INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

Exercícios

Cap. VI – Análise de Sensibilidade e Pós-Optimização

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O.

VI. Análise de Sensibilidade e Pós-Optimização

1. Considere o seguinte problema de PL

   Max $f(X) = 4x_1 + 5x_2$

   s.a.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 10 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   a. Apresentar a Matriz Técnica do modelo (matriz "A")

   b. Apresentar a matriz dos termos independentes (matriz "B")

   c. Apresentar a matriz dos Coeficientes, em f(X), das Variáveis de Decisão (matriz "C_a")

   d. Para a solução admissível em que as VB são x_2 e F_1 (variável de folga da 1ª restrição técnica), apresentar:

      - a matriz da base (matriz "A_m")
      - o produto matricial correspondente à solução para as VB
      - o "extracto" do quadro Simplex com as VB, matriz inversa da base e solução

2. Considere o seguinte problema de PL

   Max $f(X) = 4x_1 + 5x_2$

   s.a.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 10 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   a. Para a solução admissível em que as VB são x_2 e E_2 (variável excedentária da 2ª restrição técnica), apresentar:

      - a matriz da base (matriz "A_m")
      - o produto matricial correspondente à solução para as VB
      - o "extracto" do quadro Simplex (método dos 2 Passos) com as VB, matriz inversa da base e solução

3. Considere o seguinte problema de PL

Max $f(X) = 4x_1 + 5x_2$

s.a.

$$
\begin{array}{rcrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 10 \\
 & & x_1 , x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a. Verifique graficamente e matricialmente se o método Simplex gera uma solução com as VB x_1 e F_1 (variável de folga da 1ª restrição técnica).

4. Admita que, conhecendo o modelo de PL, tem a necessidade de construir, matricialmente, o seguinte quadro Simplex:

VB	x_1	x_2	E_2	E_3	F_1	A_2	A_3	VSM
x_1 x_2 E_3	Zona 2		Zona 4		Zona 1			Zona 3
f(X)	Zona 5		Zona 8		Zona 6			Zona 7

Nota: x_1 e x_2 são variáveis de decisão; F_1 é a variável de folga da 1ª restrição técnica; E_2 e E_3 são variáveis excedentárias das 2ª e 3ª restrições técnicas, respectivamente; A_2 e A_3 são variáveis artificiais das 2ª e 3ª restrições técnicas, respectivamente

a. Descreva as matrizes ou produtos matriciais associados às zonas do quadro numeradas de 1 a 8.

5. Considere o seguinte problema de PL (variáveis de decisão não negativas):

⊙ Max
○ Min

Nº de Var. Decisão 2

	x1	x2	Sinal	2º membro
f (X)=	3	4		
Restrição 1	1	2	<=	20
Restrição 2	3	1	<=	25
Restrição 3	1	1	>=	12

a. Considerando x_1, x_2 e E_3 as VB de uma solução admissível do sistema de equações da forma-padrão do Simplex construa, matricialmente, o quadro Simplex associado.

6. Considere o seguinte problema de PL (variáveis de decisão não negativas):

(•) Max
( ) Min

Nº de Var. Decisão: 3

	x1	x2	x3	Sinal	2º membro
f (X)=	2	4	6		
Restrição 1	2	2	4	<=	12
Restrição 2	1	4	2	<=	8
Restrição 3	4	2	4	<=	10

a. Utilize a versão matricial do Simplex para completar o quadro Simplex seguinte:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
x_2				0	1/3	-1/6	
x_3				0	-1/6	1/3	
F_1				1	0	-1	
f(X)							

Nota: F_1 , F_2 , F_3 são variáveis de folga nas 1ª, 2ª e 3ª restrições, respectivamente

b. Classifique a solução obtida na alínea anterior.

7. Considere o seguinte problema de PL

Max $f(X) = 4x_1 + 5x_2$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 60 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 40 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 50 \\ & & x_1 & \geq & 0 \\ & & x_2 & & \text{livre} \end{array}$$

a. A solução óptima é $x_1 = 60$; $x_2 = -20$

Utilize a versão matricial do Simplex para construir o quadro óptimo.

8. Uma empresa planeia a produção dos bens A e B nas seguintes condições:

- O total da produção não deve ocupar em armazém mais do que 4 unidades de área (u.a.). Uma unidade do produto “A” ocupa 2 u.a., enquanto “B” necessita apenas de 1 u.a.
- O stock do produto “A” deve ser pelo menos de 1 unidade.
- Os lucros unitários de venda são, respectivamente, de 1 u.m para “A” e de 2 u.m. para “B”.

Considerando x_1 e x_2 os níveis de produção dos bens "A" e "B", o modelo de PL para calcular o plano óptimo de produção é o seguinte:

Max $f(X) = x_1 + 2x_2$

s.a.

$$\begin{array}{lcccc} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & & & \geq & 1 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a. Sendo x_1 e x_2 as VB do óptimo construir o quadro-óptimo utilizando a versão matricial do Simplex.

b. Ler no quadro óptimo a solução do problema Dual.

c. Analisar isoladamente a sensibilidade do modelo à variação dos segundos membros das restrições.

d. Analisar isoladamente a sensibilidade do modelo à variação dos coeficientes de lucro.

9. Considere o seguinte problema de PL

Max $f(X) = 2x_1 + x_2$

s.a.

$$\begin{array}{lcccc} 3x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Cálculo da solução óptima aplicando o método Simplex:

	x1	x2	F1	F2	VSM	
F1	3	1	1	0	6	
F2	1	2	0	1	10	
f(X)	-2	-1	0	0	0	Maximizar
x1	1	1/3	1/3	0	2	
F2	0	5/3	-1/3	1	8	
f(X)	0	-1/3	2/3	0	4	
x1	1	0	2/5	-1/5	2/5	
x2	0	1	-1/5	3/5	24/5	
f(X)	0	0	3/5	1/5	28/5	Óptimo

a. Analise a sensibilidade da base óptima a variações simultâneas dos segundos membros das restrições técnicas.

b. Grafique o espaço definido na alínea anterior.

c. A base corrente mantém-se se os segundos membros das restrições técnicas forem alterados para 8 e 6 respectivamente? Em caso afirmativo calcule a solução óptima associada.

10. Considere o modelo de PL:

Max $f(X) = -5\,x_1 + 5x_2 + 13x_3$

s.a.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-\,x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 20 \\
12x_1 & + & 4\,x_2 & + & 10x_3 & \leq & 90 \\
 & & & & x_1\,,\,x_2\,,\,x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Equações do quadro óptimo:

$-x_1 + x_2 + 3x_3 + F_1 = 20$

$16x_1 - 2x_3 - 4F_1 + F_2 = 10$

$f(X) + 2x_3 + 5F_1 = 100$

Analisar o impacto das alterações seguintes (a considerar de forma independente) e reoptimizar se necessário:

a. Considerar com valor 30 o segundo membro da primeira restrição ($b_1 = 30$).

b. Considerar os segundos membros das restrições iguais a 10 e 100 respectivamente

c. Na função objectivo alterar o coeficiente de x_3 para 8 ($c_3 = 8$).

d. Alterar os coeficientes de x_1 para “0” na 1ª restrição técnica, “5” na 2ª restrição técnica e “-2” em f(X).

e. Alterar os coeficientes de x_2 para “2” na 1ª restrição técnica, “5” na 2ª restrição técnica e “6” em f(X).

f. Introduzir uma nova variável K com coeficientes “3” na 1ª restrição técnica, “5” na 2ª restrição técnica e “10” em f(X).

g. Introduzir a nova restrição técnica $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$.

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

Soluções dos Exercícios

Cap. VI – Análise de Sensibilidade e Pós-Optimização

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O.

1.

Modelo proposto:

Max $f(X) = 4x_1 + 5x_2$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 10 \\ & & x_1 , x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a. Matriz Técnica "A": é a matriz dos coeficientes das variáveis de decisão, nas restrições técnicas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b. Matriz dos Termos Independentes: é matriz-coluna dos segundos membros (constantes) das restrições técnicas.

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

c. Matriz dos Coeficientes, em f(X), das Variáveis de Decisão: é uma matriz-linha

$$C_a = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$$

d.

Modelo na forma-padrão Simplex:

Max $f(X) = 4x_1 + 5x_2 + 0F_1 + 0F_2$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & F_1 & + & 0F_2 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 0F_1 & + & F_2 & = & 10 \\ & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1 , x_2 , F_1 , F_2} & \geq & 0 \end{array}$$

- Matriz da base: conjunto dos vectores das VB (x_2 , F_1) na forma-padrão Simplex:

$$A_m = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Produto matricial correspondente à solução: é o produto da matriz inversa da base com a matriz dos termos independentes das equações técnicas (matriz "B"):

$$A_m^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ F_1 \end{bmatrix}$$

A solução básica é:

$x_2 = 10/3$

$F_1 = 10/3$

- Extracto do quadro Simplex

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_2			0	1/3	10/3
F_1			1	-2/3	10/3
f(X)					

2.

Modelo proposto:

Max $f(X) = 4x_1 + 5x_2$

s.a.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Modelo na forma-padrão Simplex:

Max $f(X) = 4x_1 + 5x_2 + 0F_1 + 0E_2$

s.a.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + F_1 + 0E_2 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 0F_1 - E_2 &= 10 \\ x_1, x_2, F_1, E_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Matriz da base: conjunto dos vectores das VB (x_2 , E_2) na forma-padrão Simplex:

$$A_m = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- Produto matricial correspondente à solução: é o produto da matriz inversa da base com a matriz dos termos independentes das equações técnicas (matriz "B"):

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

- Extracto do quadro Simplex

VB	x_1	x_2	E_2	F_1	A_2	VSM
x_2				1/2	0	5
E_2				3/2	-1	5
f(X)						

A solução básica é:

$x_2 = 5$

$E_2 = 5$

3.

Modelo proposto:

Max $f(X) = 4x_1 + 5x_2$

s.a.

$$
\begin{array}{rcrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 10 \\
 & & x_1 , x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Modelo na forma-padrão Simplex:

Max $f(X) = 4x_1 + 5x_2 + 0F_1 + 0E_2$

s.a.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & + & F_1 & + & 0E_2 & = & 10 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 0F_1 & - & E_2 & = & 10 \\
 & & & & x_1 , x_2 , F_1 , E_2 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

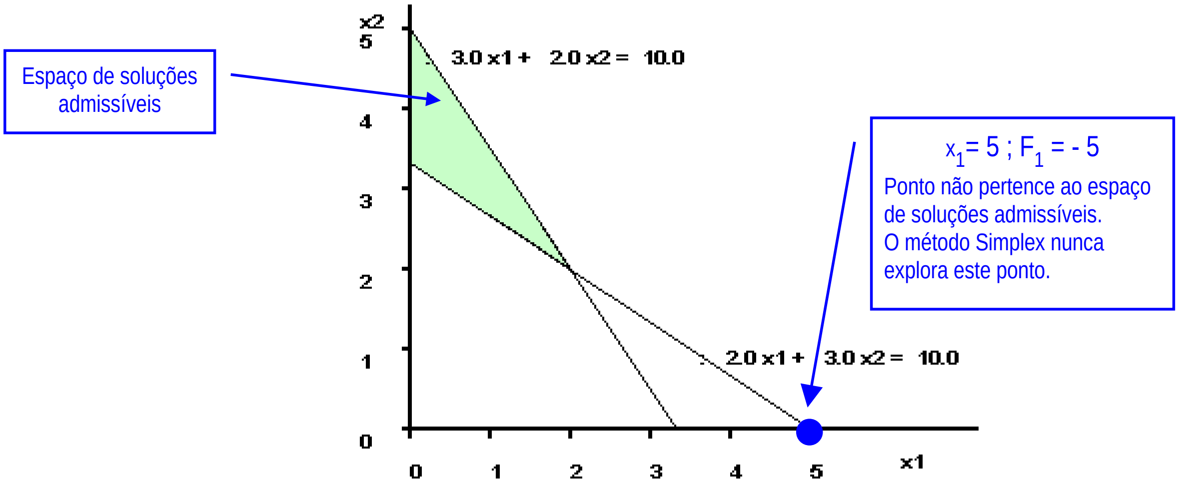
a. O método Simplex gera exclusivamente soluções admissíveis (VB com valor não negativo). Para concluir se o método gera solução admissível com as VB x_1 e F_1 há que:

- Matricialmente: calcular o produto matricial $A_m^{-1}B$ e verificar se as coordenadas são não negativas:

$$A_m = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ F_1 \end{bmatrix}$$

  A solução básica não é admissível (F_1 < 0) pelo que <u>nunca pode ser gerada pelo método Simplex</u>

- Graficamente: verificar se há algum extremo do espaço de soluções admissíveis definido pelas variáveis indicadas



4.

VB	x_1 x_2	E_2 E_3	F_1 A_2 A_3	VSM
x_1 x_2 E_3	Zona 2 $A_m^{-1}A$	Zona 4	Zona 1 A_m^{-1}	Zona 3 $A_m^{-1}B$
f(X)	Zona 5 $C_m A_m^{-1} A - C_a$	Zona 8	Zona 6 $C_m A_m^{-1}$	Zona 7 $C_m A_m^{-1} B$

Nota: x_1 e x_2 são variáveis de decisão; F_1 é a variável de folga da 1ª restrição técnica; E_2 e E_3 são variáveis excedentárias das 2ª e 3ª restrições técnicas, respectivamente; A_2 e A_3 são variáveis artificiais das 2ª e 3ª restrições técnicas, respectivamente.

a.

Zona 1:

A_m^{-1}: é a matriz inversa da matriz da base. Notar que esta zona está nas colunas das variáveis cujos vectores formam a matriz Identidade do quadro Inicial do Simplex.

Zona 2:

$A_m^{-1}A$: produto da matriz inversa da matriz da base pela matriz técnica "A". Notar que esta zona está nas colunas das variáveis de decisão.

Zona 3:

$A_m^{-1}B$: produto da matriz inversa da matriz da base pela matriz "B" dos termos independentes. Notar que esta zona é a da solução das VB.

Zona 5:

$C_m A_m^{-1} A - C_a$: produto da matriz de coeficientes, em f(X), das variáveis de decisão pelo produto matricial $A_m^{-1}A$ a que é subtraída a matriz dos coeficientes, em f(X), das variáveis de decisão. Notar que esta zona está nas colunas das variáveis de decisão.

Zona 6:

$C_m A_m^{-1}$: produto da matriz de coeficientes, em f(X), das variáveis básicas pela matriz inversa da base. Notar que esta zona está nas colunas das variáveis cujos vectores formam a matriz Identidade do quadro Inicial do Simplex.

Zona 7:

$C_m A_m^{-1} B$: produto da matriz de coeficientes, em f(X), das variáveis básicas pelo produto matricial $A_m^{-1}B$. Notar que esta zona é a do valor de f(X) para a base corrente.

Zona 4:

Vector de E_2 : simétrico do vector da variável artificial A_2.

Vector de E_3 : simétrico do vector da variável artificial A_3.

Zona 8:

Coeficientes, na equação de f(X), para E_2 e E_3: simétricos dos coeficientes das variáveis artificiais A_2 e A_3, respectivamente.

5.

Modelo proposto:

◉ Max
○ Min

Nº de Var. Decisão: 2

	x1	x2	Sinal	2º membro
f (X)=	3	4		
Restrição 1	1	2	<=	20
Restrição 2	3	1	<=	25
Restrição 3	1	1	>=	12

Matriz da Base: vectores das variáveis x_1, x_2 e E_3

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$: vectores das VB no sistema de equações da forma-padrão

Calcular:

$$A_m^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 3/5 & -1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_m^{-1}A = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 3/5 & -1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 3/5 & -1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_m A_m^{-1} A - C_a = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_m A_m^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 3/5 & -1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_m A_m^{-1} B = \begin{bmatrix} 9/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix} = 46$$

Quadro Simplex com as VB: x_1, x_2 e E_3

VB	x_1	x_2	E_3	F_1	F_2	A_3	VSM
x_1	1	0	0	-1/5	2/5	0	6
x_2	0	1	0	3/5	-1/5	0	7
E_3	0	0	1	2/5	1/5	-1	1
f(X)	0	0	0	9/5	2/5	0	46

Os coeficientes das variáveis em f(X) podem ser calculados directamente no quadro Simplex, tal como o valor de f(X) evitando erros usuais na identificação das matrizes a operar.

Para efectuar o cálculo é necessário registar:

- no topo do quadro, os coeficientes, em f(X) das variáveis de decisão (matriz C_a)
- à esquerda das VB, os seus coeficientes, em f(X) (matriz C_m transposta)

Quadro Simplex com as VB: x_1, x_2 e E_3

		3	4					
	VB	x_1	x_2	E_3	F_1	F_2	A_3	VSM
3	x_1	1	0	0	-1/5	2/5	0	6
4	x_2	0	1	0	3/5	-1/5	0	7
0	E_3	0	0	1	2/5	1/5	-1	1
	f(X)	0	0	0	9/5	2/5	0	46

- coeficiente, em f(X), da variável x_1 = [(3) (1) + (4) (0) + (0) (0)] - 3 = 0
- coeficiente, em f(X), da variável x_2 = [(3) (0) + (4) (1) + (0) (0)] - 4 = 0
- coeficiente, em f(X), da variável F_1 = (3) (-1/5) + (4) (3/5) + (0) (2/5) = 9/5
- coeficiente, em f(X), da variável F_2 = (3) (2/5) + (4) (-1/5) + (0) (1/5) = 2/5
- coeficiente, em f(X), da variável A_3 = (3) (0) + (4) (0) + (0) (-1) = 0 (simétrico para E_3)
- valor de f(X) = (3) (6) + (4) (7) + (0) (1) = 46

6.

a. Utilizando a sequência de cálculo do problema anterior obtém-se:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
x_2	-1/3	1	0	0	1/3	-1/6	1
x_3	7/6	0	1	0	-1/6	1/3	2
F_1	-2	0	0	1	0	-1	2
f(X)	11/3	0	0	0	1/3	4/3	16

b. A solução é óptima. É única porque só as VB têm coeficiente nulo na equação de f(X).

7. A variável x_2 é livre o que obriga a substituí-la, na forma-padrão do Simplex, pela diferença entre duas variáveis não negativas, ou seja:

$$x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}$$

Se x_2 = -20 tal significa que $x_2^{''} = 20$ é VB no quadro Simplex.

O modelo tem 3 restrições técnicas pelo que há 3 VB.

Sabe-se já que são VB as variáveis x_1 = 60 e $x_2^{''} = 20$ sendo necessário recorrer ao sistema de equações da forma-padrão para identificar a terceira VB:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2^{'} - 3x_2^{''} + F_1 = 60 \\ x_1 + x_2^{'} - x_2^{''} + F_2 = 40 \\ 2x_1 + 3x_2^{'} - 3x_2^{''} - E_3 = 50 \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 = 60 - 120 - 0 + (60) = 0 \\ F_2 = 40 - 60 - 0 + (20) = 0 \\ E_3 = -50 + 120 + 0 - (60) = 10 \quad (VB) \end{cases}$$

Conhecidas as 3 VB e utilizando a sequência de cálculo do problema anterior obtém-se:

VB	x_1	$x_2^{'}$	$x_2^{''}$	E_3	F_1	F_2	A_3	VSM
x_1	1	0	0	0	-1	3	0	60
$x_2^{''}$	0	-1	1	0	-1	2	0	20
E_3	0	0	0	1	1	0	-1	10
f (X)	0	0	0	0	1	2	0	140

8.

a. Quadro Óptimo

VB	x_1	x_2	E_2	F_1	A_2	VSM
x_1	1	0	-1	0	1	1
x_2	0	1	2	1	-2	2
f(X)	0	0	3	2	-3	5

Notar que a matriz inversa da base é registada nas colunas das variáveis F_1 e A_2

b. Solução óptima do problema Dual:

$$Y^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; Min\ g(Y^*) = 5$$

c. Segundos Membros - Análise de Sensibilidade

Para manter a estrutura da solução óptima, é necessário que se mantenha $A_m^{-1}B \geq 0$

- Na primeira restrição:

$$A_m^{-1}B \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \{ b_1 - 2 \geq 0 \Rightarrow b_1 \geq 2$$

A base mantém-se para valores de $b_1 \geq 2$

- Na segunda restrição:

$$A_m^{-1}B \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ b_2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} b_2 \geq 0 \\ 4 - 2b_2 \geq 0 \Rightarrow b_2 \leq 2 \end{cases}$$

A base mantém-se para valores de b_2 de zero a 2 (ambos inclusive)

d. Coeficientes de lucro - Análise de Sensibilidade

Dado que x_1 e x_2 são VB no óptimo, basta analisar o produto matricial $C_m A_m^{-1}$.

Este produto matricial é igual aos valores das variáveis de decisão do Dual pelo que, para manter a base, é necessário que os valores de y_1 e y_2 obedeçam às restrições lógicas $y_1 \geq 0$ e $y_2 \leq 0$.

Cálculo de $C_m A_m^{-1}$ para o coeficiente c_1 de x_1

$$C_m A_m^{-1} = [c_1 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = [2 \quad c_1 - 4]$$

Para manter a base é necessário garantir "$c_1 - 4 \geq 0$ o que obriga a:

$c_1 \leq 4$.u.m./unidade de "A"

Cálculo de $C_m A_m^{-1}$ para o coeficiente c_2 de x_2

Executando, de igual modo, o cálculo com "c_2" obtém-se:

$c_2 \geq 1/2$ (u.m./unidade de "B")

Em resumo, os limites superior e inferior dos intervalos onde se mantém a base corrente são os seguintes:

Análise de Sensibilidade

	Lim. Inf.	Actual	Lim.Sup.
b 1	2	4	Ilimitado
b 2	0	1	2
c 1	Ilimitado	1	4
c 2	.5	2	Ilimitado

9. O processo iterativo do cálculo da solução óptima é o seguinte:

	x 1	x 2	F1	F2	VSM	
F1	3	1	1	0	6	
F2	1	2	0	1	10	
f (X)	-2	-1	0	0	0	Maximizar
x 1	1	1/ 3	1/ 3	0	2	
F2	0	5/ 3	- 1/ 3	1	8	
f (X)	0	- 1/ 3	2/ 3	0	4	
x 1	1	0	2/ 5	- 1/ 5	2/ 5	
x 2	0	1	- 1/ 5	3/ 5	24/ 5	
f (X)	0	0	3/ 5	1/ 5	28/ 5	Óptimo

a. Para manter a base óptima corrente, variando os segundos membros das restrições técnicas, é necessário garantir a condição geral de admissibilidade $A_m^{-1}B \geq 0$, ou seja:

$$A_m^{-1}B \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} (2/5)b_1 - (1/5)b_2 \geq 0 \\ (-1/5)b_1 + (3/5)b_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b_1 - b_2 \geq 0 \\ -b_1 + 3b_2 \geq 0 \end{cases}$$

A base corrente mantém-se se for observado o conjunto de restrições:

$$\begin{cases} 2b_1 - b_2 \geq 0 \\ -b_1 + 3b_2 \geq 0 \end{cases}$$

Se fosse efectuada a análise para a variação isolada dos segundos membros, obter-se-ia o seguinte:

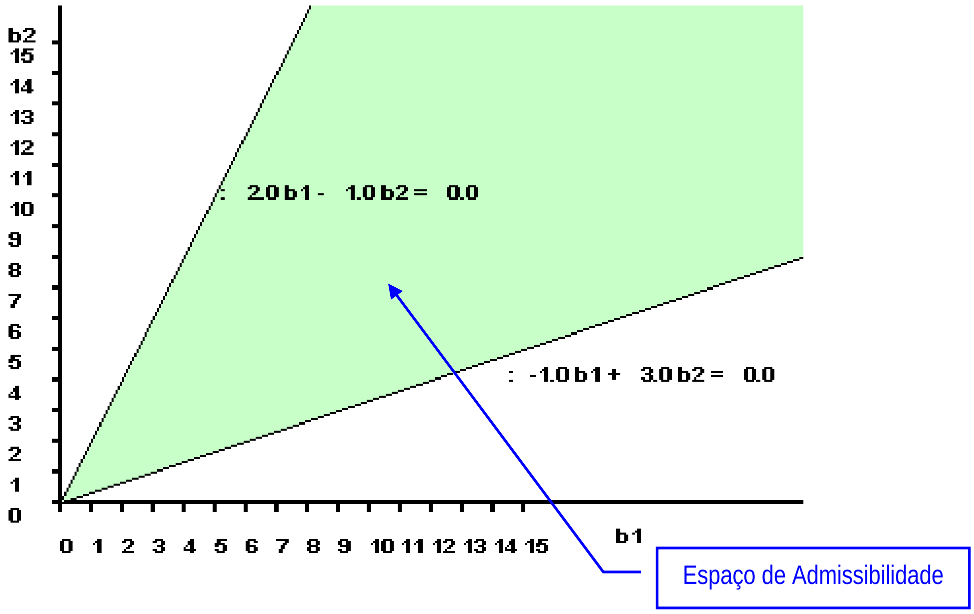
- Na primeira restrição:

Para $b_2 = 10$ tem-se: $\begin{cases} 2b_1 - 10 \geq 0 \\ -b_1 + 30 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \geq 5 \\ b_1 \leq 30 \end{cases}$

- Na segunda restrição:

Para $b_1 = 6$ tem-se: $\begin{cases} 12 - b_2 \geq 0 \\ -6 + 3b_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 \leq 12 \\ b_2 \geq 2 \end{cases}$

b. Espaço definido pelas restrições calculadas na alínea anterior:



c. Verificar se os valores propostos (8, 6) pertencem ao espaço de Admissibilidade:

$$\begin{cases} 2b_1 - b_2 \geq 0 \\ -b_1 + 3b_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 - 6 \geq 5 & (verdadeiro) \\ -8 + 18 \geq 0 & (verdadeio) \end{cases}$$

Conclusão: a base mantém-se admissível sendo a nova solução:

$$A_m^{-1}B \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Max\ f(X) = 6$$

Nota: Veja-se que o ponto de coordenadas (8 , 6) está no espaço de admissibilidade (ver figura anterior)

10. Usando as equações propostas, o quadro óptimo é o seguinte:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM
x_2	-1	1	3	1	0	20
F_2	16	0	-2	-4	1	10
f(X)	0	0	2	5	0	100

a. Matrizes que são alteradas:

	Modelo			Base	
Matriz	A	C_a	B	A_m	C_m
Altera			Sim		

Consequências no quadro-óptimo:

Matriz	$A_m^{-1}A$	A_m^{-1}	$A_m^{-1}B$	$C_m A_m^{-1} A - C_a$	$C_m A_m^{-1}$	$C_m A_m^{-1} B$
Altera			Sim			Sim

É necessário recalcular os produtos matriciais $A_m^{-1}B$ e $C_m A_m^{-1}B$:

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 30 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ F_2 \end{bmatrix} \ ; \ C_m A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix} = 150$$

A solução não é admissível (F_2 = -30) e portanto a base corrente deixa de ser óptima.

É necessário reoptimizar a solução corrente, aplicando o método Dual-Simplex.

Partindo do quadro óptimo corrente, actualizado com os novos produtos matriciais, temos:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM	Obs.
x_2	-1	1	3	1	0	30	SBNAP ; SBAD
F_2	16	0	-2	-4	1	- 30	Dual-Simplex
f(X)	0	0	2	5	0	150	
x_3	-8	0	1	2	-1/2	15	
x_2	23	1	0	-5	3/2	-15	
f(X)	16	0	0	1	1	120	
F_1	-23/5	-1/5	0	1	-3/10	3	
x_3	6/5	2/5	1	0	1/10	9	
f(X)	103/5	1/5	0	0	13/10	117	Solução óptima

O óptimo é atingido com nova base. Solução óptima; x_3 = 9 ; F_1 = 3 ; Max f(X) = 117

b. A alteração de valores dos segundos membros das restrições, altera a matriz "B" sendo pois necessário recalcular os produtos matriciais $A_m^{-1}B$ e $C_m A_m^{-1}B$:

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 60 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ F_2 \end{bmatrix} \ ; \ C_m A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 \\ 60 \end{bmatrix} = 50$$

Os novos valores das VB são admissíveis (não é pois necessário reoptimizar como sucedeu na alínea anterior).

O óptimo continua a ser atingido com a base corrente.

Solução óptima: x_2 = 10 ; F_2 = 60 ; Max f(X) = 50

c. Matrizes que são alteradas (notar que x_3 é VNB):

	Modelo			Base	
Matriz	A	C_a	B	A_m	C_m
Altera		Sim			

Consequências no quadro-óptimo:

Matriz	$A_m^{-1}A$	A_m^{-1}	$A_m^{-1}B$	$C_m A_m^{-1}A - C_a$	$C_m A_m^{-1}$	$C_m A_m^{-1}B$
Altera				Sim		

É necessário recalcular $C_m A_m^{-1}A - C_a = [5 \quad 0].\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 16 & 0 & -2 \end{bmatrix} - [-5 \quad 5 \quad 8] = [0 \quad 0 \quad 7]$

No quadro óptimo corrente, registamos <u>apenas</u> os valores agora calculados:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM
x_2						
F_2						
f(X)	0	0	7			

e concluímos que a base corrente continua a ser óptima pois a regra de paragem não foi afectada (apenas se alterou o valor de uma variável auxiliar do problema Dual).

d. Matrizes que são alteradas (notar que x_1 é VNB):

	Modelo			Base	
Matriz	A	C_a	B	A_m	C_m
Altera	Sim	Sim			

Consequências no quadro-óptimo:

Matriz	$A_m^{-1}A$	A_m^{-1}	$A_m^{-1}B$	$C_m A_m^{-1}A - C_a$	$C_m A_m^{-1}$	$C_m A_m^{-1}B$
Altera	Sim			Sim		

Recalcular os conjuntos matriciais que sofrem alteração:

$$A_m^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_m A_m^{-1}A - C_a = [5 \quad 0].A_m^{-1}A - [-2 \quad 5 \quad 13] = [2 \quad 0 \quad 2]$$

No quadro óptimo corrente, registamos <u>apenas</u> os valores agora calculados:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM
x_2	0	1	3			
F_2	5	0	-2			
f(X)	2	0	2			

e concluímos que a base corrente continua a ser óptima pois a regra de paragem não foi afectada (apenas se alterou o valor de uma variável auxiliar do problema Dual).

e. Matrizes que são alteradas (notar que x_2 é VB):

	Modelo			Base	
Matriz	A	C_a	B	A_m	C_m
Altera	Sim	Sim		Sim	Sim

Consequências no quadro-óptimo:

Matriz	$A_m^{-1}A$	A_m^{-1}	$A_m^{-1}B$	$C_m A_m^{-1}A - C_a$	$C_m A_m^{-1}$	$C_m A_m^{-1}B$
Altera	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

Nova matriz $A_m = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Recalcular os conjuntos matriciais que sofrem alteração:

$$A_m^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_m^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 12 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 3/2 \\ 29/2 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 20 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$C_m A_m^{-1}A - C_a = [6 \quad 0].A_m^{-1}A - [-5 \quad 6 \quad 13] = [2 \quad 0 \quad -4]$$

$$C_m A_m^{-1} = [6 \quad 0].A_m^{-1} = [3 \quad 0]$$

$$C_m A_m^{-1}B = [6 \quad 0].A_m^{-1}B = 60$$

No quadro óptimo corrente, registamos os valores agora calculados:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM
x_2	-1/2	1	3/2	1/2	0	10
F_2	29/2	0	5/2	-5/23	1	40
f(X)	2	0	-4	3	0	60

e concluímos que a base corrente não satisfaz a regra de paragem. É necessário reoptimizar a solução corrente, aplicando o método Primal-Simplex (entra x_3 e sai x_2):

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM
x_3	-1/3	2/3	1	1/3	0	20/3
F_2	46/3	-5/3	0	-10/3	1	70/3
f(X)	2/3	8/3	0	13/3	0	260/3

O óptimo é atingido com nova base (x_3 = 20/3 ; F_2 = 70/ 3 ; Max f(X) = 260/3)