INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

Exercícios

Cap. I – Modelo de PL - Formalização

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O.

Recomendações

1. É possível aprender a matéria fazendo apenas exercícios e consultando as soluções?

   A resposta é negativa.
   Se quer mesmo aprender tem que começar pelo “ovo” ou seja pelo apoio teórico para apreender conceitos e técnicas novas.
   Um exercício é bem resolvido se e só existir a capacidade de identificar o problema, planear a sua execução, solucionar e examinar o resultado de modo crítico.
   Ora aquela capacidade adquire-se lendo, interpretando e memorizando o apoio teórico disponível.

2. Fazer dez exercícios ou o mesmo exercício 10 vezes ?

   Em regra obtém-se melhor rendimento executando várias vezes o mesmo exercício, com critério e sentido da descoberta, do que resolvendo vários exercícios com o objectivo enganador de “acertar na solução “.

3. Exercício feito, tarefa pronta ?

   A resposta é negativa.
   Rever criticamente a “história” da execução de um exercício melhora substancialmente a capacidade pessoal de identificação dos problemas e de arquitectar o plano de aplicação do “ferramental” técnico necessário (o quê ; quando ; como).
   A Programação Matemática apela ao “engenho e arte” de quem quer mesmo utilizá-la.

4. Sim ou não usar software de apoio?

   A resposta é afirmativa.
   A experiência ensina que o recurso intensivo ao software académico, desenhado especificamente para apoio do ensino desta disciplina, traduz-se rapidamente na melhoria do rendimento porque além de permitir exercitar a curiosidade intelectual (vertente fundamental) garante a obtenção rápida de respostas rigorosas e detalhadas para exercícios propostos pelo professor ou gizados pelo próprio aluno (aumento da produtividade).

I. Modelo de PL – Formalização

Estude e analise previamente os modelos apresentados no manual da teoria da Programação Linear.

As soluções dos modelos seguintes restringem-se à indicação das variáveis de decisão e aos "input" e "output" do software do autor.

1. Um banco decidiu ter os seus balcões abertos ao público das 08 horas às 20 horas pelo que necessita planear novos horários de serviço para os seus funcionários.

   Para tal decidiu dividir o dia de trabalho em 6 períodos de 2 horas e fixar para cada um destes períodos o seguinte número mínimo de funcionários:

8 às 10h	10 às 12h	12 às 14h	14 às 16h	16 às 18h	18 às 20h
6	10	12	11	5	4

   Os funcionários trabalham diariamente 6 horas consecutivas, podendo a empresa fixar a hora de entrada ao serviço.

   Apresentar o modelo de PL que minimiza o número total de empregados necessários diariamente.

2. Uma empresa tem actualmente 8 toneladas de arroz num armazém A1, 10 toneladas num armazém A2 e 11 toneladas num armazém A3 necessitando satisfazer as seguintes encomendas de 3 clientes C1 , C2 e C3 :

Cliente	Quantidade (toneladas)
C1	15
C2	17
C3	5

   Por razões comerciais, ao cliente C1 pretende-se entregar, no mínimo, 80% da encomenda (12 toneladas). Os custos de transporte (u.m.) de 1 tonelada de arroz são os seguintes:

	C1	C2	C3
A1	8	6	4
A2	16	14	15
A3	5	10	8

   Apresente o modelo de PL que permite optimizar o custo total do transporte do arroz (considere que a empresa só satisfaz as encomendas em toneladas completas).

3. Uma empresa automóvel pretende construir 2 fábricas, em países diferentes, tendo pré-seleccionado os países A, B e C. Os custos de construção das fábricas e de produção do modelo TZ são os seguintes:

País	Construção (u.m.)	Produção (u.m./unidade)	Capacidade produtiva (unidades)
A	50000	10	25000
B	30000	15	20000
C	20000	20	25000

A empresa pretende produzir no conjunto das duas fábricas o mínimo de 40000 automóveis.

Apresente um modelo linear que permita minimizar os custos associados à construção e produção das duas fábricas.

4. Um hipermercado dispõe de 100 kg de carne do tipo 1, 400 kg de carne do tipo 2 e 250 kg de carne do tipo 3.

A partir destas carnes produz hambúrguer, carne picada e espetadas usando no mínimo, por quilograma produzido, as seguintes percentagens das carnes referidas:

Produto	Carne tipo 1	Carne tipo 2	Carne tipo 3
Hambúrguer	30%		50%
Carne picada	25%	22%	20%
Espetadas		40%	10%

O gerente deseja que por cada 5 kg de hambúrguer, sejam produzidos 3 kg de espetadas.

Apresente um modelo linear que permita minimizar a quantidade de carne não transformada e ajude a planear a quantidade a produzir dos três produtos.

5. Admita dispor de 3 armazéns (onde o stock do bem X é de 20, 22, 11 unidades respectivamente) e pretende proceder à sua transferência para outras instalações A, B e C com capacidades de armazenamento de 10, 26 e 5 unidades respectivamente.

Os custos unitários de transporte (€) são os seguintes:

	A	B	C
Armazém 1	10	15	22
Armazém 2	19	18	9
Armazém 3	25	22	14

Esta transferência tem um custo óptimo de 583 €. A empresa não pode suportar esta despesa pelo que pretende transferir o máximo do stock de modo a que o custo total de transporte não exceda 500 €.

Nestas circunstâncias não é possível optimizar recorrendo ao software que utiliza a técnica usual para resolver problemas de transporte sendo necessário recorrer a um modelo de PL especificamente desenhado para esta circunstância.

Apresente este modelo de PL indicando o significado das variáveis que utilizar.

6. Uma empresa pretende produzir 3 produtos utilizando as matérias-primas A e B.

O quadro seguinte indica o consumo de matéria-prima (tons) por unidade produzida e os lucros unitários de venda:

	A	B	Lucro de venda (unidade)
Produto 1	4	8	25 u.m.
Produto 2	6	4	20 u.m.
Produto 3	10	14	30 u.m.

Para o mês de Março prevê-se disponível a seguinte matéria-prima: A: 2400 tons. ; B: 4800 tons.

Do processo de fabrico sabe-se que, para a mesma quantidade, o tempo de produção do Produto 1 é o dobro do necessário ao Produto 2 e triplo do necessário ao Produto 3.

A capacidade de produção mensal do Produto 3 é de 1000 unidades no cenário de não produção de qualquer dos restantes tipos.

Face aos stocks existentes, o plano de vendas para o mês de Março aponta para a produção do Produto 1 e Produto 2 ou, em alternativa, do Produto 1 e Produto 3.

Apresente o modelo de PL necessário ao cálculo dos níveis óptimos de produção.

7. Admita que a sua empresa pretende efectuar uma acção de formação em 2003 prevendo-se necessitar de um reforço de 9 computadores em Janeiro, 7 em Março, 9 em Abril, 10 em Maio e 5 em Junho.

   O director dos recursos humanos, que pretende obter estes computadores em regime de aluguer, pediu-lhe para elaborar a encomenda a fazer à empresa BYTE de quem recebeu a seguinte tabela de preços:

Período de aluguer (1 computador)	Custo do aluguer (€)
1 mês	100
2 meses	150
3 meses	235

   Apresente o modelo de PL a que recorre para apoio da sua proposta de encomenda.

8. Uma empresa necessita *satisfazer encomendas* de 10, 8, 12 e 20 unidades de um determinado produto em, respectivamente, cada um dos próximos 4 meses (M_1 , M_2 , M_3 e M_4).

   O *custo unitário de produção*, variável nos meses referidos, é estimado em 7, 11, 8 e 9 u.m. respectivamente.

   Ao *excesso de produção* que transite de um mês para o mês seguinte é associado um custo unitário de 3 u.m. (custo de stock), prevendo-se que, no final do quadrimestre, o stock existente seja saldado a 4 u.m./unidade.

   Se fosse gestor desta empresa que modelo matemático usaria para apoiar a decisão sobre o plano de produção?

9. Uma empresa que produz tambores para máquinas de lavar aplica um conjunto de 2 peças (1 peça A e 1 peça B) no processo de montagem. Do antecedente, a produção das peças vem sendo efectuada em máquinas da marca TE onde, em média, se produz a peça A em 22 minutos e a B em 17 minutos. A empresa tem 5 destas máquinas TE e adquiriu agora uma nova máquina TETURBO onde pode produzir a peça A em 5 minutos e a B em 7 minutos. É necessário produzir peças A e B pelo que estão cativadas todas as máquinas para operar amanhã durante 8 horas.

   a. Desejando-se maximizar a produção diária de conjuntos de 2 peças, sem desperdício, apresente um modelo de programação linear para cumprir este objectivo.

10. Uma empresa produz dois tipos de mistura (M1 e M2) usando dois tipos de matéria-prima (P1 e P2).

Um kg da mistura M1 tem, pelo menos, 50% de P1 e é vendido a 14 u.m.

Um kg da mistura M2 tem, pelo menos, 60% de P1 e é vendido a 16 u.m.

A produção de M1 deve ser, pelo menos, 20% da produção de M2.

A empresa tem em stock 500 kg de P1 e 900 kg de P2 e recebeu uma oferta de compra de P1 nas seguintes condições (desconto de quantidade):

Aquisição (kg)	Custo de aquisição (por kg)
0 a 500	25 u.m.
500 a 1000	500kg a 25 u.m. + restante a 20 u.m.
1000 a 1500	500kg a 25 u.m. + 500kg a 20 u.m. + restante a 15 u.m.

Exemplo: O custo de aquisição de 1200 kg é de 25500 u.m. que são obtidos do seguinte modo:

500 kg no 1º intervalo; custo é de 25(500) = 12500 u.m.

500 kg no 2º intervalo; custo é de 20(500) = 10000 u.m.

200 kg no 3º intervalo; custo é de 15(200) = 3000 u.m.

Apresente o modelo de PL para optimizar a produção das duas misturas.

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Programação Linear

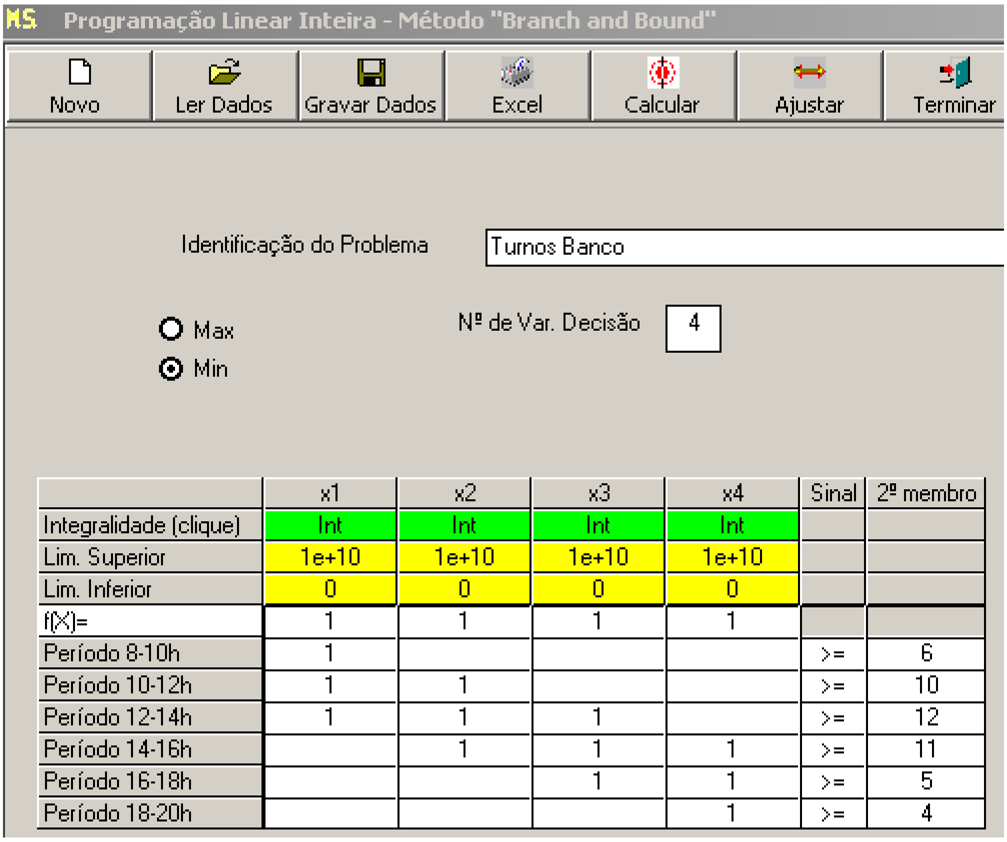
Soluções dos Exercícios

Cap. I – Modelo de PL - Formalização

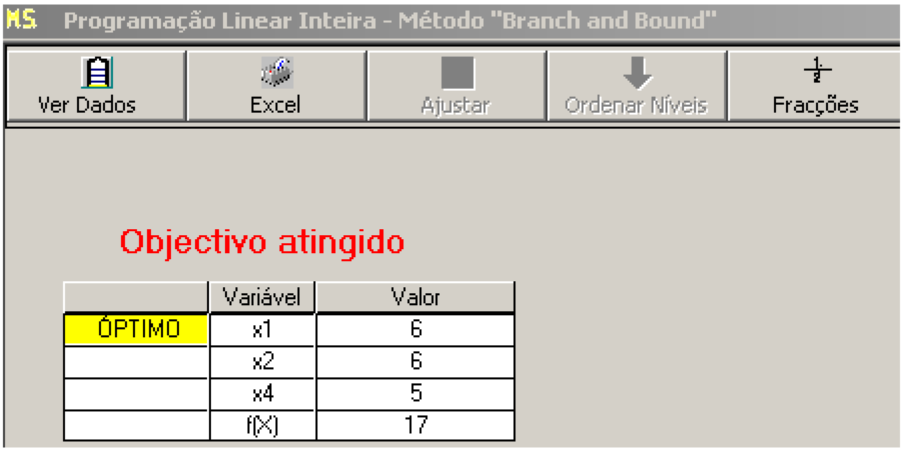
António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O.

1.

Variáveis de Decisão: x_1, x_2, x_3, x_4 = nº de empregados que iniciam cada um dos 4 turnos, respectivamente.



	x1	x2	x3	x4	Sinal	2º membro
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int		
Lim. Superior	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10		
Lim. Inferior	0	0	0	0		
f(X)=	1	1	1	1		
Período 8-10h	1				>=	6
Período 10-12h	1	1			>=	10
Período 12-14h	1	1	1		>=	12
Período 14-16h		1	1	1	>=	11
Período 16-18h			1	1	>=	5
Período 18-20h				1	>=	4



	Variável	Valor
ÓPTIMO	x1	6
	x2	6
	x4	5
	f(X)	17

Solução óptima

Necessários 17 empregados/dia dos quais:

- 6 iniciam o trabalho às 8 horas; permanecem até às 14 horas
- 6 iniciam o trabalho às 10 horas; permanecem até às 16 horas
- 5 iniciam o trabalho às 14 horas; permanecem até às 20 horas

2.

Variáveis de Decisão: x_{ij} = toneladas de arroz a transportar do armazém “i” para o cliente “j” (i=1 a 3; j= 1 a 3)

MS Programação Linear - Método Simplex

Novo | Ler Dados | Gravar Dados | Excel | Calcular | Ajustar | Termina

Identificação do Problema: (Xij = entrega do armazém i ao Cliente J

○ Max
◉ Min

Nº de Var. Decisão: 9

	x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33	Sinal	2º membro
f (X)=	8	6	4	16	14	15	5	10	8		
Cliente 1	1			1			1			<=	15
Cliente 2		1			1			1		<=	17
Cliente 3			1			1			1	<=	5
Armazém 1	1	1	1							=	8
Armazém 2				1	1	1				=	10
Armazém 3							1	1	1	=	11
Para Cliente 1	1			1			1			>=	12

Solução Óptima - Relatório

Valores associados à 1ª solução óptima calculada

Primal	Valor
x11	0
x12	3
x13	5
x21	1
x22	9
x23	0
x31	11
x32	0
x33	0
E7	0
F1	3
F2	5
F3	0
f(X)	235

Dual	Valor
y 1	0
y 2	0
y 3	-2
y 4	6
y 5	14
y 6	3
y 7	2
y 8	0
y 9	0
y 10	0
y 11	0
y 12	0
y 13	3
y 14	0
y 15	7
y 16	7
g(Y)	235

Solução óptima (não única)

Do armazém 1: 3 toneladas de arroz para o Cliente 2 e 5 toneladas para o Cliente 3

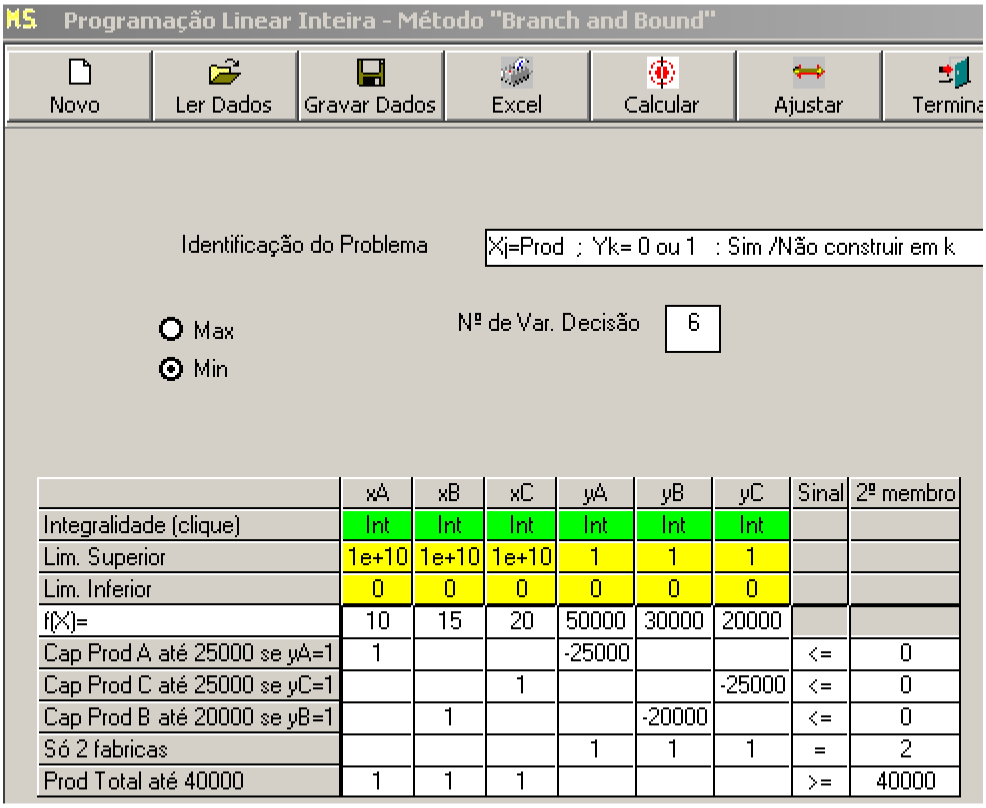
Do armazém 2: 1 tonelada de arroz para o Cliente 1 e 9 toneladas para o Cliente 2

Do armazém 3: 11 toneladas de arroz para o Cliente 1

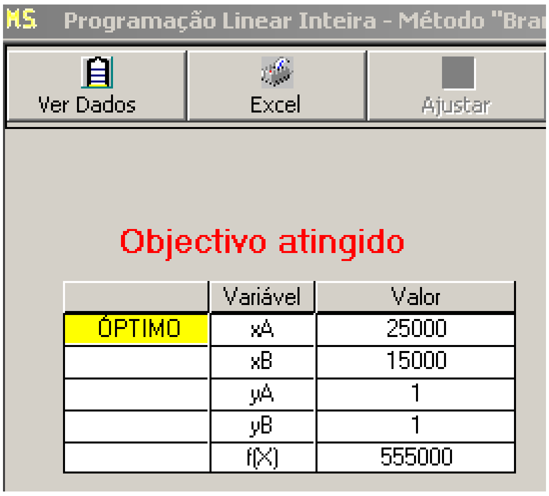
Custo total mínimo = 235 u.m.

3.

Variáveis de decisão: x_j = nível de produção no país “j” (j= 1 a 3) ; y_j = 0 ou 1 (construir/não construir em “j”)



	xA	xB	xC	yA	yB	yC	Sinal	2º membro
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int	Int	Int		
Lim. Superior	1e+10	1e+10	1e+10	1	1	1		
Lim. Inferior	0	0	0	0	0	0		
f(X)=	10	15	20	50000	30000	20000		
Cap Prod A até 25000 se yA=1	1			-25000			<=	0
Cap Prod C até 25000 se yC=1			1			-25000	<=	0
Cap Prod B até 20000 se yB=1		1			-20000		<=	0
Só 2 fabricas				1	1	1	=	2
Prod Total até 40000	1	1	1				>=	40000



	Variável	Valor
ÓPTIMO	xA	25000
	xB	15000
	yA	1
	yB	1
	f(X)	555000

Solução óptima

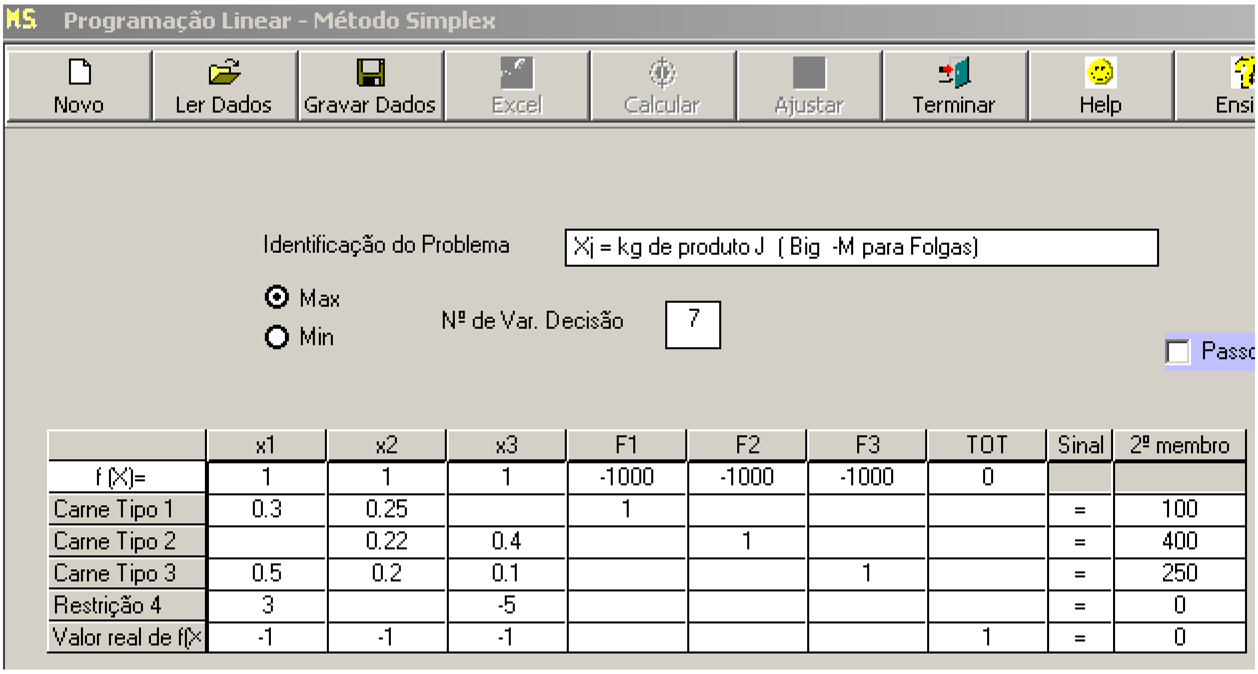
Construir em “A” e “B”.

Produzir 25000 unidades em “A” e 15000 unidades em “B”.

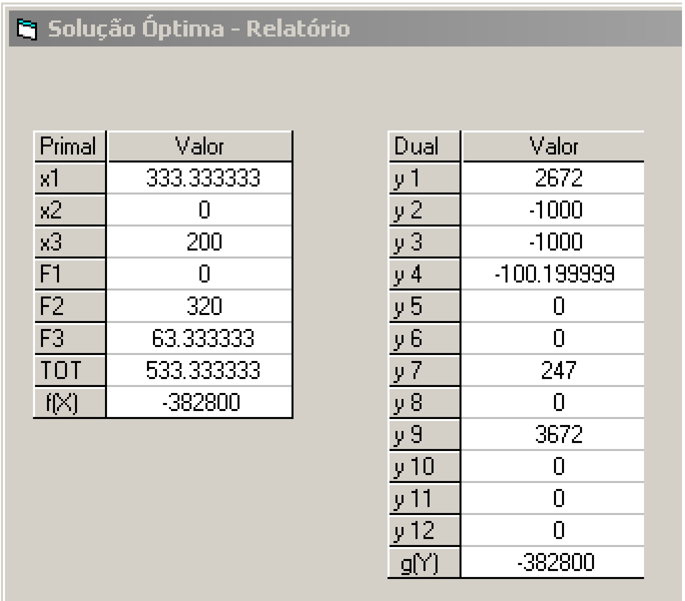
Custo total mínimo = 555000 u.m.

4.

Variáveis de decisão: x_j = nível de produção (kg) do produto “j” (j= 1 a 3)



	x1	x2	x3	F1	F2	F3	TOT	Sinal	2º membro
f (X)=	1	1	1	-1000	-1000	-1000	0		
Carne Tipo 1	0.3	0.25		1				=	100
Carne Tipo 2		0.22	0.4		1			=	400
Carne Tipo 3	0.5	0.2	0.1			1		=	250
Restrição 4	3		-5					=	0
Valor real de f(X	-1	-1	-1				1	=	0



Primal	Valor
x1	333.333333
x2	0
x3	200
F1	0
F2	320
F3	63.333333
TOT	533.333333
f(X)	-382800

Dual	Valor
y 1	2672
y 2	-1000
y 3	-1000
y 4	-100.199999
y 5	0
y 6	0
y 7	247
y 8	0
y 9	3672
y 10	0
y 11	0
y 12	0
g(Y)	-382800

Solução óptima

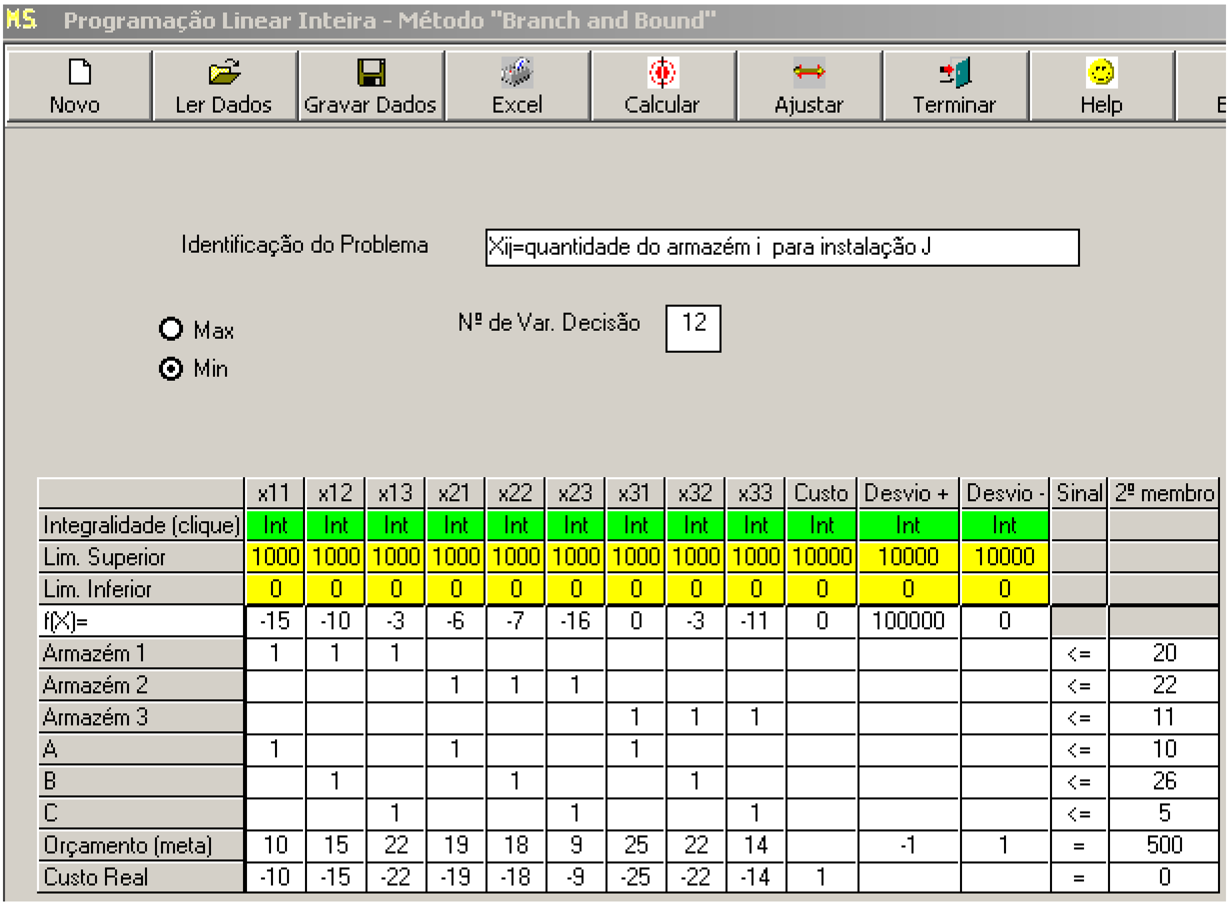
Produzir 333.33 kg de hambúrguer e 200 kg de Espetadas.

Nota: são transformados, na totalidade, 533.33 kg de carne do seguinte modo:

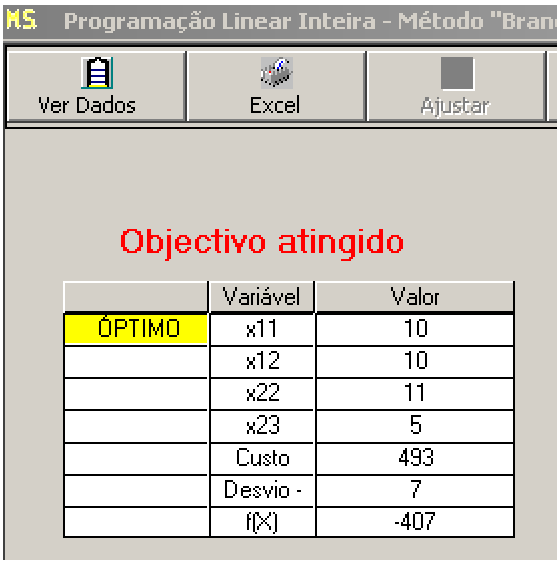
- Carne tipo 1: 99.99 = 100 kg para hambúrguer (consumida na totalidade)
- Carne tipo 2: 80 kg para espetada (sobram 320 kg de carne)
- Carne tipo 3: 166.66 kg para hambúrguer e 20 kg para espetada (sobram 63.33 kg de carne)

5.

Variáveis de Decisão: x_{ij} unidades a transportar do armazém “i” para a instalação “j” (i=1 a 3; j= 1 a 3)



	x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33	Custo	Desvio +	Desvio -	Sinal	2º membro
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int		
Lim. Superior	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	10000	10000	10000		
Lim. Inferior	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
f(X)=	-15	-10	-3	-6	-7	-16	0	-3	-11	0	100000	0		
Armazém 1	1	1	1										<=	20
Armazém 2				1	1	1							<=	22
Armazém 3							1	1	1				<=	11
A	1			1			1						<=	10
B		1			1			1					<=	26
C			1			1			1				<=	5
Orçamento (meta)	10	15	22	19	18	9	25	22	14		-1	1	=	500
Custo Real	-10	-15	-22	-19	-18	-9	-25	-22	-14	1			=	0



	Variável	Valor
ÓPTIMO	x11	10
	x12	10
	x22	11
	x23	5
	Custo	493
	Desvio -	7
	f(X)	-407

Solução óptima

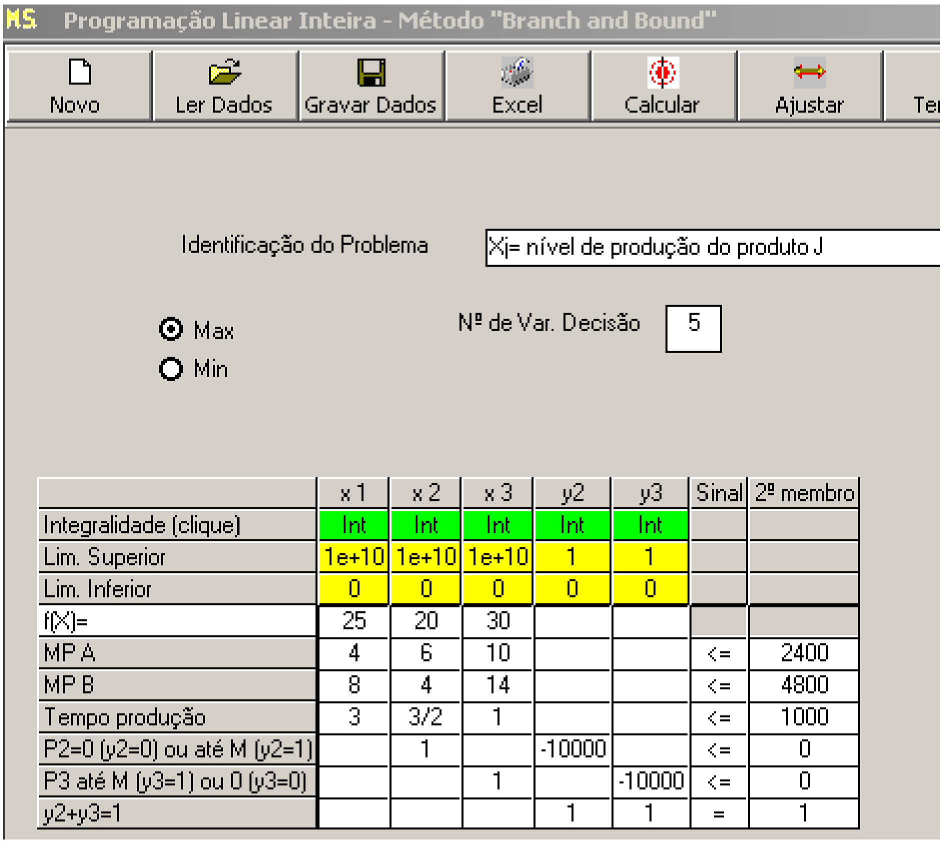
Do armazém 1: 3 unidades de X para a instalação “A” e 10 unidades para a instalação “B”

Do armazém 2: 11 unidades de X para a instalação “B”e 5 unidades para a instalação “C”

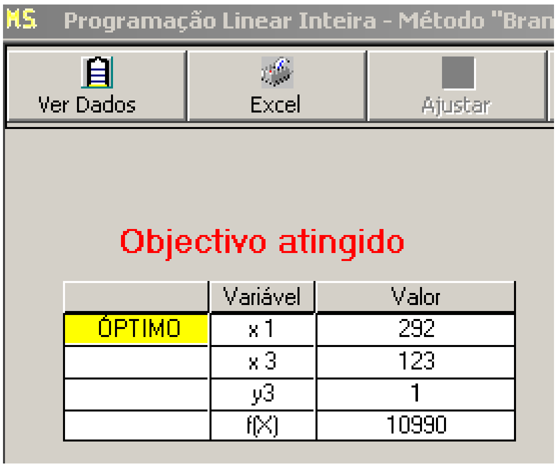
Custo total mínimo = 493 € (cumpre orçamento com desvio por defeito de 7 €)

6.

Variáveis de decisão: x_j = nível de produção (unidades) do produto “j” (j= 1 a 3)



	x 1	x 2	x 3	y2	y3	Sinal	2º membro
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int	Int		
Lim. Superior	1e+10	1e+10	1e+10	1	1		
Lim. Inferior	0	0	0	0	0		
f(X)=	25	20	30				
MP A	4	6	10			<=	2400
MP B	8	4	14			<=	4800
Tempo produção	3	3/2	1			<=	1000
P2=0 (y2=0) ou até M (y2=1)		1		-10000		<=	0
P3 até M (y3=1) ou 0 (y3=0)			1		-10000	<=	0
y2+y3=1				1	1	=	1



	Variável	Valor
ÓPTIMO	x 1	292
	x 3	123
	y3	1
	f(X)	10990

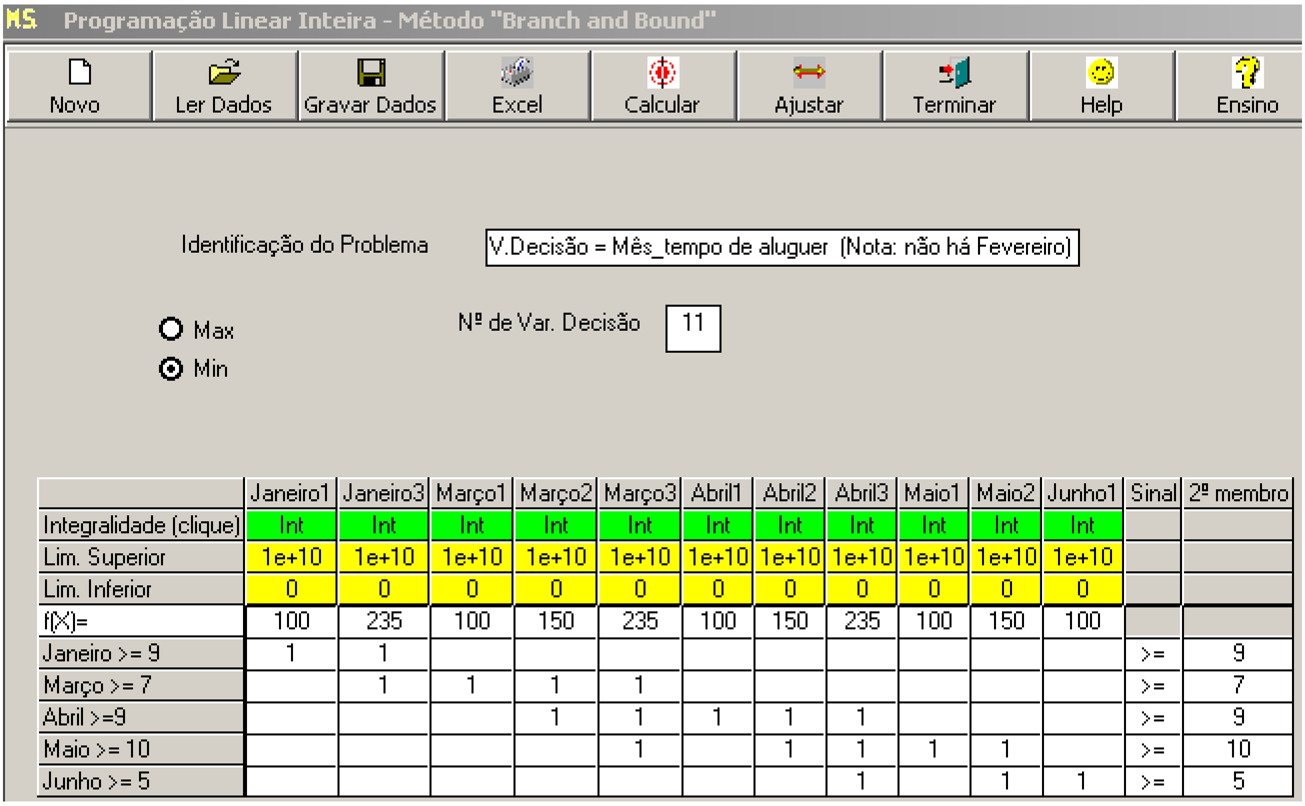
Solução óptima

Produzir 292 unidades do Produto 1 e 123 unidades do Produto 2.

Lucro total máximo = 10990 u.m.

7.

Variáveis de Decisão: Janeiro1 = nº de computadores a alugar em Janeiro para um mês ...



	Janeiro1	Janeiro3	Março1	Março2	Março3	Abril1	Abril2	Abril3	Maio1	Maio2	Junho1	Sinal	2º membro
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int		
Lim. Superior	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10		
Lim. Inferior	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
f(X)=	100	235	100	150	235	100	150	235	100	150	100		
Janeiro >= 9	1	1										>=	9
Março >= 7		1	1	1	1							>=	7
Abril >=9				1	1	1	1	1				>=	9
Maio >= 10					1		1	1	1	1		>=	10
Junho >= 5								1		1	1	>=	5

	Variável	Valor
ÓPTIMO	Janeiro1	9
	Março2	4
	Março3	3
	Abril2	2
	Maio2	5
	f(X)	3255

Solução óptima

Alugar 9 computadores para o mês de Janeiro

Alugar 4 computadores para Março e Abril

Alugar 3 computadores para Março, Abril e Maio

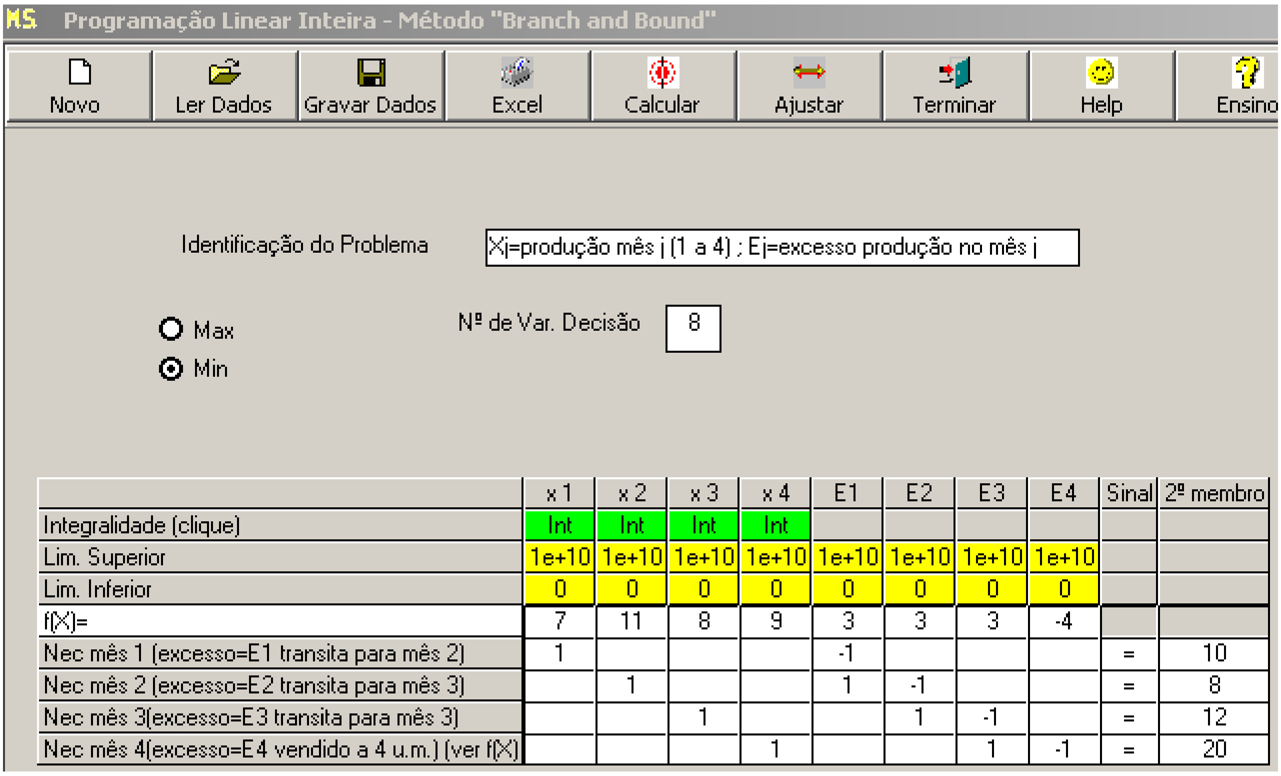
Alugar 2 computadores para Abril e Maio

Alugar 5 computadores para Maio e Junho

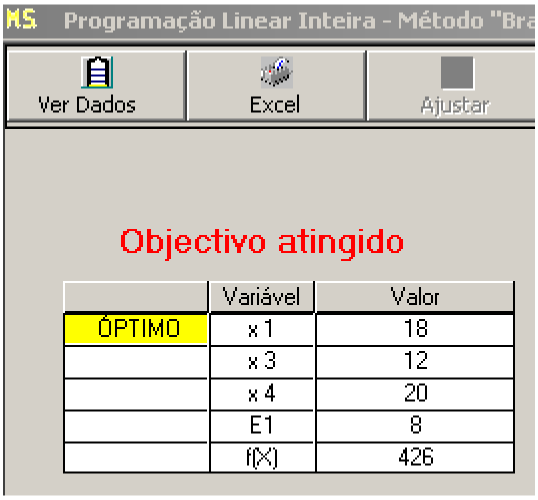
Custo total mínimo = 3255 €

8.

Variáveis de decisão: x_j = nível de produção (unidades) no mês “j” (j= 1 a 4)



	x 1	x 2	x 3	x 4	E1	E2	E3	E4	Sinal	2º membro
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int						
Lim. Superior	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10		
Lim. Inferior	0	0	0	0	0	0	0	0		
f(X)=	7	11	8	9	3	3	3	-4		
Nec mês 1 (excesso=E1 transita para mês 2)	1				-1				=	10
Nec mês 2 (excesso=E2 transita para mês 3)		1			1	-1			=	8
Nec mês 3(excesso=E3 transita para mês 3)			1			1	-1		=	12
Nec mês 4(excesso=E4 vendido a 4 u.m.) (ver f(X)				1			1	-1	=	20



	Variável	Valor
ÓPTIMO	x 1	18
	x 3	12
	x 4	20
	E1	8
	f(X)	426

Solução óptima

Mês M1 : produzir 18 unidades do produto

Mês M3 : produzir 12 unidades do produto

Mês M4 : produzir 20 unidades do produto

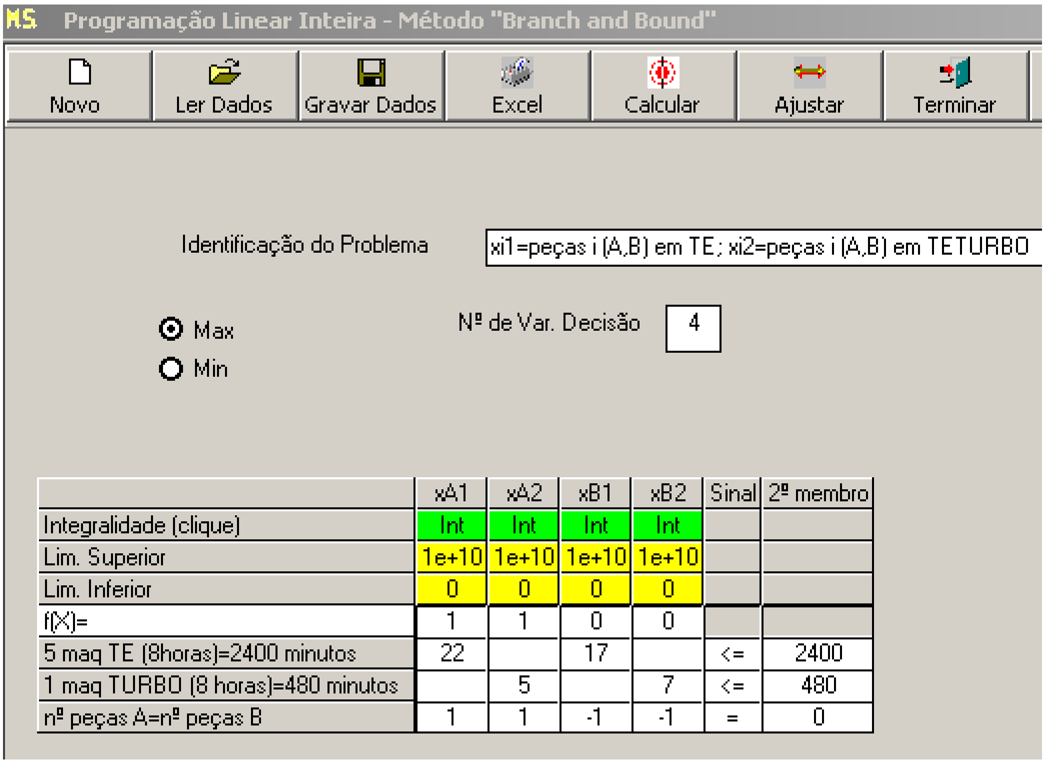
Custo total mínimo = 426 u.m.

Nota: no final do mês M1 há um stock de 8 unidades que transitam para o mês M2

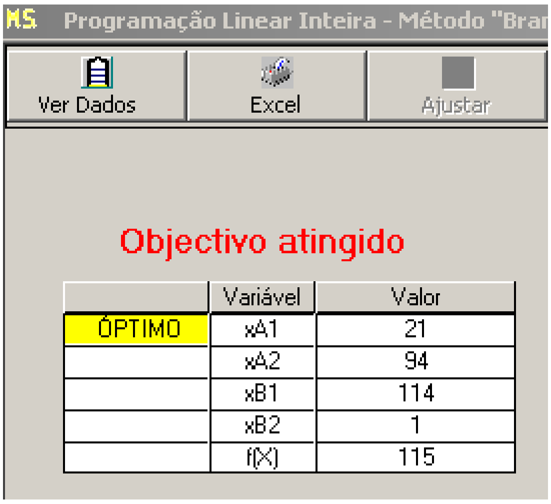
9.

Variáveis de decisão: x_{i1} = nível de produção do produto "i" (i = A, B) na máquina do tipo 1 (TE)

x_{i2} = nível de produção do produto "i" (i = A, B) na máquina do tipo 2 (TETURBO)



	xA1	xA2	xB1	xB2	Sinal	2º membro
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int		
Lim. Superior	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10		
Lim. Inferior	0	0	0	0		
f(X)=	1	1	0	0		
5 maq TE (8horas)=2400 minutos	22		17		<=	2400
1 maq TURBO (8 horas)=480 minutos		5		7	<=	480
nº peças A=nº peças B	1	1	-1	-1	=	0



	Variável	Valor
ÓPTIMO	xA1	21
	xA2	94
	xB1	114
	xB2	1
	f(X)	115

Solução óptima

Máquinas TE : produzir 21 peças "A" e 114 peças "B"

Máquina TE Turbo : produzir 94 peças "A" e 1 peça "B"

Nota: são produzidas 115 peças de cada um dos tipos

10.

Variáveis de Decisão: x_{ij} kg da matéria-prima "i" para a mistura "j" (i=1 a 2; j= 1 a 2)

Q = kg de P1 a adquirir

MS Programação Linear Inteira - Método "Branch and Bound"

Novo | Ler Dados | Gravar Dados | Excel | Calcular | Ajustar | Terminar | Help

Identificação do Problema: Desconto de quantidade (programar por troços)

(•) Max
( ) Min

Nº de Var. Decisão: 12

	x11	x12	x21	x22	Q	y1	y2	y3	e1	e2	e3	e4	Sinal	2º membro
Integralidade (clique)						Int	Int	Int						
Lim. Superior	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1	1	1	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10		
Lim. Inferior	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
f(X)=	14	16	14	16	0	0	0	0	-0	-12500	-22500	-30000		
e4<=y3								-1				1	<=	0
e3<=y2+y3							-1	-1			1		<=	0
Stock de P2			1	1									<=	900
Stock de P1	1	1			-1								<=	500
e2<=y1+y2						-1	-1			1			<=	0
e1<=y1						-1			1				<=	0
Soma de % =1									1	1	1	1	=	1
y1+y2+y3=1						1	1	1					=	1
Adquirir Q					1				-0	-500	-1000	-1500	=	0
>=50% de P1	0.5		-0.5										>=	0
>=60% de P2		0.4		-0.6									>=	0
M1>=20% de M2	1	-0.2	1	-0.2									>=	0

MS Programação Linear Inteira - Método "Bran

Ver Dados | Excel | Ajustar

Objectivo atingido

	Variável	Valor
ÓPTIMO	x11	180
	x12	1080
	x21	180
	x22	720
	Q	760
	y2	1
	e2	0.47999999
	e3	0.51999998
	f(X)	16140

Solução óptima

Adquirir Q = 760 kg de P1 passando a dispor de 500 + 760 = 1260 kg para a produção.

Aplicação de 1260 kg de P1:

- 180 kg para a produção de M1
- 1080 kg para a produção de M2

Aplicação de 900 kg de P2:

- 180 kg para a produção de M1
- 720 kg para a produção de M2

Mistura M1 produzida = 180 + 180 = 360 kg (são 20% da produção de M2)

Mistura M2 produzida = 1080 + 720 = 1800 kg

Custo da aquisição da quantidade "Q" de P1 = 760 kg e intervalo de desconto:

- intervalo de desconto é segundo (500 a 1000 kg) pois $y_2 = 1$
- custo = $12500e_2 + 22500e_3 = 17700$ u.m.

Receita da venda da produção = 360(14) + 1800(16) = 33840 u.m.

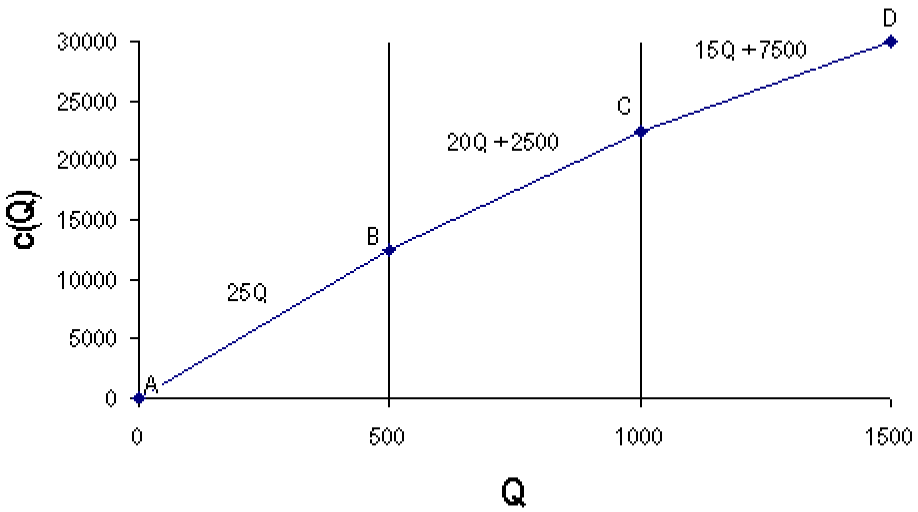
Lucro = 33840 - 17700 = 16140 u.m.

Nota:

Aplicou-se a programação linear por troços (3 intervalos de desconto).

A cada um dos intervalos foi associada uma variável binária (y_1, y_2 e y_3) com $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ para que a quantidade óptima de aquisição seja obtida num e só num dos intervalos de desconto.

Nos primeiro, segundo e terceiro intervalos de desconto o custo de aquisição da quantidade "Q" é o que se mostra na figura seguinte:



Os pontos A, B, C e D (extremos de intervalo) podem ser definidos vectorialmente do seguinte modo:

$$P_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ P_B = \begin{bmatrix} 500 \\ 12500 \end{bmatrix}; \ P_C = \begin{bmatrix} 1000 \\ 22500 \end{bmatrix}; \ P_D = \begin{bmatrix} 1500 \\ 30000 \end{bmatrix}$$

No 1º intervalo (segmento AB) qualquer ponto “Q” pode ser definido por combinação linear convexa dos vectores P_A e P_B usando:

$P_Q = e_1P_A + e_2P_B$ sujeito a:

$e_1 + e_2 = 1$

$e_1 , e_2 \geq 0$

No 2º intervalo (segmento BC) qualquer ponto “Q” pode ser definido por combinação linear convexa dos vectores P_B e P_C usando:

$P_Q = e_2P_B + e_3P_C$ sujeito a:

$e_2 + e_3 = 1$

$e_2 , e_3 \geq 0$

No 3º intervalo (segmento CD) qualquer ponto “Q” pode ser definido por combinação linear convexa dos vectores P_C e P_D usando:

$P_Q = e_3P_C + e_4P_D$ sujeito a:

$e_3 + e_4 = 1$

$e_3 , e_4 \geq 0$

Naturalmente a soma destes escalares não negativos deve ser igual à unidade ($e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 1$).

Notar que da combinação linear resultam duas coordenadas, sendo uma a quantidade “Q” a adquirir e a outra o custo c(Q) de aquisição da mesma.

Efectuando as combinações lineares referidas obtêm-se as restrições (ver modelo):

$Q = 0(e1) + 500(e_2) + 1000(e_3) + 1500(e_4)$

$c(Q) = 0(e_1) + 12500(e_2) + 22500(e_3) + 30000(e_4)$

O valor da função objectivo é igual à Receita da Venda deduzida do custo de aquisição de “Q” kg de P1 com custo c(Q) (ver modelo).

Por último resta definir a relação entre estes escalares e as variáveis binárias associadas a cada um dos intervalos:

$e_1 \leq y_1$	(intervalo extremo)
$e_2 \leq y_2 + y_3$	(intervalo intermédio)
$e_3 \leq y_3 + y_4$	(intervalo intermédio)
$e_4 \leq y_3$	(intervalo extremo)

Retomando a solução óptima veja-se que $y_2 = 1$ pelo que $y_1 = y_3 = 0$ do que resulta:

$e_1 = 0$
$e_2 \leq 1$
$e_3 \leq 1$
$e_4 = 0$

O ponto óptimo de encomenda é Q = 760 kg (2º intervalo) que tem o custo:

c(Q) = 500(25) + 260(20) =17700 u.m.

A expressão geral da combinação linear convexa dos vectores P_B e P_C é:

$$P_Q = \left[e_2 P_B + e_3 P_C\right] = e_2 \begin{bmatrix} 500 \\ 12500 \end{bmatrix} + e_3 \begin{bmatrix} 1000 \\ 22500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500e_2 + 1000e_3 \\ 12500e_2 + 22500e_3 \end{bmatrix}$$

Podemos conferir os valores dos escalares obtidos com o modelo de PL dado que no ponto óptimo (760,17700):

$$\begin{bmatrix} 500e_2 + 1000e_3 \\ 12500e_2 + 22500e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 760 \\ 17700 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 1000 \\ 12500 & 22500 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 760 \\ 17700 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.52 \end{bmatrix}$$