar se a afectação de 80 horas na máquina M1 mantém a admissibilidade da base corrente em que as VB são x_1, x_2 e F_3. Para tal calcula-se a nova solução:

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} & 0 \\ \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-8}{5} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 80 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 58 \\ -8 \end{bmatrix}$$

A solução Primal não é admissível (x_2 = -12 ; F_3 = -8) pelo que a base corrente deixa de ser óptima e, consequentemente, os valores óptimos indicados para as variáveis de decisão do Dual deixam de ser válidos.

d. Se um bem não é produzido em optimalidade tal indicia a existência de anti economia. No quadro óptimo o coeficiente, em f(X), da variável x_3 (nível da produção de "C") é 11/5 expresso em "euros por litro de C".

Para estudar o impacto na produção de um litro de “C” estuda-se a solução corrente em ordem à variável x_3:

$x_2 = 6 - 6/5x_3$

$x_1 = 46 - 1/5x_3$

Produzindo 1 litro de “C” ($x_3 = 1$) as consequências são as seguintes:

- Redução da produção de “B” em 6/5 = 1.2 litros
- Redução da produção de “A” em 1/5 = 0.2 litros

Impacto no lucro: redução em 2.2 € = + 2 - 3.6 - 0.6 resultante de:

- + 2 € (produção de 1 litro de “C”)
- -1.2(3) = -3.6 € (redução da produção de “B”)
- -0.2(3) = -0. 6 € (redução da produção de “A”)

O valor desta redução é evidente lendo a equação de f(X) em ordem à variável x_3:

$f(X) = 156 - 11/5\, x_3$

A produção de um litro de “C” ($x_3 = 1$) degrada o valor de f(X) em 11/5 = 2.2€ (quantificador da anti economia unitária de “C”).

2.

a. É necessário calcular a sensibilidade do modelo à variação do coeficiente de x_1, em f(X).

Considerando tal coeficiente igual a “c_1” a base óptima mantém-se se e só se:

(Matriz inversa da base nas colunas amarelas) **Quadro Óptimo**

		c_1	8	5				
		x1	x2	x3	F1	F2	VSM	
c_1	x1	1	5	0	3	-1	1	
5	x3	0	-7	1	-5	2	2	
	f(X)	0	2	0	2	1	19	Óptimo
			$5c_1 - 35 - 8$		$3c_1 - 25$	$-c_1 - 10$		

$$\begin{cases} 5c_1 - 35 - 8 \geq 0 \\ 3c_1 - 25 \geq 0 \\ -c_1 + 10 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} c_1 \geq \frac{43}{5} \\ c_1 \geq \frac{25}{3} \\ c_1 \leq 10 \end{cases}$$

Conclusão : $43/5 \leq c_1 \leq 10$

Margem mínima de lucro unitário = 43/5 = 8.6 u.m.

b. A anti economia associada à produção de uma unidade de A_2 é de 2 u.m. (coeficiente, em f(X), da variável x_2) pelo que para rentabilizar a sua produção é necessário que o lucro unitário aumente 2 u.m. , passando a ser 10 u.m. = lucro corrente + anti economia.

c. É necessário calcular a sensibilidade do modelo à variação de b_2:

$$A_m^{-1}B \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ b_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{cases} 12 - b_2 \geq 0 \\ -20 + 2b_2 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} b_2 \leq 12 \\ b_2 \geq 10 \end{cases}$$

A base óptima corrente mantém-se admissível se a capacidade produtiva aumentar 1 unidade ficando em 12 unidades.

3.

a. Comecemos por calcular os preços-sombra de cada um dos nutrientes.

As VB do quadro óptimo são x_1, x_2 e E_1 (veja que há excesso na 1ª restrição técnica).

Atendendo a que o problema Dual tem 3 variáveis de Decisão (y_1, y_2, y_3) e 2 restrições técnicas (tipo "≤") a que são associadas 2 variáveis de Folga (y_4 e y_5), as relações de complementaridade Primal-Dual são as seguintes:

$x_1.y_4 = 0$	$y_4 = 0$
$x_2.y_5 = 0$	$y_5 = 0$
$E_1.y_1 = 0$	$y_1 = 0$
$E_2.y_2 = 0$	$y_2 = ?$
$E_3.y_3 = 0$	$y_3 = ?$

Resolvendo o sistema de equações técnicas do problema Dual obtêm-se os valores óptimos das restantes variáveis Duais:

$y_2 = 1/8 = 0.125$; $y_3 = 1/4 = 0.25$

Do ponto de vista interno, o nutriente mais caro é o nutriente C (preço sombra = 0.25 u.m. por grama)

b. É necessário calcular a sensibilidade do modelo à variação de b_2 o que exige conhecer a matriz inversa da base:

$$A_m = \begin{bmatrix} 20 & 40 & -1 \\ 40 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_m^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/40 & 0 \\ 0 & -1/40 & 1/20 \\ -1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_m^{-1}B \geq 0 \Rightarrow A_m^{-1}\begin{bmatrix} 200 \\ b_2 \\ 210 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{cases} 1/40(b_2) \geq 0 \\ -1/40(b_2) + 210/20 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} b_2 \geq 0 \\ b_2 \leq 420 \end{cases}$$

A estrutura da base óptima corrente não se altera se a quantidade máxima de nutriente “B” for 420 gramas pelo que o aumento máximo é de 420 - 160 = 260 gramas.

c. O modelo de PL, modificado com a introdução de x_3 quilos de Soja, é o seguinte:

$$\begin{array}{rlllllll}
\text{Min } f(X) = & 10x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & & \\
\text{s.a.} & 20x_1 & + & 40x_2 & + & 25x_3 & \geq & 200 \\
& 40x_1 & & & + & 20x_3 & \geq & 160 \\
& 20x_1 & + & 20x_2 & + & 40x_3 & \geq & 210
\end{array}$$

A base óptima corrente mantém-se se e só se a nova restrição Dual “$25y_1 + 20y_2 + 40y_3 \leq 8$” for satisfeita pela solução óptima corrente do problema Dual, já calculada: $y_1 = 0$; y_2 0.125 ; $y_3 = 0.25$.

Substituindo valores constata-se que a restrição é violada pelo que é necessário reoptimizar para obter outra solução óptima em que a Soja será usada na produção da ração.

O quadro óptimo corrente (equações técnicas) é o seguinte (use as matrizes já calculadas):

VB	x_1	x_2	E_1	E_2	E_3	A_1	A_2	A_3	VSM
x_1	1	0	0	- 1/ 40	0	0	1/ 40	0	4
x_2	0	1	0	1/ 40	- 1/ 20	0	- 1/ 40	1/ 20	13/ 2
E_1	0	0	1	1/ 2	-2	-1	- 1/ 2	2	140

O vector da Soja neste quadro é $A_m^{-1}P_3 = A_m^{-1}\begin{bmatrix}25\\20\\40\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\3/2\\45\end{bmatrix}$

O quadro aumentado com $A_m^{-1}P_3$ e com o coeficiente reduzido de x_3, em f(X), é o seguinte:

VB	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	E_3	A_1	A_2	A_3	VSM
x_1	1	0	1/2	0	- 1/ 40	0	0	1/ 40	0	4
x_2	0	1	3/2	0	1/ 40	- 1/ 20	0	- 1/ 40	1/ 20	13/ 2
E_1	0	0	45	1	1/ 2	-2	-1	- 1/ 2	2	140
f(X)	0	0	9/2	0	-1/8	-1/4	0	1/8	1/4	72.5

A solução não é óptima. Entra para a base a variável x_3 por troca com a variável E_1:

VB	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	E_3	A_1	A_2	A_3	VSM
x_3	0	0	1	1/45	1/90	-2/45	-1/45	-1/90	2/45	28/9
x_1	1	0	0	-1/90	-11/360	1/90	1/90	11/360	-1/45	22/9
x_2	0	1	0	-1/30	1/120	1/60	1/30	-1/120	-1/160	11/6
f(X)	0	0	0	-1/10	-7/4	-1/20	1/10	7/40	1/20	58.5

Da leitura do novo quadro-óptimo conclui-se:

- É possível reduzir o custo da dieta em 14 u.m./dia (72.5 - 58.5)
- A nova dieta é obtida com 22/9 kg de Grão, 11/6 kg de Farinha e 28/9 kg de Soja.

4.

a.

	Horas por unidade produzida		
Tipo	Aquecimento	Centrifugação	Filtragem
A	1	5	3
B	3	2	5
C	5	4	4
D	4	2	2

Tipo	Aquecimento (10 u.m./h)	Centrifugação (8 u.m./h)	Filtragem (5 u.m./h)	Total Custos (u.m./unidade)	Lucro unitário (u.m./unidade)	Preço de Venda (u.m./unidade)
A	10	40	15	65	5	70
B	30	16	25	71	7	78
C	50	32	20	102	4	106
D	40	16	10	66	8	74

b. Considerando x_1, x_2, x_3 e x_4 os níveis de produção de A, B, C e D respectivamente, temos:

Tipo	Aquecimento (horas)	Aumento de custo (u.m.)	Lucro unitário corrente (u.m.)	Novo Lucro unitário (u.m.)
A	1	+ 1	5	5 - 1 = 4
B	3	+ 3	7	7 - 3 = 4
C	5	+ 5	4	4 - 5 = -1
D	4	+ 4	8	8 - 4 = 4

Calculemos os preços-sombra correntes recorrendo ao modelo Dual:

Problema Primal	Problema Dual
Max $f(X) = 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4$ s.a. $x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 300$ $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 400$ $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 200$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	Min $g(Y) = 300y_1 + 400y_2 + 200y_3$ s.a. $y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 5$ $3y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 7$ $5y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 4$ $4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 8$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Sabendo que as VB da base óptima corrente são x_1 , x_4 e F_2 (não nulas) obtém-se nas relações de complementaridade Primal-Dual, o valor óptimo dos preços-sombra $y_1 = 1.4$; $y_2 = 0$; $y_3 = 1.2$.

Se o custo da hora de Aquecimento aumenta de 1 u.m. e são mantidos os preços de venda, então o respectivo preço sombra $y_1 = 1.4$ diminui de 1 u.m. passando ser de 0.4 u.m./hora.

A nova função objectivo é $f(X) = 4x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4$ sendo necessário verificar se atinge o máximo com a base corrente.

Para tal testam-se as restrições técnicas do Dual com o novo preço-sombra da hora de Aquecimento e com os novos lucros unitários:

Problema Dual (novos lucros)	Verificação	
Min $g(Y) = 300y_1 + 400y_2 + 200y_3$	$g(Y) = 300(0.4) + 400(0) + 200(1.2) = 360$	
$y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 4$	$(0.4) + 0 + 3(1.2) \geq 4 \Rightarrow 4 \geq 4$	Saturada (x_1 é VB)
$3y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 4$	$3(0.4) + 0 + 5(1.2) \geq 4 \Rightarrow 7.2 \geq 4$	Não saturada (x_2 é VNB)
$5y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq -1$	$5(0.4) + 0 + 4(1.2) \geq 4 \Rightarrow 6.8 \geq 3$	Não saturada (x_3 é VNB)
$4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 4$	$4(0.4) + 0 + 2(1.2) \geq 4 \Rightarrow 4 \geq 4$	Saturada (x_4 é VB)

Todas as restrições Duais são satisfeitas pelo que o novo lucro máximo (360 u.m.) é atingido com a base óptima corrente.

De facto, aplicando o método Simplex, obtém-se:

(Matriz inversa da base nas colunas amarelas)

	x1	x2	x3	x4	F1	F2	F3	VSM	
F1	1	3	5	4	1	0	0	300	
F2	5	2	4	2	0	1	0	400	
F3	3	5	4	2	0	0	1	200	
f(X)	-4	-4	1	-4	0	0	0	0	Maximizar
F1	0	4/3	11/3	10/3	1	0	-1/3	700/3	
F2	0	-19/3	-8/3	-4/3	0	1	-5/3	200/3	
x1	1	5/3	4/3	2/3	0	0	1/3	200/3	
f(X)	0	8/3	19/3	-4/3	0	0	4/3	800/3	
x4	0	2/5	11/10	1	3/10	0	-1/10	70	
F2	0	-29/5	-6/5	0	2/5	1	-9/5	160	
x1	1	7/5	3/5	0	-1/5	0	2/5	20	
f(X)	0	16/5	39/5	0	2/5	0	6/5	360	Óptimo

Notar o novo preço-sombra da hora de Aquecimento ($y_1 = 2/5 = 0.4 = 1.4 - 1.0$)

5.

a. O bem "A" não é produzido porque o seu custo de oportunidade (medida da anti economia) é de 4.5 u.m. por unidade produzida (a produção de 1 unidade diminui em 4.5 u.m. o valor óptimo do lucro).

b. Em ambas, pois a anti economia associada é nula nas fábricas F2 e F3.

c. No óptimo, os valores das VB em ordem a F_1 são:

VB	x_{1A}	x_{2B}	x_{3A}	x_{3B}	F_1	F_2	F_3	Solução em ordem a F_1
x_{1A}								$4 - F_1$
x_{2B}								6
x_{3B}								9
f								$87 – 3F_1$

Da restrição técnica $x_{1A}+ F_1 = 4$, temos $x_{1A} = 4 - F_1$ onde podemos simular, no 2º membro, a variação de matéria-prima actuando no valor de F_1.

$$\boxed{F_1 = 1}$$

A disponibilidade de matéria-prima passa de 4 para 3 unidades (redução), a produção de "A" na fábrica F1 é reduzida de 1 unidade ($x_1 = 3$) e o valor do lucro total é reduzido de 3 u.m. ficando f(X) = 84 u.m.

$$\boxed{F_1 = -1}$$

A disponibilidade de matéria-prima passa de 4 para 5 unidades (aumento), a produção de "A" na fábrica F1 é aumentada de 1 unidade ($x_1 = 5$) e o valor do lucro total é aumentado de 3 u.m. ficando f(X) = 90 u.m.

Resta saber, para a base óptima corrente, qual o intervalo de variação da matéria-prima na fábrica F1 em que são válidas estas conclusões.

Para tal analisa-se a sensibilidade do modelo à variação da matéria-prima na fábrica F1 recorrendo à equação $x_{1A} = 4 - F_1$, obtendo-se:

$$0 \leq b_1 \leq \text{ Ilimitado}$$

Os resultados apresentados são válidos para valores de matéria-prima (na 1ª restrição técnica) não negativos.

d. Sendo a anti economia de 9/2 u.m. por unidade de "A" produzida em F3 então o lucro unitário que rentabiliza a sua produção deve ser, no mínimo:

Lucro actual + Custo de oportunidade = 3 + 4.5 = 7.5 u.m. (solução óptima indeterminada).

6.

a.

Cálculo dos preços de venda de 1 litro (quadro 1):

	MP1 (kg)	MP2 (kg)	Custo MP1 (€)	Custo MP2 (€)	Total Custos (€)	Lucro (€)	Preço Venda (€/litro)
"A"	1	3	k_1	$3K_2$	$k_1 + 3k_2$	3	$v_1 = k_1 + 3k_2 + 3$
"B"	2	1	$2k_1$	k_2	$2k_1 + k_2$	4	$v_2 = 2k_1 + k_2 + 4$

b.

Plano óptimo de produção: 6 litros de "A" e 7 litros de "B" (quadro 2):

	Preço Venda (€/litro)	Produção (litros)	Receita total da venda (€)
"A"	$v_1 = k_1 + 3k_2 + 3$	6	$6(k_1 + 3k_2 + 3) = 6k_1 + 18k_2 + 18$
"B"	$v_2 = 2k_1 + k_2 + 4$	7	$7(2k_1 + k_2 + 4) = 14k_1 + 7k_2 + 28$

Expressão geral da receita total da venda (€) = $20k_1 + 25k_2 + 46$

Custos de aquisição = $20k_1 + 25k_2$

Lucro = 46€

c. A manutenção das margens de lucro garante a manutenção dos preços-sombra das matérias-primas.

O desconto total para 25kg é de 2.5€ pelo que o novo lucro total óptimo será de 46 + 2.5 = 48.5€.

Usando as relações de complementaridade Prima-Dual obtêm-se os valores óptimos dos preços-sombra:

$$y_1 = 1.8 \; ; \; y_2 = 0.4$$

Recorrendo à função objectivo do problema Dual calcula-se a quantidade de MP2 a adquirir (α):

$$20(y_1) + \alpha(y_2) = 48.5€$$

$\alpha = 31.25$ kg (adquirir 31.25 kg de MP2).

Adquirir a quantidade adicional de 6.25 kg de MP2 (31.25 – 25 = 6.25).

d. Quadro óptimo com 31.25 kg de MP2:

(Matriz inversa da base nas colunas amarelas) **Quadro Óptimo**

	x1	x2	F1	F2	VSM	
x2	0	1	3/5	-1/5	23/4	
x1	1	0	-1/5	2/5	17/2	
f (X)	0	0	9/5	2/5	97/2	Óptimo

Plano óptimo de produção: 8.5 litros de "A" e 5.75 litros de "B" (matérias-primas totalmente consumidas).

Notar a manutenção dos preços-sombra (porque se mantiveram os lucros unitários e a quantidade de MP2 está no intervalo admissível) e o novo lucro total (48.5) já calculado na alínea anterior.

	MP1 (kg)	MP2 (kg)	Custo MP1 (€/litro)	Custo MP2 (€/litro)	Total custos (€/litro)	Lucro (€/litro)	Produção (litros)	Receita total da venda (€)
"A"	1	3	k_1	$3(K_2 - 0.1)$	$k_1 + 3k_2 - 0.3$	3	8.5	$8.5(k_1 + 3k_2 - 0.3 + 3)$
"B"	2	1	$2k_1$	$k_2 - 0.1$	$2k_1 + k_2 - 0.1$	4	5.75	$5.75(2k_1 + k_2 - 0.1 + 4)$

Expressão geral da receita total da venda (€) = $20k_1 + 31.25k_2 + 45.375$

e.

e.1. Custo dos recursos por unidade produzida, Preço e Lucro unitários de venda:

MP1 e MP2 adquiridos a 5 €/kg e 10 €/kg, respectivamente

	MP1 (kg)	MP2 (kg)	Custo Total (€/litro)	Preço de Venda (€/litro)	Lucro (€/litro)
“A”	1	3	35	38	3
“B”	2	1	20	24	4

MP1 e MP2 adquiridos a 5 €/kg e 9.9 €/kg, respectivamente

	MP1 (kg)	MP2 (kg)	Custo Total (€/litro)	Preço de Venda (€/litro)	Lucro (€/litro)
“A”	1	3	34.7	37.7	3
“B”	2	1	19.9	23.9	4

(Notar a manutenção do lucro e a redução dos PV)

e.2. Custo total de aquisição das matérias-primas, Receita total e Lucro total da venda:

	MP1 (kg)	MP2 (kg)	Custo Total das MP (€)	Receita Venda (€)	Lucro (€)
“A” “B”	20	25	100 + 250 = 350	6(38) + 7(24) = 396	46

	MP1 (kg)	MP2 (kg)	Custo Total das MP (€)	Receita Venda (€)	Lucro (€)
“A” “B”	20	31.25	100 + 309.375 = 409.375	8.5(37.7) + 5.75(23.9) = 457.875	48.5

7.

a. Comecemos por calcular o quadro óptimo para conhecermos as soluções óptimas dos problemas Primal e Dual.

(Matriz inversa da base nas colunas amarelas) **Quadro Óptimo**

	x1	x2	x3	x4	F1	F2	F3	VSM	
x2	0	1	1/8	0	5/32	-1/16	0	25	
x4	1	0	3/2	1	-1/8	1/4	0	140	
F3	2	0	-11/2	0	-5/8	-3/4	1	100	
f(X)	10	0	130	0	25/2	15	0	18000	Óptimo

A manutenção das margens de lucro garante a manutenção dos preços-sombra das horas de cada uma das secções.

O desconto total para 480 horas de Acabamento é de 480(1.5) = 720 € pelo que o novo lucro total óptimo deverá ser de 18000 + 720 = 18720 € (incorporação do desconto no novo lucro total).

Recorrendo à função objectivo do problema Dual calcula-se o número de horas a cativar:

$$b_1(y_1) + 800(y_2) + 1000(y_3) = 18720\text{ €}$$

$$b_1(12.5) + 800(15) + 1000(0) = 18720\text{ €}$$

$$b_1 = 537.6 \text{ horas (valor óptimo para aquisição)}$$

Deve ser cativado um adicional de 57.6 horas (537.6 – 480 = 57.6) se e só se não afectar a admissibilidade da base corrente.

O plano óptimo de produção com 537.6 horas é:

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{5}{32} & \frac{-1}{16} & 0 \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{4} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 537.6 \\ 800 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 132.8 \\ 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Trata-se de uma solução admissível pelo que devem ser cativadas 537.6 horas obtendo-se o lucro máximo de:

$$34(160) + 132.8(100) = 18720\text{ € (valor de referência inicial)}$$

b. Comecemos por identificar o vector P_A com o consumo de tempo, por unidade produzida, em cada uma das secções:

$$P_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Para rentabilizar a produção do bem “A” é necessário anular a anti economia associada (10 €/un. de A), ou seja, é necessário que a restrição Dual associada seja verificada na forma de igualdade (a admissibilidade da base mantém-se pois a variável x_1 é VNB).

Considere-se então a seguinte formalização para o vector P_A:

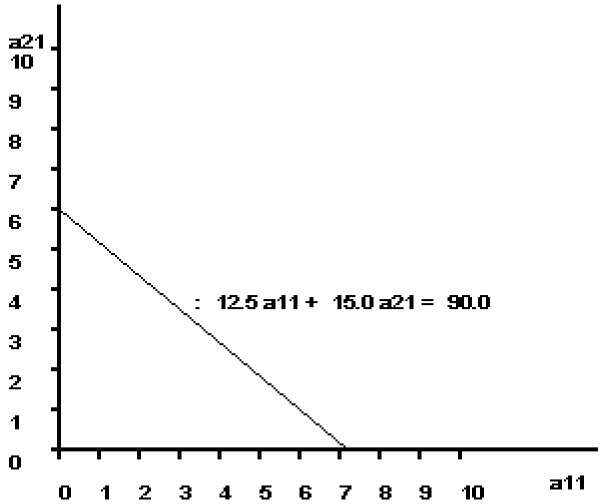
$$P_A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

Para anular a anti economia corrente é necessário satisfazer a restrição Dual associada, na forma de igualdade (saturação):

$$a_{11}(y_1) + a_{21}(y_2) + a_{31}(y_3) = 90$$

$$12.5a_{11} + 15a_{21} + 0a_{31} = 90 \quad \text{(restrição para cenários)}$$

Qualquer cenário válido deverá satisfazer esta restrição que, graficada, facilitará a tarefa do analista:



(Notar que a_{31} tem valor livre pois y_3 tem valor nulo)

TESTE

Bem "A": Redução do tempo de Acabamento para 1.5 horas

O valor admissível para "a_{21}" horas de Montagem deverá ser:

$$12.5(1.5) + 15(a_{21}) + 0a_{31} = 90$$

$$a_{21} = 4.75 \text{ horas}$$

Calculando a solução óptima com $P_A = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 4.75 \\ 7 \end{bmatrix}$ o quadro óptimo para estes novos consumos é:

(Matriz inversa da base nas colunas amarelas) **Quadro Óptimo**

	x1	x2	x3	x4	F1	F2	F3	VSM	
x2	- 1/ 16	1	1/ 8	0	5/ 32	- 1/ 16	0	25	
x4	1	0	3/ 2	1	- 1/ 8	1/ 4	0	140	
F3	5/ 2	0	- 11/ 2	0	- 5/ 8	- 3/ 4	1	100	
f (X)	0	0	130	0	25/ 2	15	0	18000	Alternativa

Notar a manutenção da solução óptima corrente mas em que é nula a anti economia associada à produção do bem "A" (solução indeterminada).

Podemos agora mudar de base para obter outra solução em que o bem "A" é produzido:

(Matriz inversa da base nas colunas amarelas) **Quadro Óptimo**

	x1	x2	x3	x4	F1	F2	F3	VSM	
x2	0	1	- 1/ 80	0	9/ 64	- 13/ 160	1/ 40	55/ 2	
x4	0	0	37/ 10	1	1/ 8	11/ 20	- 2/ 5	100	
x1	1	0	- 11/ 5	0	- 1/ 4	- 3/ 10	2/ 5	40	
f (X)	0	0	130	0	25/ 2	15	0	18000	Óptimo

Notar a manutenção dos preços-sombra.

Notar que a base óptima não se altera para qualquer valor de a_{31} (horas de Corte para uma unidade de "A").

Dispondo das duas soluções óptima calculadas estabelece-se a expressão geral das solução óptimas para o cenário em estudo:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \\ 140 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 40 \\ 55/2 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad com\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\ e\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

8.

a.

Quadro óptimo e Análise de sensibilidade:

(Matriz inversa da base nas colunas amarelas) **Quadro Óptimo**

	x1	x2	x3	F1	F2	F3	VSM	
x2	1/3	1	0	1/3	-1/3	0	12	
x3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0	21	
F3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1	15	
f(X)	25/2	0	0	15/2	10	0	1215	Óptimo

Análise de Sensibilidade

	Lim. Inf.	Actual	Lim.Sup.
b 1	54	90	112.5
b 2	22.5	54	90
b 3	78	93	Ilimitado
c 1	Ilimitado	30	42.5
c 2	17.5	40	70
c 3	20	35	80

O valor marginal de 1 hora em M1 (preço-sombra) é de 7.5 u.m.

Limites de Validade:

- variação independente de segundos membros nos intervalos acima indicados
- variação independente de c_1 no intervalo indicado (notar que x_1 é VNB do óptimo)
- não alteração dos coeficientes c_2 e c_3 (notar que x_2 e x_3 são VB do óptimo)

b. Usando a "Regra dos 100%":

	Valor Corrente (horas)	Subida Máxima (horas)	Descida máxima (horas)	Novo Valor (horas)	Variação (horas)	Alteração percentual (valor absoluto)
b_1	90	22.5	36	100	+ 10	$\frac{10}{22.5} = 44.4\%$
b_2	54	36	31.5	50	- 4	$\frac{4}{31.5} = 12.7\%$
b_3	93	Ilimitada	15	88	- 5	$\frac{5}{15} = 33.3\%$

Soma das alterações percentuais: 90.4%

A soma das variações percentuais é inferior a 100% pelo que a base corrente permanece óptima.

Idêntica conclusão pode obter-se recorrendo à versão matricial:

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/6 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.67 \\ 16.67 \\ 4.67 \end{bmatrix}$$

A solução básica é admissível pelo que a base corrente permanece óptima.

c. No quadro óptimo conclui-se que a anti economia associada à produção de 1 unidade de "A" é de 12.5 u.m que deriva do seguinte (ver quadro óptimo):

$$\begin{cases} x_2 = 12 - \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 = 21 - \frac{5}{6}x_1 \end{cases}$$

Produzindo 1 unidade de "A" ($x_1 = 1$) as consequências são:

- Aumenta o lucro em 30 u.m. (1 unidade de "A")
- Reduz o lucro 1/3(40) u.m. (redução de 1/3 na produção de "B")
- Reduz o lucro 5/6(35) u.m. (redução de 5/6 na produção de "C")

No total o impacto no lucro é de:

30 - 1/3(40) - 5/6(35) = - 12.5 u.m.

d. Consultando a tabela apresentada em alínea anterior a resposta é negativa pois o limite superior do intervalo de variação de "c_1" é 42.5 u.m.

e. Consideremos “k ” o nível de produção deste novo bem.

O modelo aumentado passa a ser:

Max $f(X) = 30x_1 + 40x_2 + 35x_3 + 55k$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 4k & \leq & 90 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2k & \leq & 54 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3k & \leq & 93 \\ & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1 , x_2 , x_3 , k} & \geq & 0 \end{array}$$

A nova restrição Dual associada à variável “k ” é $4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 55$ u.m.

Substituindo o valor das variáveis Duais tem-se:

$$4\,(7.5) + 2\,(10) + 3\,(0) \geq 55$$

$$50 \geq 55 \text{ (falso)}$$

A restrição Dual é violada (coeficiente de “k ” em f(X) é negativo) pelo que a variável deve entrar para a base.

Para registar no quadro óptimo corrente calcula-se para “k ”:

$$A_m^{-1} P_k = A_m^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

No quadro calcula-se o coeficiente da variável “K”, em f(X), ficando:

VB	x_1	x_2	x_3	k	F_1	F_2	F_3	VSM
x_2	1/ 3	1	0	2/3	1/ 3	- 1/ 3	0	12
x_3	5/ 6	0	1	2/3	- 1/ 6	2/ 3	0	21
F_3	- 5/ 3	0	0	-1/3	- 2/ 3	- 1/ 3	1	15
f (X)	25/ 2	0	0	-5	15/ 2	10	0	1215

Reoptimizando obtém-se a nova solução óptima :

VB	x_1	x_2	x_3	k	F_1	F_2	F_3	VSM
k	1/2	3/2	0	1	1/2	- 1/2	0	18
x_3	1/2	-1	1	0	- 1/2	1	0	9
F_3	-3/2	1/2	0	0	- 1/2	- 1/2	1	21
f(X)	15	15/2	0	0	10	15/2	0	1305

Novo plano de produção: 9 unidades de “C” e 18 unidades do novo produto.

Lucro máximo = 1305 u.m.

O valor do lucro aumenta de 90 u.m. (1305 – 1215 = 90).

9.

a. É necessário calcular o valor de a_{13} (coeficiente de x_3 na 1ª restrição técnica) que torna rentável a produção deste tipo de tecido (anular a anti economia corrente).

Para tal recorre-se à restrição Dual associada que deverá ser satisfeita na forma de igualdade:

$a_{13}\, y_1 + 3y_2 = 4$

$a_{13}\, (^{29}/_5) + (3)\, (^{-2}/_5) = 4 \quad \Leftrightarrow a_{13} = {}^{26}/_{29}\ {}^{ton}/_{1000\ m}$

Consumo corrente para 1000 m = 1 ton

Consumo máximo que rentabiliza a produção = $^{26}/_{29}$ ton.

Redução mínima = $^{3}/_{29}$ ton.

Conclusão: se, pelo menos, for possível efectuar esta redução, a produção do tecido de Trama Densa passa a ser rentável (verifique com o software do autor).

b. A manutenção das margens de lucro garante a manutenção dos preços-sombra correntes.

O desconto na aquisição de Algodão é de 1.16 u.m. por tonelada, ou seja, 5.8 u.m. para as 5 toneladas correntes.

O lucro total óptimo passará a ser de 28.2 + 5.8 = 34 u.m. (incorporação do desconto no novo lucro total).

Recorrendo à função objectivo do problema Dual calcula-se a quantidade de algodão a adquirir:

$b_1(y_1) + 2(y_2) = 34$ u.m.

$b_1\, (^{29}/_5) + (2)\, (^{-2}/_5) = 34 \;\Rightarrow\; b_1 = 6$ ton. de algodão (valor óptimo para aquisição)

O plano de produção com 6 toneladas de algodão é:

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

com lucro máximo de 34 u.m.

Os preços de venda a praticar serão 18.84, 31.68 e 16.84 u.m. por milhar de metros para cada um dos tecidos.

Os quadros apresentados, no enunciado, rectificam-se ficando:

	Trama Ligeira	Trama Normal	Trama Densa
Algodão necessário para 1000 m	1 ton.	2 ton.	1 ton.
Custo de 1 ton. Algodão (u.m.)	3.84		
Custo de algodão para 1000 m (u.m.	3.84	7.68	3.84
Outros custos para 1000 m (u.m.)	10	12	9
Custo Total para 1000 m (u.m.)	13.84	19.68	12.84
Preço de Venda de 1000 m	18.84	31.68	16.84
Lucro por 1000 m (u.m.)	5	12	4

10.

a. Recorrendo ao sistema de equações técnicas, de que se conhecem os valores $x_1 = 11$ e $x_2 = 7$, conclui-se que $E_3 = 6$ (variável excedentária da 3ª restrição).

Considerando y_1 , y_2 e y_3 os preços sombra associados, respectivamente, às 1ª, 2ª e 3ª restrições técnicas e y_4, y_5 e y_6 os valores da anti economia associada aos bens "A", "B" e "C", respectivamente, as relações de complementaridade são:

$x_1 y_4 = 0$

$x_2\, y_5 = 0$

$x_3\, y_6 = 0$

$F_1 y_1 = 0$

$F_2\, y_2 = 0$

$E_3\, y_3 = 0$

Nestas relações, atendendo a que x_1 , x_2 e E_3 são diferentes de zero, conclui-se que $y_4 = y_5 = y_3 = 0$.

Resolvendo o sistema de equações do Dual:

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 - y_4 = 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 - y_5 = 3 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 - y_6 = 2 \end{cases} \begin{cases} y_1 + 3y_2 = 2 \\ 3y_1 + y_2 = 3 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_6 = 2 \end{cases} \begin{cases} y_1 = 7/8 \\ y_2 = 3/8 \\ y_6 = 7/8 \end{cases}$$

obtém-se o valor da anti economia unitária de "C " que é $y_6 = 7/8 = 0.875$ u.m.

O lucro unitário de venda deve absorver 20% da anti economia (0.175 u.m.) pelo que deve ser rectificado para:

$c_1 = 2 + 0.175 = 2.175$ u.m. por unidade vendida

O consumo unitário de MP1 deve absorver 50% da anti economia (0.4375 u.m.)

Dado que o preço sombra de 1 tonelada de MP1 é de $y_1 = 7/8 = 0.875$ u.m., para reduzir, em custo de produção, 0.4375 u.m. é necessário reduzir o consumo de 0.4375/0.875 = 0.5 toneladas por unidade de "C", ou seja:

$a_{13} = 2 - 0.5 = 1.5$ ton.

O consumo unitário de MP2 deve absorver os restantes 30% da anti economia (0.265 u.m.).

Dado que o preço sombra de 1 tonelada de MP2 é de $y_2 = 3/8 = 0.375$ u.m., para reduzir, em custo de produção, 0.2625 u.m. é necessário reduzir o consumo de 0.2625/0.375 = 0.7 toneladas por unidade de "C", ou seja:

$a_{23} = 3 - 0.7 = 2.3$ ton.

O vector técnico de "C" deverá ser:

$$P_C = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, em f(X), o coeficiente unitário de lucro deverá ser c_1 = 2.175 u.m. por unidade vendida.

Em resumo, para rentabilizar a produção de "C" o novo modelo deve ser o seguinte:

	x_1	x_2	x_3		
Max f(X)	2	3	2.175		
Restrição 1	1	3	1.5	$\leq$	32
Restrição 2	3	1	2.3	$\leq$	40
Restrição 3	1	1	1	$\geq$	12

Neste novo modelo a solução óptima é múltipla (indeterminada).

Os resultados obtidos também podem obter-se recorrendo à restrição Dual associada à variável x_3 (nível da produção de "C").

Situação corrente (anti economia = 0.875)	$2y_1 + 3y_2 + y_3 - y_6 = 2$ 2(7/8) + 3(3/8) + 0 - 0.875 = 2
Margem de Lucro Anular 0.175 u.m. da anti economia	2(7/8) + 3(3/8) + 0 - (0.875 – 0.175) = 2 + 0.175 2(7/8) + 3(3/8) + 0 - 0.70 = 2.175
Consumo de MP1 Anular 0.4375 u.m. da anti economia	a_{13}(7/8) + 3(3/8) + 0 - (0.70 - 0.4375) = 2.175 a_{13}(7/8) + 3(3/8) + 0 - 0.2625 = 2.175 a_{13} = 1.5 ton.
Consumo de MP2 Anular 0.2625 u.m. da anti economia	1.5(7/8) + a_{23}(3/8) + 0 - 0 = 2.175 a_{23} = 2.3 ton.
Teste (com anti economia nula)	$1.5y_1 + 2.3y_2 + y_3 = 2.175$ 2.175 = 2.175 (correcto)