INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

Exercícios

Cap. III – Método Simplex

António Carlos Morais da Silva

Professor de I.O.

III. Método Simplex

1. Escreva na forma-padrão Simplex:

   Min $f(X) = x_1 + x_2$

   s.a.

   $$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

2. Escreva na forma-padrão Simplex:

   Min $f(X) = x_1 + x_2$

   s.a.

   $$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \end{array}$$

   $x_1 \leq 0$; x_2 livre

3. Dado o seguinte modelo de PL:

   Max $f(X) = 8x_1 + 6x_2$

   s.a.

   $$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \\ 3x_1 & - & x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   a. Construa o quadro inicial do Simplex.

   b. Qual é a variável que deve entrar na Base ? Porquê ?

   c. Qual deve ser a variável que sai da Base ? Porquê ?

   d. Qual é o valor da variável que escolheu para entrar na Base ? Porquê ?

   e. Calcular, classificar e apresentar a solução óptima do problema utilizando o método do Simplex.

4. Detecte os erros no seguinte Quadro Simplex da Maximização de f(X):

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM
x_1	1	$^1/_3$	5	2	0	12
F_3	-1	$^2/_3$	4	5	1	10
f(X)	0	0	3	-2	2	24

5. Detecte os erros no seguinte Quadro Simplex da Maximização de f(X):

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	$^1/_2$	1	3	5
F_1	0	4	0	12	-4
f(X)	0	$-^2/_5$	3	7	13

6. Considere o seguinte quadro Simplex da maximização de f(X):

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_3$	$^2/_3$	5
x_2	0	1	$^2/_3$	5	4
f(X)	0	0	$^5/_3$	0	12

Comente a seguinte afirmação: "Solução óptima única".

7. Considere o seguinte quadro Simplex da maximização de f(X):

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_3$	$^2/_3$	5
x_2	0	1	$^2/_3$	5	0
f(X)	0	0	$^5/_3$	0	12

Comente a seguinte afirmação: "Solução óptima indeterminada".

8. Considere o seguinte quadro Simplex da maximização de f(X):

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_3$	$^2/_3$	5
x_2	0	1	$^2/_3$	-5	0
f(X)	0	0	$^5/_3$	0	12

Comente a seguinte afirmação: "Solução óptima indeterminada".

9. Considere o seguinte quadro Simplex da maximização de f(X) em que x_2 é uma variável livre:

VB	x_1	x'_2	x''_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	0	5	1	10
x''_2	0	-1	1	3	4	3
f(X)	0	0	0	2	5	12

Comente a seguinte afirmação: "Solução óptima única".

10. Considere o seguinte quadro Simplex da maximização de f(X):

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	-2	4	1	0	12
F_2	-2	3	0	1	13
f(X)	-1	-2	0	0	0

Comente a seguinte afirmação: “O problem não tem solução”.

11. Calcule e classifique a solução óptima do seguinte problema de PL :

$$\text{Max } f(X) = -10x_1 - 12x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 9x_2 & \geq & -140 \\ 9x_1 & + & 5x_2 & \geq & -55 \\ & & x_1 \; ; \; x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

12. Calcule e classifique a solução óptima do seguinte problema de PL :

$$\text{Min } f(X) = 10x_1 - 6x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & \geq & 28 \\ x_1 & - & x_2 & \geq & 6 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & \geq & 14 \\ & & & & x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \leq 0 \end{array}$$

13. Calcule e classifique a solução óptima do seguinte problema de PL :

$$\text{Max } f(X) = 15x_1 + 9x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & \geq & 5 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & \geq & 12 \\ & & x_1 \; ; \; x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Se experimentar alguma(s) dificuldade(s) , descreva-a(s) e indique qual ou quais as causas da(s) mesma(s).

14. Calcule e classifique a solução óptima do seguinte problema de PL :

$$\text{Max } f(X) = 5x_1 + 10x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & + & 14x_2 & \leq & 42 \\ & & x_2 & \geq & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\ & & x_1 \; ; \; x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

15. Calcule e classifique a solução óptima do seguinte problema de PL :

Min $f(X) = 15x_1 + 20x_2$

s.a.

$$
\begin{array}{ccccc}
5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15 \\
2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 20 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Se experimentar alguma(s) dificuldade(s) , descreva-a(s) e indique qual ou quais a(s) causas da(s) mesma(s).

16. Calcule e classifique a solução óptima do seguinte problema de PL:

Max $f(X) = 8x_1 + 35x_2$

s.a.

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & + & 5x_2 & \leq & 10 \\
x_1 & + & 7x_2 & \geq & 10 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a. Verifique se há alguma solução maximizante que não satisfaça o critério do óptimo.

b. Descreva a “regra de paragem” do método do Simplex.

c. Indique como reconhece, no quadro Simplex, se uma solução óptima é única ou indeterminada.

17. Calcule e classifique a solução óptima do seguinte problema de PL (use o método dos 2 Passos):

Max $f(X) = 2x_1 + x_2 + 2x_3$

s.a.

$$
\begin{array}{ccccccc}
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\
4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & \geq & 5 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

a. Detectou um caso particular no 1º Passo do Método? Como actuou e porquê?

18. As questões seguintes são para resolver geometricamente e analiticamente.

a. Apresente um modelo de PL com duas variáveis de decisão que tenha solução óptima única.

b. Apresente um modelo de PL com duas variáveis de decisão que não tenha soluções admissíveis.

c. Apresente um modelo de PL com duas variáveis de decisão que tenha solução óptima não única (solução indeterminada).

d. Apresente um modelo de PL (maximização da função objectivo) com duas variáveis de decisão cuja função objectivo não tenha limite superior.

Nota: Verifique com o software do autor se os seus modelos estão correctos.

As questões seguintes são todas do tipo Verdadeira/Falsa

(PPL = Problema de Programação Linear)

19. Uma solução é admissível quando satisfaz todas as restrições do PPL.

20. No convexo de soluções de um PPL, um ponto é extremo se e só se constituir uma solução básica admissível do problema.

21. O conjunto de soluções admissíveis de um PPL é um conjunto aberto.

22. Num PPL, o conjunto de valores das variáveis que satisfaz as restrições técnicas (funcionais) é uma solução admissível.

23. Num PPL padronizado, uma base de solução tem tantos vectores quantas as equações linearmente independentes.

24. Num PPL padronizado, uma matriz constitui uma base se e só se a matriz for não singular (determinante diferente de zero).

25. Um PPL com 2 variáveis de decisão e 3 restrições linearmente independentes do tipo "≤" tem, no máximo, 10 soluções básicas.

26. O número de extremos de um convexo de soluções pode ser infinito.

27. Uma restrição redundante implica a existência de recursos abundantes.

28. Na prática (vida real) as variáveis de um modelo de PL podem ser Livres (assumir valores positivos, negativos ou nulos).

29. Se o conjunto de soluções admissíveis de um PPL é um poliedro convexo, existe pelo menos um extremo que optimiza a Função Objectivo.

30. Uma restrição do tipo "=" pode ser substituída por duas desigualdades.

31. A maximização de uma função f(X) sujeita a um conjunto de restrições é equivalente a minimizar uma função g(X) = - f(X) sujeita ao mesmo conjunto de restrições e considerando Min g(X)= - Max f(X).

32. Num PPL com 4 restrições técnicas, uma iteração do método Simplex pode incluir mais do que 4 VB.

33. Uma solução básica obtida no método Simplex não coincide necessariamente com um extremo do convexo de soluções do PPL.

34. No método Simplex todas as variáveis devem ser não negativas.

35. Se "A", "B" e "C" forem 3 extremos do convexo de soluções do PPL, com "A" adjacente de "B" e "B" adjacente de "C", então "A" pode ser calculado a partir de "C" trocando exactamente 2 VB por 2 VNB.

36. No método Simplex a regra de paragem é a mesma quando se calcula Max f(X) ou Min f(X).

37. No método Simplex a técnica para escolher a variável que sai da base é diferente consoante se esteja em ambiente de Maximização ou Minimização.

38. No método Simplex ao escolher para uma nova base a variável que tem coeficiente negativo com maior valor absoluto, garante o aumento máximo da função objectivo na iteração seguinte.

39. No método Simplex o volume de cálculo aumenta primariamente com o número de restrições.

40. No método Simplex ao escolher para uma nova base a variável que tem coeficiente negativo com maior valor absoluto, garante o aumento do valor de f(X).

41. Uma solução básica é sempre uma solução admissível.

42. A situação de degeneração pode ser evitada se forem eliminadas as restrições redundantes.

43. No método Simplex a uma mudança de base corresponde sempre uma mudança de extremo.

44. Num PPL n-dimensional (n>2) o número de planos (restrições) que definem um extremo onde a solução é degenerada é, pelo menos, "n+1".

45. No método Simplex o número de iterações para atingir o óptimo é normalmente superior em situações de degeneração.

46. Se no quadro óptimo há uma ou mais VNB cujo vector só tem coordenadas negativas e/ou nulas, o máximo da função-objectivo é ilimitado.

47. Se uma VNB é seleccionável para uma nova base e o seu vector só tem coordenadas negativas e/ou nulas a solução é Ilimitada.

48. Se o espaço de solução for ilimitado o Max da função-objectivo é sempre ilimitado.

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

Soluções dos Exercícios

Cap. III – Método Simplex

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O.

1.

Min f(X) = $x_1 + x_2 + 0E_1 + 0E_2$

s.a.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
2x_1 & + & x_2 & - & E_1 & + & 0E_2 & = & 5 \\
x_1 & + & x_2 & + & 0E_1 & - & E_2 & = & 4 \\
 & & & & x_1, x_2, E_1, E_2 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

2.

As variáveis x_1 e x_2 não são " ≥ 0 " pelo que devem ser substituídas, no modelo, do seguinte modo :

$$x_1 = -x_1^{'} \; com \; x_1^{'} \geq 0$$
$$x_2 = x_2^{'} - x_2^{''} \; com \; x_2^{'}, x_2^{''} \geq 0$$

Modelo na forma-padrão do Simplex:

$$Min \;\; f(X) = -x_1^{'} + x_2^{'} - x_2^{''} + 0E_1 + 0E_2$$
$$s.a.$$
$$-2x_1^{'} + x_2^{'} - x_2^{''} - E_1 + 0E_2 = 5$$
$$-x_1^{'} + x_2^{'} - x_2^{''} + 0E_1 - E_2 = 4$$
$$x_1^{'}, x_2^{'}, x_2^{''}, E_1, E_2 \geq 0$$

3.

a.

	x1	x2	F1	F2	F3	VSM
F1	1	1	1	0	0	10
F2	3	3	0	1	0	24
F3	3	-1	0	0	1	12
f (X)	-8	-6	0	0	0	0

b. Deve ser seleccionada para entrada na base (nova VB) a variável x_1 por ser a variável não básica (VNB) que, na equação de f(X) , tem coeficiente negativo com maior valor absoluto.

c. Deve sair da base corrente a VB F_3 por ser a que garante, por troca com x_1 , que a nova solução seja básica e admissível.

De facto a menor "ratio" finita e não negativa é:

$\theta_{min} = \{ {}^{10}/_1 , {}^{24}/_3 , {}^{12}/_3 \} = 4$

Veja-se que a variável F_3 é a primeira a anular-se com a entrada de x_1 para a base.

d. A variável x_1 entra para a base com valor 4 (valor da menor "ratio" finita e não negativa) saindo da base a variável F_3.

A 3ª equação é : $3x_1 - x_2 + 0F_1 + 0F_2 + F_3 = 12$.

Atendendo a que x_2 tem valor nulo (é VNB) a equação é : $3x_1 + F_3 = 12$.

A variável F_3 sai da base ficando com valor nulo, pelo que a variável x_1 terá o valor 4 (que não é mais do que a menor "ratio" finita e não negativa já calculada) para satisfazer a equação.

Quando, por erro, se permite que a nova VB tenha valor superior ao da menor "ratio" fnita e não negativa, a nova solução não será admissível (na nova solução uma ou mais das VB terá valor negativo).

e.

(Matriz inversa da base nas colunas amarelas) **Objectivo atingido**

	x1	x2	F1	F2	F3	VSM	
F1	1	1	1	0	0	10	
F2	3	3	0	1	0	24	
F3	3	-1	0	0	1	12	
f (X)	-8	-6	0	0	0	0	Maximizar
F1	0	4/3	1	0	-1/3	6	
F2	0	4	0	1	-1	12	
x1	1	-1/3	0	0	1/3	4	
f (X)	0	-26/3	0	0	8/3	32	
F1	0	0	1	-1/3	0	2	
x2	0	1	0	1/4	-1/4	3	
x1	1	0	0	1/12	1/4	5	
f (X)	0	0	0	13/6	1/2	58	Óptimo

Solução Óptima:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; Max\ f(X^*) = 58$$

A solução óptima é Única porque só as VB têm coeficiente nulo na equação óptima de f(X).

4.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM
x_1	1	$^1/_3$	5	2	0	12
F_3	-1	$^2/_3$	4	5	1	10
f(X)	0	0	3	-2	2	24

A variável x_1 é VB na 1ª equação pelo que deve ter coeficiente nulo na 2ª equação.

A variável F_3 é VB na 2ªequação pelo que deve ter coeficiente nulo na equação de f(X).

5.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	$^1/_2$	1	3	5
F_1	0	4	0	12	- 4
f(X)	0	$-^2/_5$	3	7	13

A variável F_1 é VB na 2ª equação pelo que nesta deve ter coeficiente 1, devendo ter coeficiente nulo nas restantes equações.

O valor da VB F_1 não pode ser negativo (viola a restrição lógica $F_1 \geq 0$).

6.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_3$	$^2/_3$	5
x_2	0	1	$^2/_3$	5	4
f(X)	0	0	$^5/_3$	0	12

A solução é óptima porque na equação de f(X) todos os coeficientes são não negativos.

A solução Não É Única (é Indeterminada ou Múltipla) porque não é degenerada e há VNB com coeficiente nulo na equação óptima de f(X).

7.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_3$	$2/_3$	5
x_2	0	1	$^2/_3$	5	0
f(X)	0	0	$^5/_3$	0	12

A solução é óptima porque na equação de f(X) todos os coeficientes são não negativos.

Há uma VNB (F_2) com coeficiente nulo na equação óptima de f(X), mas a degeneração não permite calcular “ratio” finita não negativa que seja diferente de zero.

De facto, escolhendo F_2 para mudar de base, a “ratio” é nula e portanto na nova base a solução é exactamente igual à solução corrente. A solução óptima é Única.

8.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_3$	$^2/_3$	5
x_2	0	1	$^2/_3$	- 5	0
f(X)	0	0	$^5/_3$	0	12

A solução é óptima porque na equação de f(X) todos os coeficientes são não negativos.

Há uma VNB (F_2) com coeficiente nulo na equação óptima de f(X), e, apesar da degeneração, é possível calcular "ratio" finita não negativa diferente de zero.

De facto, escolhendo F_2 para a nova base por troca com a VB x_1 tem-se o óptimo alternativo:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_2	$^3/_2$	0	$^1/_2$	1	$15/_2$
x_2	$15/_2$	1	$^7/_3$	0	30
f(X)	0	0	$^5/_3$	0	12

Notar que esta mudança de base foi possível porque a divisão de "0" pelo coeficiente negativo de F_2 na 2ª equação só é feito se for útil para o cálculo e neste caso não é.

A solução óptima é Indeterminada com expressão geral:

$$X^* = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* = \alpha_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \\ 15/2 \end{bmatrix}; Max\, f(X^*) = 12$$

$$s.a.$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

9.

VB	x_1	x'_2	x''_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	0	5	1	10
x''_2	0	-1	1	3	4	3
f(X)	0	0	0	2	5	12

É óptima porque na equação de f(X) todos os coeficientes são não negativos.

É Única porque só as VB têm coeficiente nulo na equação óptima de f(X) (notar que as variáveis x'_2 e x''_2 representam a variável x_2).

10.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	-2	4	1	0	12
F_2	-2	3	0	1	13
f(X)	-1	-2	0	0	0

Falso. O problema tem solução Ilimitada porque x_1 é seleccionável para a base mas não tem limite superior, ou seja, com o vector de x_1 não é possível obter uma "ratio" finita e não negativa.

Usando o software do autor obtém:

	x1	x2	F1	F2	VSM	
F1	-2	4	1	0	12	
F2	-2	3	0	1	13	
f (X)	-1	-2	0	0	0	Maximizar
x2	- 1/ 2	1	1/ 4	0	3	Ratio...
F2	- 1/ 2	0	- 3/ 4	1	4	
f (X)	-2	0	1/ 2	0	6	

Programação Linear - Método Simplex

Solução Ilimitada

OK

Nota: Com o software, foi feita a 1ª mudança de base obedecendo à regra do Simplex. Na base seguinte tal regra indica x_1 como nova VB e como não há "ratio" finita e não negativa a conclusão é a já apresentada.

De facto, desde que haja uma VNB seleccionável para a base cujo vector só tem coordenadas negativas e/ou nulas, pode concluir-se imediatamente que a solução é ilimitada (é o caso presente com a variável x_1)

11.

Substituição prévia de variáveis: $x_1 = -x_1',\ x_2 = -x_2'\ com\ x_1', x_2' \geq 0$.

	x'1	x'2	F1	F2	VSM	
F1	5	9	1	0	140	
F2	9	5	0	1	55	
f (X)	-10	-12	0	0	0	Maximizar
F1	- 56/ 5	0	1	- 9/ 5	41	
x'2	9/ 5	1	0	1/ 5	11	
f (X)	58/ 5	0	0	12/ 5	132	Óptimo

Solução óptima (única) $X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -11 \\ 41 \\ 0 \end{bmatrix}; Max\, f(X^*) = 132$

12.

Substituição prévia de variável: $x_2 = -x_2' \ com \ x_2' \geq 0$.

	x1	x'2	E1	E2	E3	A1	A2	A3	VSM	
A1	4	3	-1	0	0	1	0	0	28	
A2	1	1	0	-1	0	0	1	0	6	
A3	3	5	0	0	-1	0	0	1	14	
f (A)						-1	-1	-1	0	Minimizar
f (A)	8	9	-1	-1	-1	0	0	0	48	
A1	11/5	0	-1	0	3/5	1	0	-3/5	98/5	
A2	2/5	0	0	-1	1/5	0	1	-1/5	16/5	
x'2	3/5	1	0	0	-1/5	0	0	1/5	14/5	
f (A)	13/5	0	-1	-1	4/5	0	0	-9/5	114/5	
A1	0	-11/3	-1	0	4/3	1	0	-4/3	28/3	
A2	0	-2/3	0	-1	1/3	0	1	-1/3	4/3	
x1	1	5/3	0	0	-1/3	0	0	1/3	14/3	
f (A)	0	-13/3	-1	-1	5/3	0	0	-8/3	32/3	
A1	0	-1	-1	4	0	1	-4	0	4	
E3	0	-2	0	-3	1	0	3	-1	4	
x1	1	1	0	-1	0	0	1	0	6	
f (A)	0	-1	-1	4	0	0	-5	-1	4	
E2	0	-1/4	-1/4	1	0	1/4	-1	0	1	
E3	0	-11/4	-3/4	0	1	3/4	0	-1	7	
x1	1	3/4	-1/4	0	0	1/4	0	0	7	
f (A)	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	Fim Passo 1
f (X)	-10	-6							0	Minimizar
f (X)	0	3/2	-5/2	0	0	5/2	0	0	70	
E2	1/3	0	-1/3	1	0	1/3	-1	0	10/3	
E3	11/3	0	-5/3	0	1	5/3	0	-1	98/3	
x'2	4/3	1	-1/3	0	0	1/3	0	0	28/3	
f (X)	-2	0	-2	0	0	2	0	0	56	Óptimo

Solução óptima (única)

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{28}{3} \\ 0 \\ \frac{10}{3} \\ \frac{98}{3} \end{bmatrix} ; Min\, f(X^*) = 56$$

13.

	x1	x2	E1	E2	A1	A2	VSM	
A1	1	2	-1	0	1	0	5	
A2	2	6	0	-1	0	1	12	
f (A)					-1	-1	0	Minimizar
f (A)	3	8	-1	-1	0	0	17	
A1	1/ 3	0	-1	1/ 3	1	- 1/ 3	1	
x2	1/ 3	1	0	- 1/ 6	0	1/ 6	2	
f (A)	1/ 3	0	-1	1/ 3	0	- 4/ 3	1	
x1	1	0	-3	1	3	-1	3	
x2	0	1	1	- 1/ 2	-1	1/ 2	1	
f (A)	0	0	0	0	-1	-1	0	Fim Passo 1
f (X)	-15	-9					0	Maximizar
f (X)	0	0	-36	21/ 2	36	- 21/ 2	54	
x1	1	3	0	- 1/ 2	0	1/ 2	6	Ratio...
E1	0	1	1	- 1/ 2	-1	1/ 2	1	
f (X)	0	36	0	- 15/ 2	0	15/ 2	90	

Programação Linear - Método Simplex

Solução Ilimitada

OK

Não há limite superior para a variável E_2 seleccionável para a nova base.

14.

	x1	x2	E2	E3	F1	A2	A3	VSM	
F1	7	14	0	0	1	0	0	42	
A2	0	1	-1	0	0	1	0	2	
A3	2	1	0	-1	0	0	1	4	
f (A)						-1	-1	0	Minimizar
f (A)	2	2	-1	-1	0	0	0	6	
F1	0	21/ 2	0	7/ 2	1	0	- 7/ 2	28	
A2	0	1	-1	0	0	1	0	2	
x1	1	1/ 2	0	- 1/ 2	0	0	1/ 2	2	
f (A)	0	1	-1	0	0	0	-1	2	
F1	0	0	21/ 2	7/ 2	1	- 21/ 2	- 7/ 2	7	
x2	0	1	-1	0	0	1	0	2	
x1	1	0	1/ 2	- 1/ 2	0	- 1/ 2	1/ 2	1	
f (A)	0	0	0	0	0	-1	-1	0	Fim Passo 1
f (X)	-5	-10						0	Maximizar
f (X)	0	0	- 15/ 2	- 5/ 2	0	15/ 2	5/ 2	25	
E2	0	0	1	1/ 3	2/ 21	-1	- 1/ 3	2/ 3	
x2	0	1	0	1/ 3	2/ 21	0	- 1/ 3	8/ 3	
x1	1	0	0	- 2/ 3	- 1/ 21	0	2/ 3	2/ 3	
f (X)	0	0	0	0	5/ 7	0	0	30	Óptimo

A Solução Óptima é Indeterminada (várias soluções óptimas) porque no quadro-óptimo há variáveis não básicas com coeficiente nulo na equação de f(X) e não há degeneração.

Mudando de base com a entrada da variável E_3 e saída da variável E_2 obtém-se outra solução óptima:

E3	0	0	3	1	2/7	-3	-1	2	
x2	0	1	-1	0	0	1	0	2	
x1	1	0	2	0	1/7	-2	0	2	
f (X)	0	0	0	0	5/7	0	0	30	Alternativa

As duas soluções óptimas calculadas são:

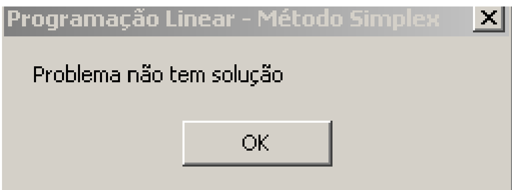
$$X_1^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X_2^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{matrix} Max\, f(X_1^*) = 30 \\ Max\, f(X_2^*) = 30 \end{matrix}$$

A expressão geral das soluções óptimas do problema é pois:

$$X^* = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* \quad com\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \ \wedge \ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0; \qquad Max\ f(X^*) = 30$$

15.

	x1	x2	E2	F1	A2	VSM	
F1	5	3	0	1	0	15	
A2	2	3	-1	0	1	20	
f (A)					-1	0	Minimizar
f (A)	2	3	-1	0	0	20	
x2	5/3	1	0	1/3	0	5	
A2	-3	0	-1	-1	1	5	
f (A)	-3	0	-1	-1	0	5	



O valor mínimo da função artificial é diferente de zero (há uma variável artificial que não atinge o valor zero) pelo que o problema não tem solução.

16.

	x1	x2	E2	F1	A2	VSM	
F1	1	5	0	1	0	10	
A2	1	7	-1	0	1	10	
f (A)					-1	0	Minimizar
f (A)	1	7	-1	0	0	10	
F1	2/7	0	5/7	1	-5/7	20/7	
x2	1/7	1	-1/7	0	1/7	10/7	
f (A)	0	0	0	0	-1	0	Fim Passo 1
f (X)	-8	-35				0	Maximizar
f (X)	-3	0	-5	0	5	50	
E2	2/5	0	1	7/5	-1	4	
x2	1/5	1	0	1/5	0	2	
f (X)	-1	0	0	7	0	70	
x1	1	0	5/2	7/2	-5/2	10	
x2	0	1	-1/2	-1/2	1/2	0	
f (X)	0	0	5/2	21/2	-5/2	80	Óptimo

Solução óptima (única)

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; Max\, f(X^*) = 80$$

a. Dispondo de uma solução óptima única se houver uma solução em que f(X) tenha o valor 80 é evidente que tal solução não é admissível. Esta questão é interessante porque vai mostrar que uma solução óptima degenerada ocorre num ponto do espaço que pode ser expresso matricialmente por mais do que uma base satisfazendo ou não a regra de paragem do Simplex.

Neste caso, mudando de base (entra F_1 por troca com x_2) obtém-se:

VB	x_1	x_2	E_2	F_1	A_2	VSM
F_1	0	-2	1	1	-1	0
x_1	1	7	-1	0	1	10
f(X)	0	21	- 8	0	8	80

Há f(X) = 80 mas a solução não satisfaz a regra de paragem do Simplex pelo que esta base não é óptima.

b. “Regra de paragem” do método do Simplex:

- Maximização de f(X): considera-se que f(X) atingiu o máximo quando na sua linha do quadro Simplex todas as variáveis da forma-padrão têm coeficiente não negativo.
- Minimização de f(X): considera-se que f(X) atingiu o mínimo quando na sua linha do quadro Simplex todas as variáveis da forma-padrão têm coeficiente não positivo.

c. Classificação da solução óptima no quadro Simplex

- Solução óptima Única: na equação de f(X) só as VB têm coeficiente nulo
- Solução óptima Indeterminada

  Na equação de f(X) há VNB com coeficiente nulo e a solução não é degenerada.

  Caso particular de solução degenerada:

  Se for possível, com o vector de uma das VNB com coeficiente nulo na equação de f(X), obter uma "ratio" mínima, finita e não nula a solução também é Indeterminada.

17.

	x1	x2	x3	E2	E3	A1	A2	A3	VSM	
A1	2	1	2	0	0	1	0	0	1	
A2	1	3	1	-1	0	0	1	0	3	
A3	4	5	1	0	-1	0	0	1	5	
f (A)						-1	-1	-1	0	Minimizar
f (A)	7	9	4	-1	-1	0	0	0	9	
x2	2	1	2	0	0	1	0	0	1	
A2	-5	0	-5	-1	0	-3	1	0	0	Para VNB
A3	-6	0	-9	0	-1	-5	0	1	0	
f (A)	-11	0	-14	-1	-1	-9	0	0	0	
x2	0	1	0	- 2/ 5	0	- 1/ 5	2/ 5	0	1	
x1	1	0	1	1/ 5	0	3/ 5	- 1/ 5	0	0	
A3	0	0	-3	6/ 5	-1	- 7/ 5	- 6/ 5	1	0	Para VNB
f (A)	0	0	-3	6/ 5	-1	- 12/ 5	- 11/ 5	0	0	
x2	0	1	0	- 2/ 5	0	- 1/ 5	2/ 5	0	1	
x1	1	0	0	3/ 5	- 1/ 3	2/ 15	- 3/ 5	1/ 3	0	
x3	0	0	1	- 2/ 5	1/ 3	7/ 15	2/ 5	- 1/ 3	0	
f (A)	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	Fim Passo 1
f (X)	-2	-1	-2						0	Maximizar
f (X)	0	0	0	0	0	1	0	0	1	Óptimo

a. Foi atingido Min f(A) = 0 com uma base contendo variáveis artificiais pelo que não é admissível (as variáveis artificiais não figuram na forma-padrão). As variáveis artificais foram trocadas (arbitrariamente) por VNB da forma-padrão Simplex e só então foi dado por concluído o 1º Passo do método dos 2 Passos.

   Escolheu-se a VNB x_1 para trocar com A_2 e a variável x_3 para trocar com A_3.

   Notar que após estas mudanças de base a equação de f(A) ficou com a configuração inicial (eis um método prático de reconhecer a conclusão do 1º Passo e passagem ao 2º Passo se Min f(A) = 0).

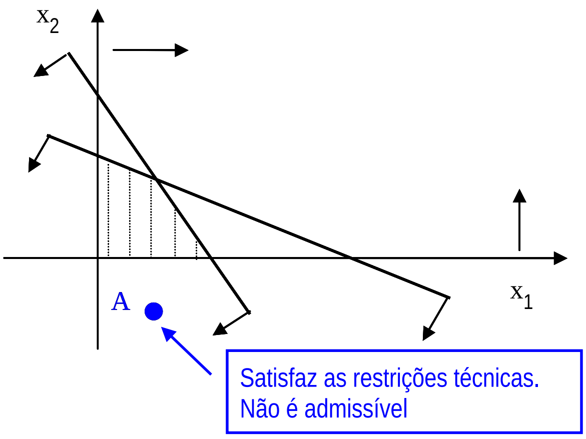
18. Verificação a cargo do leitor.

19. Verdadeira (notar que todas as restrições engloba as restrições técnicas e lógicas).

20. Verdadeira. No convexo de soluções só os seus extremos são soluções básicas admissíveis. Nos restantes pontos do convexo as soluções não são básicas mas são admissíveis.

21. Falsa.

22. Falsa (na figura o ponto "A" satisfaz as restrições técnicas mas não satisfaz as restrições lógicas x_1 , $x_2 \geq 0$).



23. Verdadeira.

24. Verdadeira.

25. Verdadeira. A forma-padrão do PPL tem 5 variáveis (2 variáveis decisão e 3 variáveis auxiliares). O sistema de equações tem pois 3 equações e 5 variáveis pelo que o número máximo de soluções básicas é $C_3^5 = 10$.

26. Falsa.

27. Falsa.

28. Verdadeira.

29. Verdadeira.

30. Verdadeira.

    A restrição $x_1 + x_2 = 2$ pode ser substituída pelo conjunto de restrições:

    $x_1 + x_2 \leq 2$

    $x_1 + x_2 \geq 2$

31. Verdadeira.

32. Falsa. O número de VB é sempre igual ao número de equações da forma-padrão do Simplex.

33. Falsa. Uma solução básica obtida com o método Simplex é sempre admissível pelo que coincide com um dos extremos do espaço de soluções admissíveis.

34. Verdadeira. Notar que na forma-padrão figura a condição $X \geq 0$.

35. Verdadeira. No método Simplex, em cada iteração é substituída uma variável por outra o que corresponde á passagem de um extremo do convexo de soluções para outro extremo adjacente (exceptuam-se situações de degeneração em que tal pode não suceder).

36. Falsa.

37. Falsa. A escolha da variável que sai da base tem apenas a ver com a solução admissível do sistema de equações técnicas sendo independente da função objectivo.

38. Falsa. O método do Gradiente é aplicado pelo método Simplex e, por essa razão, a afirmação é falsa como se constata no exemplo seguinte:

Max $f(X) = x_1 + 2x_2$

s.a.

$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & + & 6x_2 & \leq & 6 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Utilizando o método Simplex tem-se:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_1	2	5	1	0	10	"Ratio mínima" = 1
F_2	1	6	0	1	6	
f(X)	-1	-2	0	0	0	
x_2	1/6	1	0	1/6	1	Com a entrada de x_2
F_1	7/6	0	1	-5/6	5	a função aumentou
f(X)	-2/3	0	0	1/3	2	2 unidades

A "ratio mínima" = 1 é o valor com que x_2 entrou para a base. Sendo o seu coeficiente em f(X) igual a dois, o aumento de f(X) é 2(1) = 2.

Se repetirmos o cálculo seleccionando x_1 para entrada na base obtém-se:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_1	2	5	1	0	10	"Ratio mínima" = 5
F_2	1	6	0	1	6	
f(X)	-1	-2	0	0	0	
x_1	1	5/2	1/2	0	5	Com a entrada de x_1
F_2	0	7/2	-1/2	1	1	a função aumentou
f(X)	0	1/2	1/2	0	5	5 unidades

A "ratio mínima" = 5 é o valor com que x_1 entrou para a base. Sendo o seu coeficiente em f(X) igual a um, o aumento de f(X) é 1(5) = 5.

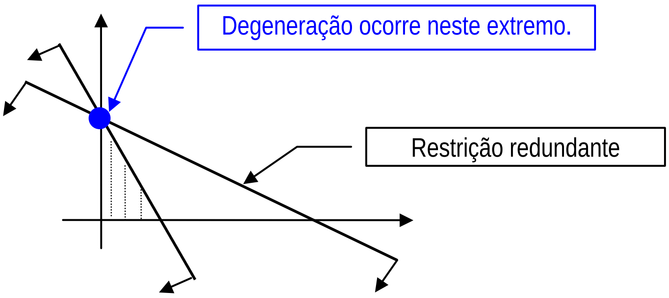
Conclui-se pois que o incremento de f(X) não depende apenas do coeficiente, em f(X), da variável que entra para a base.

39. Verdadeira.

40. Falsa. Veja-se o caso de soluções degeneradas com "ratio mínima" nula.

41. Falsa. Se uma solução é básica satisfaz o conjunto das restrições técnicas mas pode não satisfazer as condições lógicas (domínio das variáveis) como se viu na resposta à questão 22.

42. Verdadeira porque há soluções degeneradas quando há restrições redundantes (ver figura).



43. Falsa. A mudança de base pode ocorrer no mesmo extremo se neste a solução for degenerada. É esta a razão porque o cálculo com o método Simplex pode entrar em ciclo.

44. Verdadeira. Na figura da resposta 42 o extremo onde a solução é degenerada está na intersecção de 3 rectas (sendo o ambiente bidimensional). É por esta razão que "no mesmo ponto" há mais do que uma base.

45. Verdadeira.

46. Falsa. Nas condições descritas o que se conclui é que o conjunto de soluções é Ilimitado.

47. Verdadeira. A variável seleccionada para entrar na base não tem limite superior (não pode calcular-se uma "ratio" mínima finita e não negativa).

48. Falsa. Pode haver solução óptima finita em espaço de solução ilimitado.