# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

## Programação Linear

## Exercícios

## Cap. X – Programação por Metas

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O.

# X. Programação por Metas

1. Considere o modelo de PL:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$ (lucro da venda de mesas e cadeiras)

s.a.

$$\begin{array}{lcll} x_1 & & \geq & 30 & \text{(produção de mesas)} \\ & x_2 & \geq & 10 & \text{(produção de cadeiras)} \\ x_1 + & 2x_2 & \leq & 40 & \text{(operários)} \\ & x_1 , x_2 & \geq & 0 \text{ e Inteiro} & \end{array}$$

O problema não tem solução admissível pois os operários não são suficientes para satisfazer a produção mínima de mesas e cadeiras (seriam necessários, pelo menos, 30 + 20 = 50 operários).

Para ultrapassar a situação admita que as produções mínimas de mesas e cadeiras passam a constituir "metas" da empresa mantendo-se a maximização do lucro como critério de avaliação das soluções admissíveis.

Formalize como problema de metas e calcule a solução óptima.

2. Uma empresa produz três bens A, B e C em quantidades $x_1$ , $x_2$ e $x_3$ sendo as funções de lucro e de emprego da mão-de-obra as seguintes:

- $g_1(X) = 12x_1 + 18x_2 + 15x_3$ (lucro)
- $g_2(X) = 2x_1 + 6x_2 + 5x_3$ (mão-de-obra)

As restrições técnicas a cumprir são as seguintes:

- horas/máquina : $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 90$
- produção de A: igual ao dobro da produção de B
- produção de C: pelo menos o dobro da produção de A

O decisor pretende estudar a produção com as seguintes preferências:

- manter a mão-de-obra ao nível de 150 operários
- estabelecer como critério de avaliação de soluções a maximização de $2g_1(X) - 5g_2(X)$

Formalize como problema de metas e calcule a solução óptima.

3. Considere o seguinte modelo de PL para minimização de custos de produção:

   Min $f(X) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$

   s.a.

   $x_1 + 2x_2 \leq 9$

   $2x_1 + 3x_2 \geq 9$

   O decisor <u>pretende</u> a optimização dos custos tendo em consideração o seguinte:

   $$f_1(x_1) = \left| \begin{array}{l} 3x_1 \text{ para } x_1 \geq 0 \\ x_1 \text{ para } x_1 \leq 0 \end{array} \right.$$

   $$f_2(x_2) = \left| \begin{array}{l} 4x_2 \text{ para } x_2 \geq 0 \\ 3x_2 \text{ para } x_2 \leq 0 \end{array} \right.$$

   Formalize como problema de metas e calcule a solução óptima.

4. Considere a produção de A e B de acordo com os seguintes dados:

| | A | B | Meta | Prioridade |
|---|---|---|---|---|
| Capital (u.m.) | 1 | 2 | $\leq 20$ | 1ª |
| Pessoal | 1 | 1 | = 15 | 2ª |
| Lucro unitário (u.m.) | 2 | 1 | $\geq 40$ | 3ª |

   Formalize como problema de metas e calcule a solução óptima pelo método do Simplex modificado para Metas.

5. Apresente as alterações que introduziu, no método do Simplex usual, para resolver o problema anterior.

6. No Simplex modificado para Metas como detecta soluções óptimas alternativas?

7. Calcule a solução do problema 10.4 usando, no cálculo, um único objectivo ("Big M´s").

8. Considere a produção de mesas e cadeiras de acordo com o seguinte:

| | Mesa | Cadeira | Disponibilidade |
|---|---|---|---|
| Madeira ($m^2$) | 30 | 20 | 300 |
| Horas de trabalho | 5 | 10 | 110 |
| Treino do pessoal (horas) | 1 | 3 | |
| Receita da venda (u.m.) | 50 | 25 | |
| Lucro de venda (u.m.) | 6 | 8 | |

   O decisor pretende uma solução de compromisso que satisfaça simultaneamente:

   - lucro mínimo de 90 u.m.
   - receita da venda não inferior a 450 u.m.
   - treino do pessoal com mínimo de 30 horas

   Formalize como problema de metas e calcule a solução óptima.

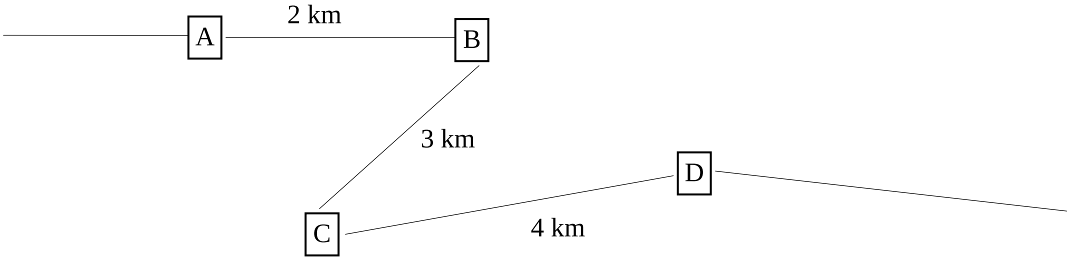
9. Considere o aumento do problema anterior com as seguintes preferências e prioridades do decisor:

| | Mesa | Cadeira |
|---|---|---|
| Investimento de capital (u.m.) | 44 | 17 |
| Pelo menos 4 cadeiras por mesa produzida | | |

Não ultrapassando 325 u.m. de investimento, adaptar o modelo anterior e calcular a solução óptima com as seguintes prioridades (ordem decrescente):

Lucro , Cadeiras / mesas , Capital , Receita , Treino

10. Admita que uma gasolineira pretende instalar uma estação de serviço tendo como potenciais clientes os habitantes das localidades situadas no seguinte conjunto rodoviário:

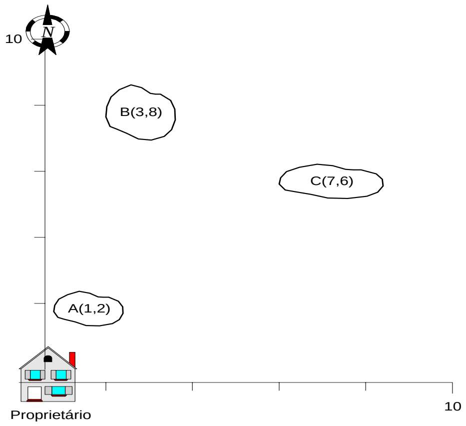


Nas localidades A, B, C e D estão recenseadas 100, 400, 200 e 300 viaturas respectivamente devendo o local escolhido minimizar o produto do número de viaturas recenseadas pela distância das localidades à estação de serviço.

Formalize como problema de metas e calcule a solução óptima.

11. O proprietário de uma herdade necessitando reforçar a capacidade de rega de três terrenos A, B e C decidiu efectuar um furo. A ligação deste aos terrenos será feita por tubagens instaladas exclusivamente nas direcções Norte-Sul e/ou Este-Oeste para facilitar o emprego de máquinas agrícolas sem destruição de tubagens.

As áreas de A, B e C são, respectivamente, 100, 300 e 200 hectares e a sua posição relativamente à casa do proprietário é a seguinte (eixos graduados em km):



Sendo o critério de localização "minimizar a soma dos produtos obtidos multiplicando a área de cada terreno pelo comprimento da tubagem que o liga ao furo", calcule o conjunto óptimo de tubagens a instalar.

12. Admita que para dactilografar na próxima semana, um documento com 1000 páginas, contactou 4 empresas (A, B, C, D) que prestam este serviço e recolheu a informação seguinte:

| Empresa | Custo/página (u.m.) | Nº páginas/hora | Erros/página | Horas disponíveis (próxima semana) |
|---|---|---|---|---|
| A | 3.5 | 6.4 | 0.015 | 50 |
| B | 2.4 | 5.2 | 0.018 | 40 |
| C | 3.75 | 7.5 | 0.008 | 50 |
| D | 3.9 | 8.8 | 0.012 | 35 |

Não sendo possível que uma única empresa efectue o trabalho na próxima semana, admita o recurso a mais do que uma delas considerando os seguintes critérios e prioridades:

- 1ª prioridade: trabalho executado no prazo de uma semana
- 2ª prioridade: não ter mais do que 12 erros no total das 1000 páginas
- 3ª prioridade: não gastar mais do que 3000 u.m.

Formalize como problema de metas e calcule a solução óptima.

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

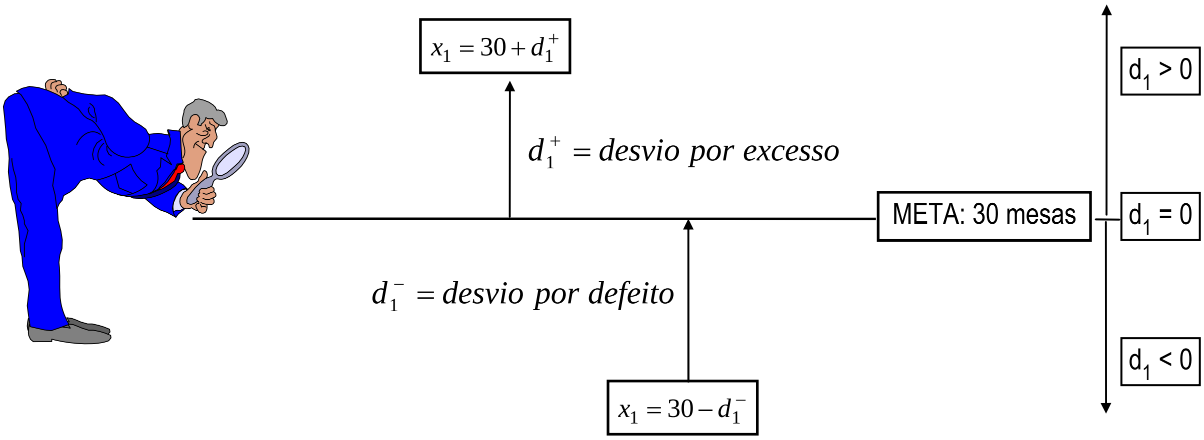
## Programação Linear

## Soluções dos Exercícios

## Cap. X – Programação por Metas

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O.

1. A produção mínima de 30 mesas, inicialmente imperativa , passa a ser a "meta" x1 = 30 + d1 em que “d1” é uma variável de desvio (livre). Esta variável pode ser substituída pela diferença entre duas variáveis não negativas associadas aos “desvios por excesso e defeito” respectivamente (ver figura).



A figura evidencia que a restrição inicial $x_1 \geq 30$ deve ser substituída pela Meta,

$$x_1 - d_1^+ + d_1^- = 30$$

Trata-se de uma relação que não é uma restrição técnica pois não restringe o espaço de soluções.

Se, por exemplo, a variável $x_1$ tiver valor 5, diz-se que a “Meta é cumprida por Defeito” pois a igualdade será satisfeita com $d_1^- = 25$ (notar que as duas variáveis de desvio são complementares, ou seja o seu produto é sempre nulo).

Se o decisor “deseja” $x_1 \geq 30$ está disponível para “ceder” perante um valor inferior (que pode limitar se achar necessário).

A adopção de “Metas” em vez de restrições técnicas conduz a obter uma solução de compromisso, ou seja, a melhor solução que a estrutura do modelo pode gerar.

Quando o modelo linear envolve “Metas” é de interesse organizar um quadro com as mesmas e identificar os desvios indesejáveis e a ponderação a associar-lhes.

No exemplo em curso temos então:

| Descrição | Preferência do decisor | Equação da Meta | Desvios Penalizáveis |
|---|---|---|---|
| Produção de mesas | $x_1 \geq 30$ | $x_1 - d_1^+ + d_1^- = 30$ | Defeito ( $d_1^-$ ) |
| Produção de cadeiras | $x_2 \geq 10$ | $x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10$ | Defeito ( $d_2^-$ ) |

Notar que na 1ª meta o “desvio por defeito $d_1^-$ ” deve ter o menor valor possível para que a produção fique tão próximo quanto possível da produção desejada de 30 mesas.

De igual modo, na 2ª meta, o “desvio por defeito $d_2^-$ ” deve ter o menor valor possível para que a produção fique tão próximo quanto possível da produção desejada de 10 cadeiras.

O modelo inicial deve pois ser substituído pelo modelo seguinte:

$Min\ \ f(D) = 6d_1^- + 8d_2^-$ (minimizar a perda de lucro)

s.a.

$$x_1 - d_1^+ + d_1^- = 30$$

$$x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0\ e\ Inteiro$$

A função f(D) minimiza a perda de lucro associada aos “desvios por defeito” (veja-se que para 1 mesa abaixo da meta a redução do lucro é de 6 u.m. sendo de 8 u.m. para idêntica situação com uma cadeira).

Recorrendo ao método “Branch and Bound” obtém-se a solução óptima (melhor "solução de compromisso"):

$$x_1 = 30; x_2 = 5; d_2^- = 5$$

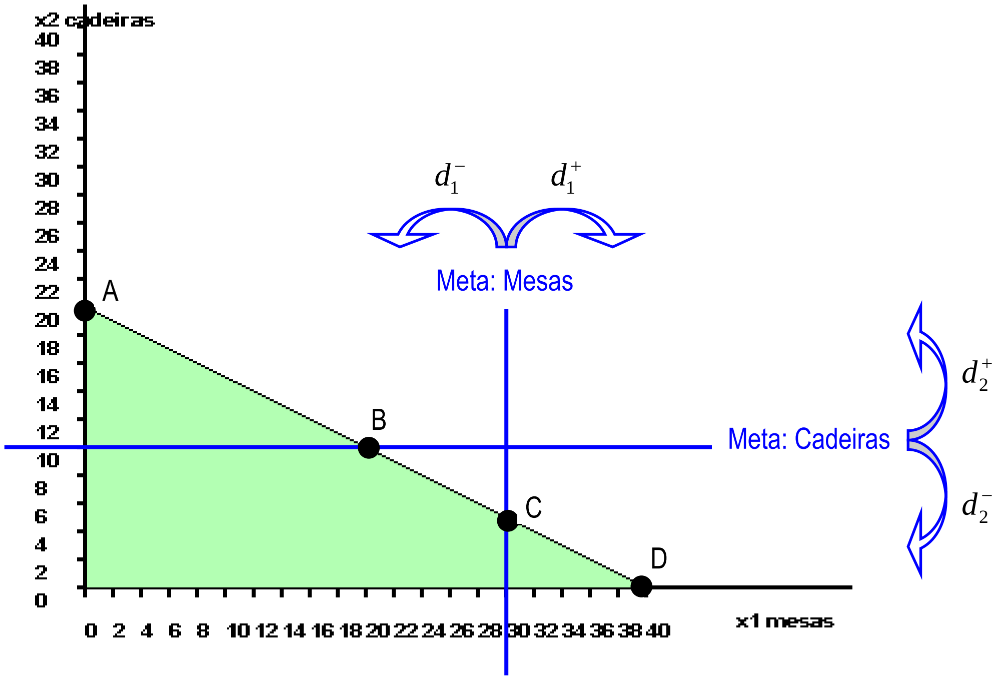
A 1ª meta é integralmente satisfeita (desvios por excesso e defeito são nulos).

A 2ª meta é cumprida por defeito ( $d_2^- = 5\ cadeiras$ ).

O plano óptimo de produção é pois de 30 mesas e 5 cadeiras.

O valor máximo do lucro da venda desta produção é f(X$^*$) = 6x$_1$ + 8x$_2$ = 180 + 40 = 220 u.m.

Veja-se na figura seguinte a interpretação geométrica:



Notar que o espaço de soluções é limitado exclusivamente pela restrição técnica $x_1 + 2x_2 \leq 40$. A solução óptima será a que minimiza a perda de lucro.

Analisemos a perda de lucro nos pontos A, B, C e D.

Ponto A ($x_1$ = 0 ; $x_2$ = 20)

Meta das Mesas:

$$x_1 - d_1^+ + d_1^- = 30 \Rightarrow 0 - 0 + 30 = 30\,.$$

Temos $d_1^- = 30$ o que penaliza o lucro em 6(30) = 180 u.m. (não há produção de mesas)

Meta das Cadeiras :

$$x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10 \Rightarrow 20 - 10 + 0 = 10\,.$$

Temos $d_2^- = 0$ não havendo penalização do lucro (produzem-se 10 cadeiras em excesso).

Valor dos desvios penalizantes (u.m.) = f(D) = 6(30) = 180 u.m.

Ponto B ($x_1$ = 20 ; $x_2$ = 10)

Meta das Mesas:

$$x_1 - d_1^+ + d_1^- = 30 \Rightarrow 20 - 0 + 10 = 30\,.$$

Temos $d_1^- = 10$ o que penaliza o lucro em 6(10) = 60 u.m. (10 mesas aquém da meta)

Meta das Cadeiras :

$$x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10 \Rightarrow 10 - 0 + 0 = 10\,.$$

Temos $d_2^- = 0$ não havendo penalização do lucro (produzem-se as 10 cadeiras desejadas).

Valor dos desvios penalizantes (u.m.) = f(D) = 6(10) = 60 u.m.

Ponto C ($x_1$ = 30 ; $x_2$ = 5)

Meta das Mesas:

$$x_1 - d_1^+ + d_1^- = 30 \Rightarrow 30 - 0 + 0 = 30\,.$$

Temos $d_1^- = 0$ não havendo penalização do lucro (produzem-se as 30 mesas desejadas).

Meta das Cadeiras :

$$x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10 \Rightarrow 5 - 0 + 5 = 10\,.$$

Temos $d_2^- = 5$ o que penaliza o lucro em f(D) = 8(5) = 40 u.m. (5 cadeiras aquém da meta)

Valor dos desvios penalizantes (u.m.) = f(D) = 8(5) = 40 u.m.

Ponto D ($x_1$ = 40 ; $x_2$ = 0)

Meta das Mesas:

$$x_1 - d_1^+ + d_1^- = 30 \Rightarrow 40 - 10 + 0 = 30\,.$$

Temos $d_1^- = 0$ não havendo penalização do lucro (produzem-se 10 mesas além do desejado).

Meta das Cadeiras :

$$x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10 \Rightarrow 0 - 0 + 10 = 10\ .$$

Temos $d_2^- = 10$ o que penaliza o lucro em f(D) = 8(10) = 80 u.m. (10 cadeiras aquém da meta)

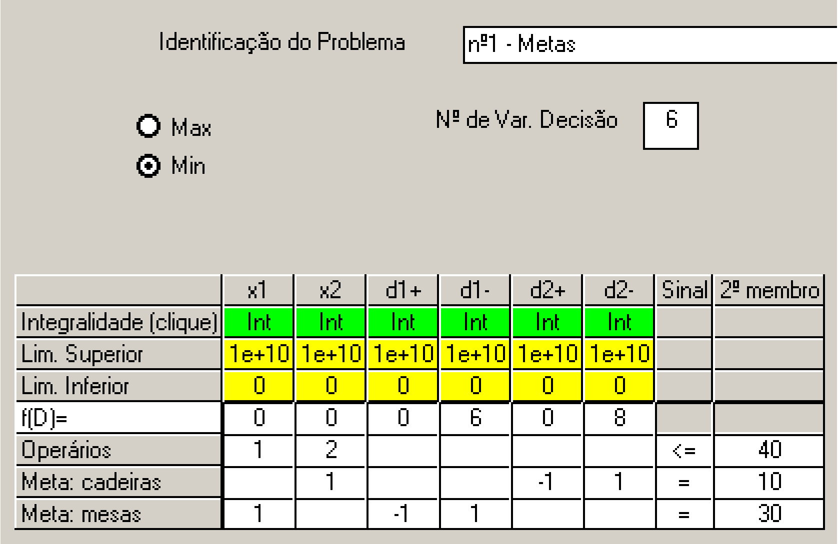
Valor dos desvios penalizantes (u.m.) = f(D) = 8(10) = 80 u.m.

Solução óptima (melhor solução de compromisso)

Ponto C ($x_1$ = 30 ; $x_2$ = 5) onde se verifica o valor mínimo dos desvios penalizantes: f(D) = 40 u.m.

Produzir 30 mesas e 5 cadeiras com lucro total máximo de f(X) = $6x_1$ + $8x_2$ = 220 u.m.

Recorrendo ao software do autor é esta a solução obtida:

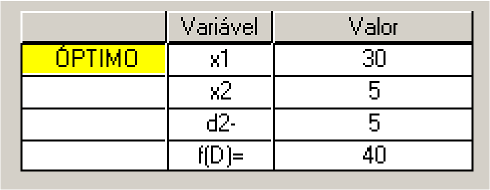


Identificação do Problema: nº1 - Metas

○ Max
● Min

Nº de Var. Decisão: 6

| | x1 | x2 | d1+ | d1- | d2+ | d2- | Sinal | 2º membro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Integralidade (clique) | Int | Int | Int | Int | Int | Int | | |
| Lim. Superior | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | | |
| Lim. Inferior | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| f(D)= | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 8 | | |
| Operários | 1 | 2 | | | | | <= | 40 |
| Meta: cadeiras | | 1 | | | -1 | 1 | = | 10 |
| Meta: mesas | 1 | | -1 | 1 | | | = | 30 |



| | Variável | Valor |
|---|---|---|
| ÓPTIMO | x1 | 30 |
| | x2 | 5 |
| | d2- | 5 |
| | f(D)= | 40 |

2.

| Descrição | Preferência do decisor | Equação da Meta | Desvios Penalizáveis |
|---|---|---|---|
| Mão-de-obra | $g_2(X) = 150$ | $2x_1 + 6x_2 + 5x_3 - d_1^+ + d_1^- = 150$ | Defeito ( $d_1^-$ )<br>Excesso ( $d_1^+$ ) |

## Estudo da Função objectivo a utilizar

Pretende-se Max $f(X) = 2g_1(X) - 5g_2(X) = 2(12x_1 + 18x_2 + 15x_3) - 5\ g_2(X) = 24x_1 + 36x_2 + 30x_3 - 5g_2(X)$

O desvio de $g_2(X)$ da meta “150” deve ser penalizado com coeficiente “-5” ou seja.

$$-5d_1^+ - 5d_1^-$$

A função a utilizar para optimização é pois $w(X) = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 5d_1^+ - 5d_1^-$ cujo gradiente permitirá calcular o ponto óptimo da produção (onde posteriormente será calculado o valor do lucro total).

Modelo para optimizar:

Max w(X) = $24x_1 + 36x_2 + 30x_3 - 5d_1^+ - 5d_1^-$

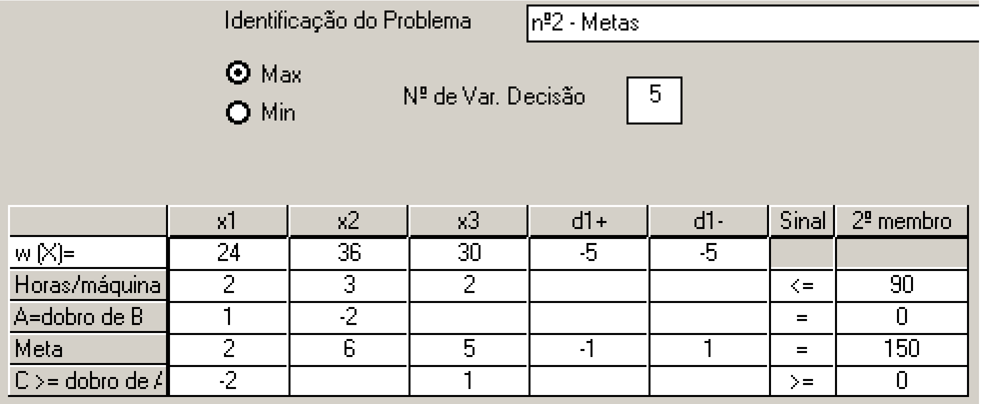
s.a. $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 90$ (restrição técnica para h/máquina)

$x_1 - 2x_2 = 0$ (restrição técnica da relação entre A e B)

$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 - d_1^+ + d_1^- = 150$ (meta para pessoal)

$-2x_1 + x_3 \geq 0$ (restrição técnica da relação entre A e C)

Utilizando o software do autor:



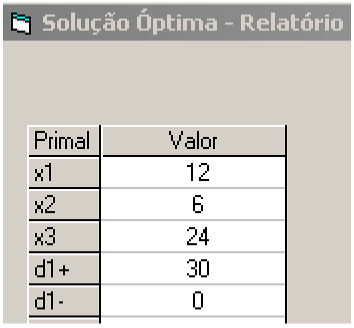
Identificação do Problema: nº2 - Metas

● Max
○ Min

Nº de Var. Decisão: 5

| | x1 | x2 | x3 | d1+ | d1- | Sinal | 2º membro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w (X)= | 24 | 36 | 30 | -5 | -5 | | |
| Horas/máquina | 2 | 3 | 2 | | | <= | 90 |
| A=dobro de B | 1 | -2 | | | | = | 0 |
| Meta | 2 | 6 | 5 | -1 | 1 | = | 150 |
| C >= dobro de | -2 | | 1 | | | >= | 0 |

obtém-se a solução óptima:



Solução Óptima - Relatório

| Primal | Valor |
|---|---|
| x1 | 12 |
| x2 | 6 |
| x3 | 24 |
| d1+ | 30 |
| d1- | 0 |

Leitura da solução óptima

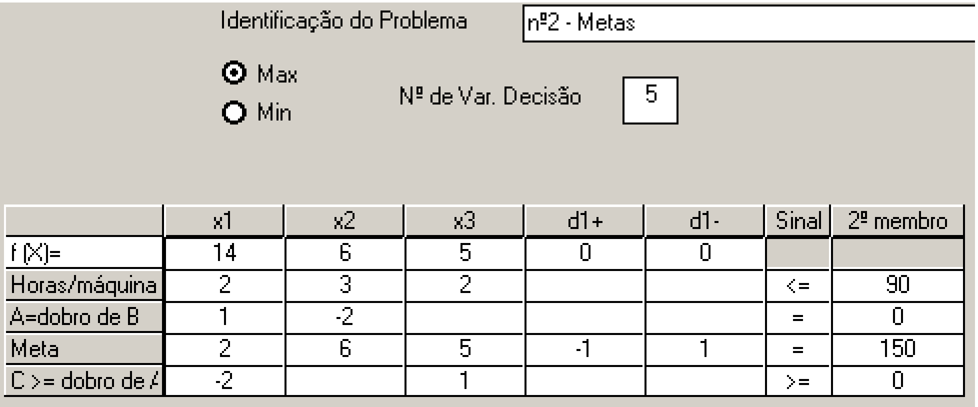
Produzir 12 unidades de"A", 6 unidades de "B" e 24 unidades de "C".

São necessários 180 operários (desvio por excesso de 30 operários).

Valor máximo do lucro = f(X) = $2g_1(X) - 5g_2(X)$ = 1224 – 900 = 324 u.m.

Nota: Igual resultado seria obtido usando a função objectivo:

Max f(X) = $2g_1(X) - 5g_2(X) = 2(12x_1 + 18x_2 + 15x_3) - 5(2x_1 + 6x_2 + 5x_3) = 14x_1 + 6x_2 + 5x_3$

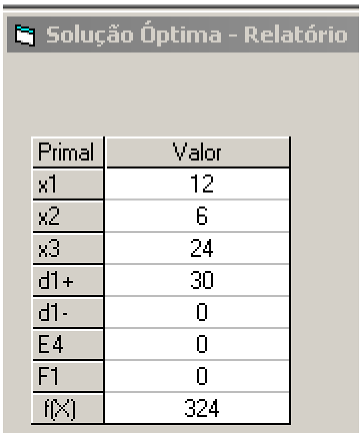


Identificação do Problema: nº2 - Metas

● Max
○ Min

Nº de Var. Decisão: 5

| | x1 | x2 | x3 | d1+ | d1- | Sinal | 2º membro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f (X)= | 14 | 6 | 5 | 0 | 0 | | |
| Horas/máquina | 2 | 3 | 2 | | | <= | 90 |
| A=dobro de B | 1 | -2 | | | | = | 0 |
| Meta | 2 | 6 | 5 | -1 | 1 | = | 150 |
| C >= dobro de | -2 | | 1 | | | >= | 0 |



Solução Óptima - Relatório

| Primal | Valor |
|---|---|
| x1 | 12 |
| x2 | 6 |
| x3 | 24 |
| d1+ | 30 |
| d1- | 0 |
| E4 | 0 |
| F1 | 0 |
| f(X) | 324 |

Veja-se que o efeito da variável de desvio "$d_1$" é ajustar a mão-de-obra para consumir o máximo de horas disponíveis.

De facto se a mão-de-obra for declarada como restrição técnica, $2x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 150$, na solução óptima constata-se que o completo aproveitamento dos 150 operários apenas necessita de 75 das 90 horas disponíveis (deixa-se ao leitor a tarefa de verificar esta informação).

3. Como $x_1$ e $x_2$ podem ter valor sem restrição de sinal são variáveis livres.

Se $x_1 \geq 0$ então $x_1 = x_1^+$ e no caso contrário $x_1 = x_1^-$ ($x_1^+$ e $x_1^-$ não são mais do que os desvios por excesso e defeito do valor de $x_1$ e relação ao valor zero).

Actuando de igual modo com a variável $x_2$ tem-se:

$$f_1(x_1) = 3x_1^+ + x_1^- \text{ e } f_2(x_2) = 4x_2^+ + 3x_2^-$$

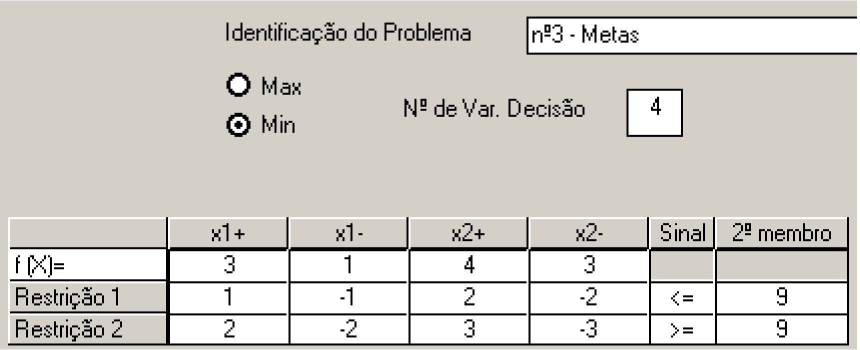
Para as restrições técnicas temos que considerar $x_1 = x_1^+ - x_1^-$ e $x_2 = x_2^+ - x_2^-$.

Modelo para optimizar:

$$Min\ f(X) = 3x_1^+ + x_1^- + 4x_2^+ + 3x_2^-$$

s.a.

$$(x_1^+ - x_1^-) + 2(x_2^+ - x_2^-) \leq 9$$
$$2(x_1^+ - x_1^-) + 3(x_2^+ - x_2^-) \geq 9$$
$$x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^- \geq 0$$

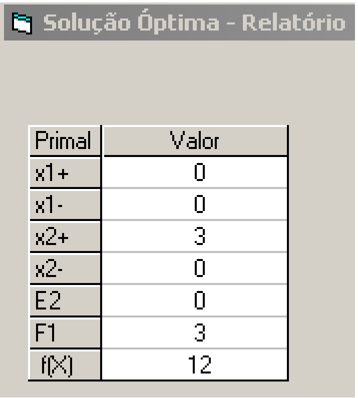


Identificação do Problema: nº3 - Metas

○ Max
● Min

Nº de Var. Decisão: 4

| | x1+ | x1- | x2+ | x2- | Sinal | 2º membro |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f (X)= | 3 | 1 | 4 | 3 | | |
| Restrição 1 | 1 | -1 | 2 | -2 | <= | 9 |
| Restrição 2 | 2 | -2 | 3 | -3 | >= | 9 |



Solução Óptima - Relatório

| Primal | Valor |
|---|---|
| x1+ | 0 |
| x1- | 0 |
| x2+ | 3 |
| x2- | 0 |
| E2 | 0 |
| F1 | 3 |
| f(X) | 12 |

$$x_1 = x_1^+ - x_1^- = 0\ ;\ x_2 = x_2^+ - x_2^- = 3 - 0 = 3$$

A solução óptima é $x_1 = 0$ ; $x_2 = 3$ ; Min f(X) =12 u.m.

4. Considerem-se $x_1$ e $x_2$ a produção de A e B respectivamente.

| Descrição | Preferência do decisor | Equação da Meta | Desvios Penalizáveis |
|---|---|---|---|
| Capital | $x_1 + 2x_2 \le 20$ | $x_1 + 2x_2 - d_1^+ + d_1^- = 20$ | Excesso ( $d_1^+$ ) |
| Pessoal | $x_1 + x_2 = 15$ | $x_1 + x_2 - d_2^+ + d_2^- = 15$ | Excesso e Defeito ( $d_2^+, d_2^-$ ) |
| Lucro | $2x_1 + x_2 \ge 40$ | $2x_1 + x_2 - d_3^+ + d_3^- = 40$ | Defeito ( $d_3^-$ ) |

Modelo para optimizar:

1ª prioridade : $Min \; f_1 = d_1^+$

2ª prioridade : $Min \; f_2 = d_2^+ + d_2^-$

3ª prioridade : $Min \; f_3 = d_3^-$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 - d_1^+ + d_1^- = 20$$

$$x_1 + x_2 - d_2^+ + d_2^- = 15$$

$$2x_1 + x_2 - d_3^+ + d_3^- = 40$$

$$x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \ge 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

Cálculo da solução óptima utilizando o “Simplex – Metas”:

| VB | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^+$ | $d_1^-$ | $d_2^+$ | $d_2^-$ | $d_3^+$ | $d_3^-$ | VSM | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1^-$ | 1 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 20 | |
| $d_2^-$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 15 | |
| $d_3^-$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 40 | |
| $f_1$ | | | -1 | | | | | | 0 | |
| $f_1$ | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | Optimizar $f_1$ (1ª prioridade) |

Em $f_1$ todos os coeficientes são não positivos (solução óptima). Min $f_1$ = 0.

A 1ª prioridade é integralmente satisfeita.

Na optimização das prioridades seguintes a variável $d_1^+$ deve manter-se nula garantindo assim o valor óptimo obtido $Min \; f_1 = d_1^+ = 0$.

Passemos à optimização da função $f_2$:

| VB | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^+$ | $d_1^-$ | $d_2^+$ | $d_2^-$ | $d_3^+$ | $d_3^-$ | VSM | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1^-$ | 1 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 20 | |
| $d_2^-$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 15 | |
| $d_3^-$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 40 | |
| $f_2$ | | | | | -1 | -1 | | | | Optimizar $f_2$ (2ª prioridade).<br>Anular em $f_2$ o coeficiente de $d_2^-$ |
| $f_2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 15 | Entra para a base $x_1$ (ou $x_2$) |
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 15 | |
| $d_1^-$ | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 5 | |
| $d_3^-$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 | -2 | -1 | 1 | 10 | |
| $f_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | Óptimo para $f_2$ |

Em $f_2$ todos os coeficientes são não positivos (solução óptima). Min $f_2 = 0$.

A 2ª prioridade é integralmente satisfeita.

Na optimização das prioridades seguintes as variáveis $d_1^+$ , $d_2^+, d_2^-$ devem manter-se nulas garantindo assim o valor óptimo $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$.

Passemos à optimização da função $f_3$:

| VB | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^+$ | $d_1^-$ | $d_2^+$ | $d_2^-$ | $d_3^+$ | $d_3^-$ | VSM | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 15 | |
| $d_1^-$ | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 5 | |
| $d_3^-$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 | -2 | -1 | 1 | 10 | |
| $f_3$ | | | | | | | | -1 | | Optimizar $f_3$ (3ª prioridade).<br>Anular em $f_3$ o coeficiente de $d_3^-$ |
| $f_3$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 | -2 | -1 | 0 | 10 | Entra $d_2^+$ |

Verifica-se que a entrada para a base da variável $d_2^+ = 5$ degrada o valor óptimo já obtido para Min $f_2 = 0$.

A mudança de base não pode portanto ser efectuada considerando-se atingido o valor óptimo Min $f_3 = 10$.

Leitura da solução "óptima"

Produção : 15 unidades de A.

Lucro máximo = $2x_1 + x_2 = 30$ u.m.

Metas do decisor

1ª prioridade (capital) : integralmente satisfeita (Min $f_1 = 0$).

2ª prioridade (pessoal) : integralmente satisfeita (Min $f_2 = 0$).

3ª prioridade (lucro) : satisfeita por defeito (menos 10 u.m.). Min $f_3 = 10$.

5.

- Escolha de nova VB

  Uma VNB seleccionável para a base só é escolhida se e só se não conduzir à degradação do valor óptimo já atingido para funções de prioridade superior à da função em curso de optimização (sucedeu no exercício anterior ao iniciar-se a optimização de $f_3$).

- Empate na escolha de nova VB

  Se duas ou mais VNB podem ser escolhidas para entrada na base a decisão é arbitrária.

- Empate na escolha da nova VNB (saída da base)

  Se a menor "ratio" não negativa é obtida em mais do que uma das equações técnicas, sai da base a VB associada à equação da meta de maior prioridade. Se tal se verifica em metas de igual prioridade a escolha é arbitrária.

6. A solução do problema Primal é única se, não sendo degenerada, só as VB têm coeficiente nulo nas equações de todas as funções optimizadas.

Retomando, a título de exemplo, a questão nº 4 o quadro final é o seguinte:

| VB | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^+$ | $d_1^-$ | $d_2^+$ | $d_2^-$ | $d_3^+$ | $d_3^-$ | VSM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| $d_1^-$ | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 5 |
| $d_3^-$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 | -2 | -1 | 1 | 10 |
| $f_1$ | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $f_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $f_3$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 | -2 | -1 | 0 | 10 |

A solução óptima é única porque não é degenerada e só as VB têm coeficiente nulo em todas as equações das funções optimizadas.

7. Constitui-se um objectivo único f = $M_1$ $f_1$ + $M_2$ $f_2$ + ....... + $M_{k-1}$ $f_{k-1}$ + 1$f_k$ que reúne "k" objectivos.

Os coeficientes $M_1$ , $M_2$ , ... , $M_{k-1}$ , 1 são tais que $M_1$ é muito maior do que $M_2$ , $M_2$ é muito maior do que $M_3$ e assim sucessivamente.

No problema corrente pretende-se minimizar $f_1$ , $f_2$ , $f_3$ , por esta ordem, pelo que se organiza e minimiza a função:

$$\text{Min } f = M_1 f_1 + M_2 f_2 + f_3$$

Modelo para optimizar:

$$Min \;\; f(D) = M_1 d_1^+ + M_2(d_2^+ + d_2^-) + d_3^- \quad com \; M_1 >> M_2 >> 1$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 - d_1^+ + d_1^- = 20$$

$$x_1 + x_2 - d_2^+ + d_2^- = 15$$

$$2x_1 + x_2 - d_3^+ + d_3^- = 40$$

$$x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Cálculo da solução óptima:

| VB | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^+$ | $d_1^-$ | $d_2^+$ | $d_2^-$ | $d_3^+$ | $d_3^-$ | VSM | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1^-$ | 1 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 20 | |
| $d_2^-$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 15 | |
| $d_3^-$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 40 | |
| f(D) | | | $-M_1$ | | $-M_2$ | $-M_2$ | | -1 | 0 | Anular coeficientes das VB $d_2^-$ e $d_3^-$ |
| f(D) | $M_2 + 2$ | $M_2 + 1$ | $-M_1$ | 0 | $-2M_2$ | 0 | -1 | 0 | $15M_2 + 40$ | Entra $x_1$ . Sai $d_2^-$ |
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 15 | |
| $d_1^-$ | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5 | |
| $d_3^-$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 | 0 | -1 | 1 | 10 | |
| f(D) | 0 | -1 | $-M_1$ | 0 | $-M_2 + 2$ | $-M_2 - 2$ | -1 | 0 | 10 | Óptimo |

Leitura da solução "óptima"

Produção : 15 unidades de A.

Lucro máximo = $2x_1 + x_2$ = 30 u.m.

Metas do decisor

1ª prioridade : $Min \;\; f_1 = d_1^+ = 0$

2ª prioridade : $Min \;\; f_2 = d_2^+ + d_2^- = 0$

3ª prioridade : $Min \;\; f_3 = d_3^- = 10$

8. Preferências do decisor e desvios indesejáveis:

| Descrição | Preferência do decisor | Equação da Meta | Desvios Penalizáveis |
|---|---|---|---|
| Lucro | $6x_1 + 8x_2 \geq 90$ u.m. | $6x_1 + 8x_2 - d_1^+ + d_1^- = 90$ | $d_1^-$ |
| Receita da venda | $50x_1 + 25x_2 \geq 450$ u.m. | $50x_1 + 25x_2 - d_2^+ + d_2^- = 450$ | $d_2^-$ |
| Treino do pessoal | $x_1 + 3x_2 \geq 30$ h | $x_1 + 3x_2 - d_3^+ + d_3^- = 30$ | $d_3^-$ |

Modelo para optimizar:

$$Min\ f = d_1^- + d_2^- + d_3^-$$

s.a.

$$30x_1 + 20x_2 \leq 300$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 110$$

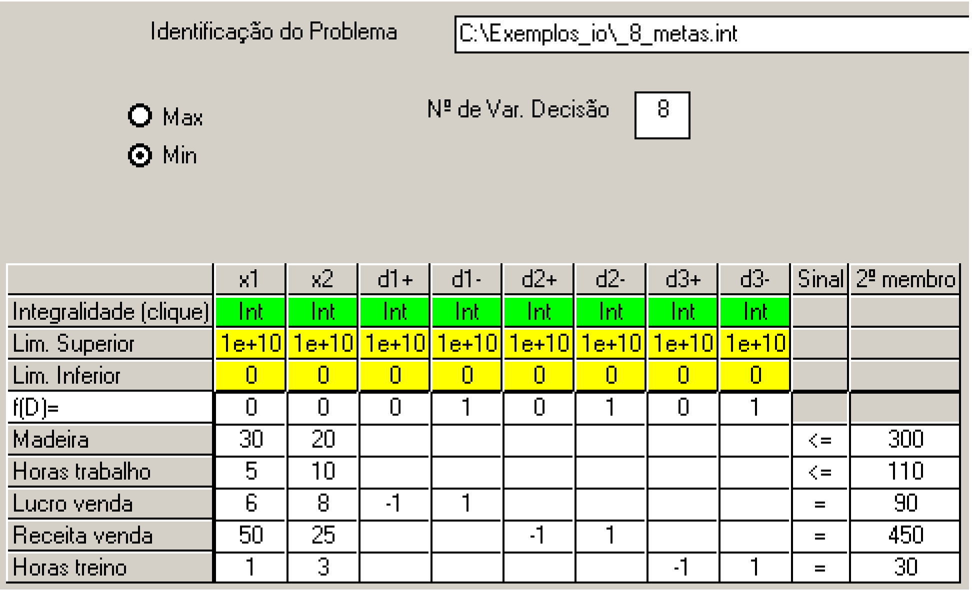
$$6x_1 + 8x_2 - d_1^+ + d_1^- = 90$$

$$50x_1 + 25x_2 - d_2^+ + d_2^- = 450$$

$$x_1 + 3x_2 - d_3^+ + d_3^- = 30$$

$$x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geq 0\ e\ Inteiro \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Utilizando o software tem-se:

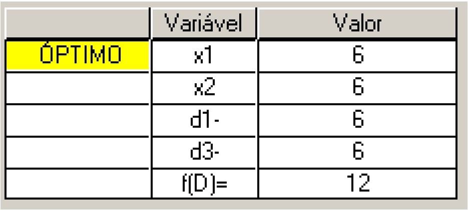


Identificação do Problema C:\Exemplos_io_8_metas.int

○ Max
● Min

Nº de Var. Decisão 8

| | x1 | x2 | d1+ | d1- | d2+ | d2- | d3+ | d3- | Sinal | 2º membro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Integralidade (clique) | Int | Int | Int | Int | Int | Int | Int | Int | | |
| Lim. Superior | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | | |
| Lim. Inferior | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| f(D)= | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | |
| Madeira | 30 | 20 | | | | | | | <= | 300 |
| Horas trabalho | 5 | 10 | | | | | | | <= | 110 |
| Lucro venda | 6 | 8 | -1 | 1 | | | | | = | 90 |
| Receita venda | 50 | 25 | | | -1 | 1 | | | = | 450 |
| Horas treino | 1 | 3 | | | | | -1 | 1 | = | 30 |



| | Variável | Valor |
|---|---|---|
| ÓPTIMO | x1 | 6 |
| | x2 | 6 |
| | d1- | 6 |
| | d3- | 6 |
| | f(D)= | 12 |

$x_1 = 6$ ( produzir 6 mesas) ; $x_2 = 6$ ( produzir 6 cadeiras) ; $d_1^- = 6$ (só é possível obter 90 - 6 = 84 u.m. de lucro) ; $d_2^- = 0$ (é possível obter a receita de 450 u.m.) ; $d_3^- = 6$ (só é possível efectuar 30 - 6 = 24 horas de treino).

9.

| Descrição | Preferência do decisor | Equação da Meta | Desvios Penalizáveis | Prioridade |
|---|---|---|---|---|
| Lucro | $6x_1 + 8x_2 \geq 90.$ | $6x_1 + 8x_2 - d_1^+ + d_1^- = 90$ | $d_1^-$ | 1 |
| Cad./mesas | $4x_1 - x_2 \leq 0$ | $4x_1 - x_2 - d_2^+ + d_2^- = 0$ | $d_2^+$ | 2 |
| Capital | $44x_1 + 17x_2 \leq 325$ | $44x_1 + 17x_2 - d_3^+ + d_3^- = 325$ | $d_3^+$ | 3 |
| Rec. venda | $50x_1 + 25x_2 \geq 450$ | $50x_1 + 25x_2 - d_4^+ + d_4^- = 450$ | $d_4^-$ | 4 |
| Treino | $x_1 + 3x_2 \geq 30$ | $x_1 + 3x_2 - d_5^+ + d_5^- = 30$ | $d_5^-$ | 5 |

Modelo para optimizar:

$$Min\ \ f(D) = M_1 d_1^- + M_2 d_2^+ + M_3 d_3^+ + M_4 d_4^- + d_5^-$$

$$s.a.$$

$$30x_1 + 20x_2 \leq 300$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 110$$

$$6x_1 + 8x_2 - d_1^+ + d_1^- = 90$$

$$4x_1 - x_2 - d_2^+ + d_2^- = 0$$

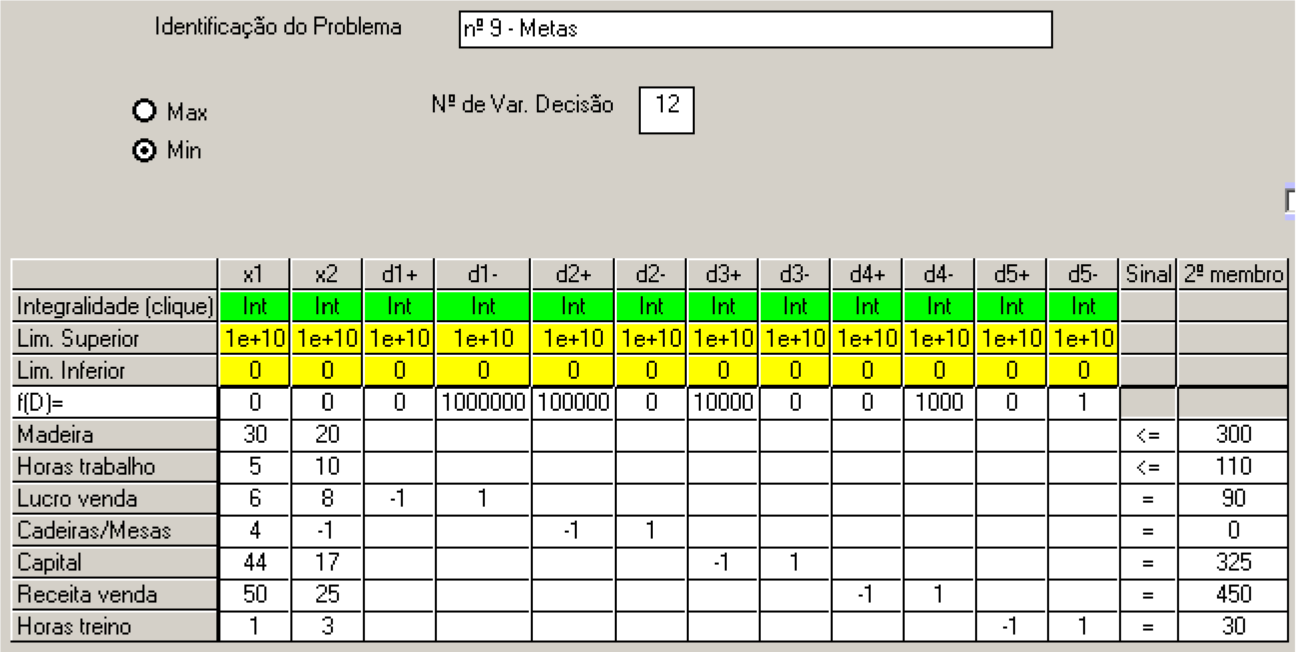
$$44x_1 + 17x_2 - d_3^+ + d_3^- = 325$$

$$50x_1 + 25x_2 - d_4^+ + d_4^- = 450$$

$$x_1 + 3x_2 - d_5^+ + d_5^- = 30$$

$$x_j; d_i^+; d_i^- \geq 0\ e\ Inteiro \quad (j = 1,2;\ i = 1\ a\ 5)$$

Utilizando o software do autor tem-se (utilizando o método dos “Big M’s”):



Identificação do Problema: nº 9 - Metas

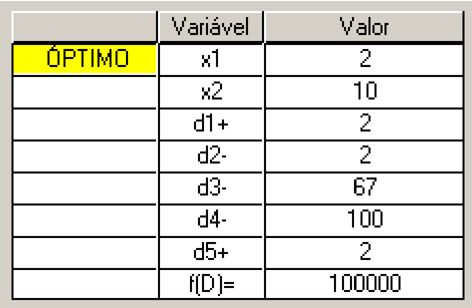
○ Max
● Min

Nº de Var. Decisão: 12

| | x1 | x2 | d1+ | d1- | d2+ | d2- | d3+ | d3- | d4+ | d4- | d5+ | d5- | Sinal | 2º membro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Integralidade (clique) | Int | Int | Int | Int | Int | Int | Int | Int | Int | Int | Int | Int | | |
| Lim. Superior | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | 1e+10 | | |
| Lim. Inferior | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| f(D)= | 0 | 0 | 0 | 1000000 | 100000 | 0 | 10000 | 0 | 0 | 1000 | 0 | 1 | | |
| Madeira | 30 | 20 | | | | | | | | | | | <= | 300 |
| Horas trabalho | 5 | 10 | | | | | | | | | | | <= | 110 |
| Lucro venda | 6 | 8 | -1 | 1 | | | | | | | | | = | 90 |
| Cadeiras/Mesas | 4 | -1 | | | -1 | 1 | | | | | | | = | 0 |
| Capital | 44 | 17 | | | | | -1 | 1 | | | | | = | 325 |
| Receita venda | 50 | 25 | | | | | | | -1 | 1 | | | = | 450 |
| Horas treino | 1 | 3 | | | | | | | | | -1 | 1 | = | 30 |

Notar o valor, em f(D), dos coeficientes dos desvios penalizáveis:

$M_1$ = 1 000 000 ; $M_2$ = 100 000 ; $M_3$ = 10 000 ; $M_4$ = 1 000 ; $M_5$ = 1



| | Variável | Valor |
|---|---|---|
| ÓPTIMO | x1 | 2 |
| | x2 | 10 |
| | d1+ | 2 |
| | d2- | 2 |
| | d3- | 67 |
| | d4- | 100 |
| | d5+ | 2 |
| | f(D)= | 100000 |

Produção óptima: 2 mesas ($x_1 = 2$) e 10 cadeiras ($x_2 = 10$)

$d_1^+ = 2$ (Lucro = 92 u.m. ; excesso de 2 u.m. no lucro ; $Min\ f_1 = d_1^- = 0$ ; 1ª meta satisfeita)

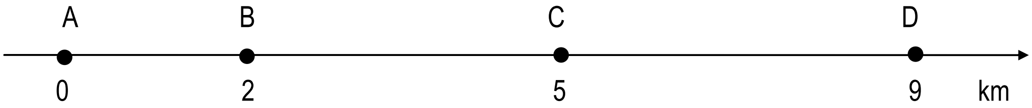
$d_2^- = 2$ (excesso de 2 cadeiras; $Min\ f_2 = d_2^+ = 0$ ; 2ª meta satisfeita)

$d_3^- = 67$ (defeito de 67 u.m. no capital a investir; $Min\ f_3 = d_3^+ = 0$ ; 3ª meta satisfeita)

$d_4^- = 100$ (defeito de 100 u.m. na receita da venda; $Min\ f_4 = d_4^- = 100$ ; 4ª meta não satisfeita)

$d_5^+ = 2$ (excesso de 2 horas de treino ; $Min\ f_5 = d_5^- = 0$ ; 5ª meta satisfeita)

10. Considere-se um eixo de abcissas (km) e as localidades na sua posição relativa:

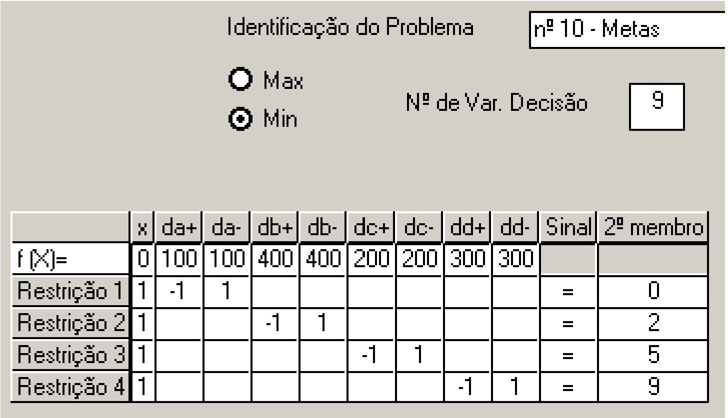


Admitindo a estação localizada na abcissa de valor "x", a distância a que ficará cada uma das localidades é um desvio relativamente ao desejável (<u>estação na própria localidade</u>):

| Descrição | Preferência do decisor | Equação da Meta | Desvios Penalizáveis |
|---|---|---|---|
| A | x = 0 | $x - d_A^+ + d_A^- = 0$ | Ambos |
| B | x = 2 | $x - d_B^+ + d_B^- = 2$ | Ambos |
| C | x = 5 | $x - d_C^+ + d_C^- = 5$ | Ambos |
| D | x = 9 | $x - d_D^+ + d_D^- = 9$ | Ambos |

Objectivo: $Min\ f(D) = 100(d_A^+ + d_A^-) + 400(d_B^+ + d_B^-) + 200(d_C^+ + d_C^-) + 300(d_D^+ + d_D^-)$

Todas as variáveis do modelo são não negativas.

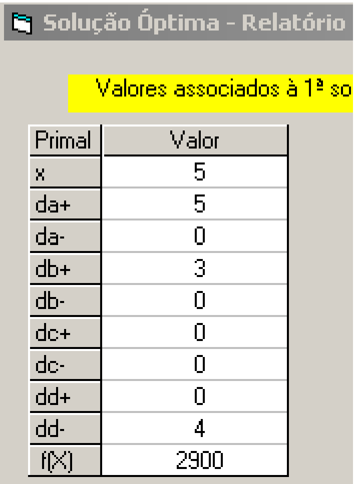


Identificação do Problema: nº 10 - Metas

○ Max
● Min

Nº de Var. Decisão: 9

| | x | da+ | da- | db+ | db- | dc+ | dc- | dd+ | dd- | Sinal | 2º membro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f (X)= | 0 | 100 | 100 | 400 | 400 | 200 | 200 | 300 | 300 | | |
| Restrição 1 | 1 | -1 | 1 | | | | | | | = | 0 |
| Restrição 2 | 1 | | | -1 | 1 | | | | | = | 2 |
| Restrição 3 | 1 | | | | | -1 | 1 | | | = | 5 |
| Restrição 4 | 1 | | | | | | | -1 | 1 | = | 9 |

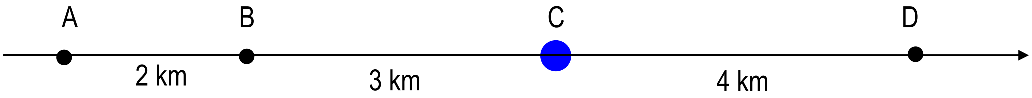


**Solução Óptima - Relatório**

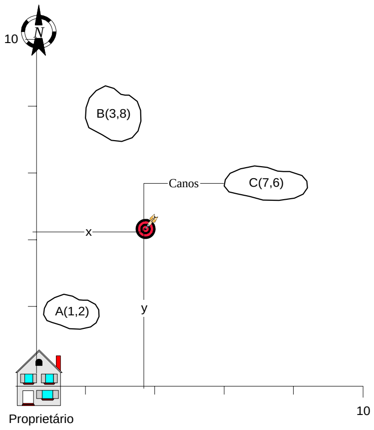
Valores associados à 1ª so

| Primal | Valor |
|---|---|
| x | 5 |
| da+ | 5 |
| da- | 0 |
| db+ | 3 |
| db- | 0 |
| dc+ | 0 |
| dc- | 0 |
| dd+ | 0 |
| dd- | 4 |
| f(X) | 2900 |

Localização óptima (não única) : C



11. Considerem-se "x" e "y" as coordenadas óptimas do furo.



Relativamente a qualquer das áreas, vista separadamente, o ideal seria que o furo nela tivesse lugar. Como tal não é possível é necessário estabelecer um compromisso.

Considerando $x_A^+, x_A^-, x_B^+, x_B^-, x_C^+, x_C^-$ os desvios por excesso e defeito na direcção Este-Oeste (será o comprimento do tubo de ligação necessário e $y_A^+, y_A^-, y_B^+, y_B^-, y_C^+, y_C^-$ idênticos desvios na direcção Norte-Sul, o modelo de PL para optimizar a localização do furo e consequentemente minimizar o custo das ligações é o seguinte:

$$Min\ \ f(x,y) = 100(x_A^+ + x_A^- + y_A^+ + y_A^-) + 300(x_B^+ + x_B^- + y_B^+ + y_B^-) + 200(x_C^+ + x_C^- + y_C^+ + y_C^-)$$

$$s.a.$$

$$x - x_A^+ + x_A^- = 1$$

$$y - y_A^+ + y_A^- = 2$$

$$x - x_B^+ + x_B^- = 3$$

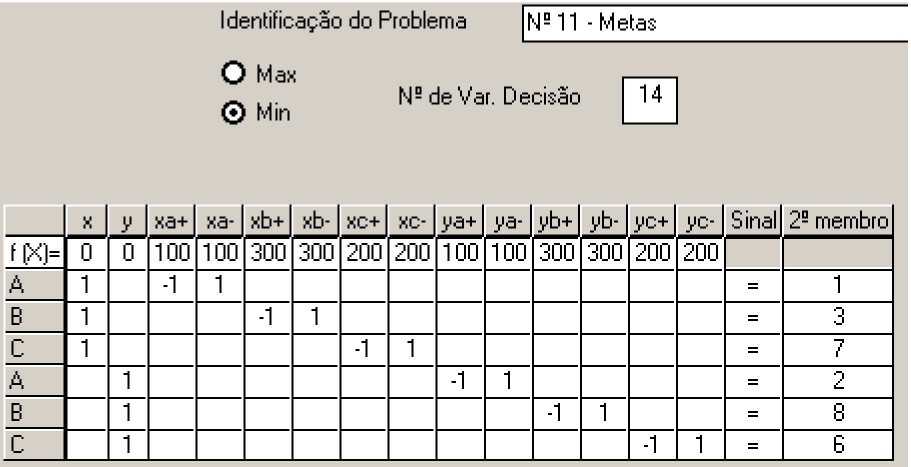
$$y - y_B^+ + y_B^- = 8$$

$$x - x_C^+ + x_C^- = 7$$

$$y - y_C^+ + y_C^- = 6$$

$$x, y, x_A^+, x_A^-, y_A^+, y_A^-, x_B^+, x_B^-, y_B^+, y_B^-, x_C^+, x_C^-, y_C^+, y_C^- \geq 0$$

Utilizando o software do autor:

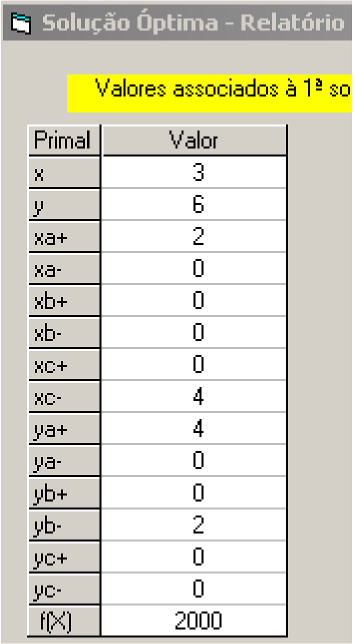


Identificação do Problema: Nº 11 - Metas

○ Max
● Min

Nº de Var. Decisão: 14

| | x | y | xa+ | xa- | xb+ | xb- | xc+ | xc- | ya+ | ya- | yb+ | yb- | yc+ | yc- | Sinal | 2º membro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f (X)= | 0 | 0 | 100 | 100 | 300 | 300 | 200 | 200 | 100 | 100 | 300 | 300 | 200 | 200 | | |
| A | 1 | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | = | 1 |
| B | 1 | | | | -1 | 1 | | | | | | | | | = | 3 |
| C | 1 | | | | | | -1 | 1 | | | | | | | = | 7 |
| A | | 1 | | | | | | | -1 | 1 | | | | | = | 2 |
| B | | 1 | | | | | | | | | -1 | 1 | | | = | 8 |
| C | | 1 | | | | | | | | | | | -1 | 1 | = | 6 |

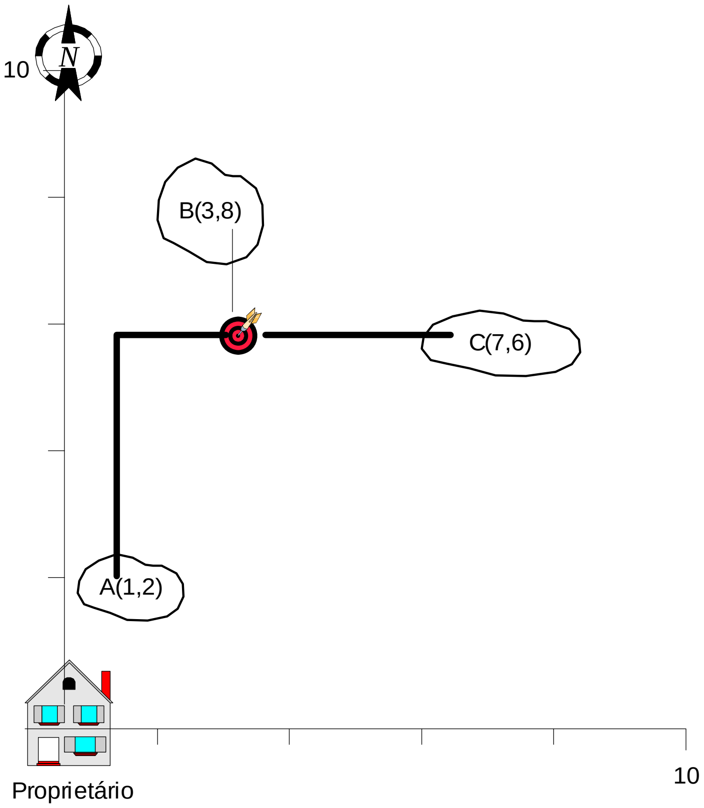


Solução Óptima - Relatório

Valores associados à 1ª so

| Primal | Valor |
|---|---|
| x | 3 |
| y | 6 |
| xa+ | 2 |
| xa- | 0 |
| xb+ | 0 |
| xb- | 0 |
| xc+ | 0 |
| xc- | 4 |
| ya+ | 4 |
| ya- | 0 |
| yb+ | 0 |
| yb- | 2 |
| yc+ | 0 |
| yc- | 0 |
| f(X) | 2000 |

As ligações óptimas são as seguintes:



Relativamente à casa, o furo deve ser aberto 3 km para Este e 6 km para Norte.

São necessários 6 km de tubo para a ligação a "A" (600 u.m.), 2 km para B (600 u.m.) e 4 km para C (800 u.m.) com custo total mínimo de 2000 u.m.

12. Variáveis de decisão: $x_A$ , $x_B$ , $x_C$ , $x_D$ (número de páginas a dactilografar em A, B, C, D respectivamente)

Restrições técnicas:

Capacidade das empresas (total de páginas)

- $x_A \leq 320$ (50 horas a 6.4 páginas/h)
- $x_B \leq 208$ (40 horas a 5.2pgs./h)
- $x_C \leq 375$ (50 horas a 7.5 páginas/h)
- $x_D \leq 308$ (35 horas a 8.8 páginas/h)

Estudo das Metas a fixar:

| Descrição | Preferência do decisor | Equação da Meta | Desvios Penalizáveis |
|---|---|---|---|
| Pgs./semana | ≥ 1000 | $x_A + x_B + x_C + x_D - d_1^+ + d_1^- = 1000$ | Defeito |
| Erros | ≤ 12 | $0.015x_A + 0.018x_B + 0.008x_C + 0.012x_D - d_2^+ + d_2^- = 12$ | Excesso |
| Custo (u.m.) | ≤ 3000 | $3.5x_A + 2.4x_B + 3.75x_C + 3.9x_D - d_3^+ + d_3^- = 3000$ | Excesso |

| Prioridade | Objectivo |
|---|---|
| 1 | $Min\ f_1 = d_1^-$ |
| 2 | $Min\ f_2 = d_2^+$ |
| 3 | $Min\ f_3 = d_3^+$ |

Modelo para optimizar:

$$Min\ f(D) = M_1 d_1^- + M_2 d_2^+ + d_3^+$$

$s.a.$

$x_A \leq 320$ (50 horas a 6.4 páginas/h)

$x_B \leq 208$ (40 horas a 5.2pgs./h)

$x_C \leq 375$ (50 horas a 7.5 páginas/h)

$x_D \leq 308$ (35 horas a 8.8 páginas/h)

$x_A + x_B + x_C + x_D - d_1^+ + d_1^- = 1000$ (páginas para 1 semana; 1 ª prioridade)

$0.015x_A + 0.018x_B + 0.008x_C + 0.012x_D - d_2^+ + d_2^- = 12$ (erros; 2ª prioridade)

$3.5x_A + 2.4x_B + 3.75x_C + 3.9x_D - d_3^+ + d_3^- = 3000$ (custo; 3ª prioridade)

$x_A , x_B , x_C , x_D , d_i^+ , d_i^- \geq 0$ e Inteiro (i = 1,2,3)

Utilizando o Solver do Excel obtém-se:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Solução | 148.0 | 174.0 | 372.0 | 306.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 524.0 | 0.0 | | |
| Variáveis | xA | xB | xC | xD | d1+ | d1- | d2+ | d2- | d3+ | d3- | 1º membro | VSM |
| | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | -1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1000.0 | 1000.0 |
| | 0.015 | 0.018 | 0.008 | 0.012 | | | -1.0 | 1.0 | | | 12.0 | 12.0 |
| | 3.5 | 2.4 | 3.8 | 3.9 | | | | | -1.0 | 1.0 | 3000.0 | 3000.0 |
| | | | | | | | | | | | Objectivo | |
| f(D) = | | | | | | 1000000.0 | 100000.0 | | 1.0 | | 524.0 | |
| Custo total | | 3524.0 | | | | | | | | | | |

A solução "óptima" é a seguinte:

- Empresa A : executar 148 páginas
- Empresa B : executar 174 páginas
- Empresa C : executar 372 páginas
- Empresa D : executar 306 páginas

As metas de 1ª e 2ª prioridades são integralmente satisfeitas ( 1000 páginas ; 12 erros).

A meta de 3ª prioridade é excedida em $d_3^+$ = 524 u.m. ou seja o custo total é de 3524 u.m.