

MATRIZES

Uma Matriz é uma tabela designada por letra maiúscula com a indicação do número de linhas e colunas.

Exemplo da matriz $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Os elementos da matriz estão referenciados pelos índices de linha e coluna.

A diagonal ($a_{11} - a_{33}$) é a Principal e a ($a_{31} - a_{13}$) é a Secundária

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Várias áreas da matemática, como álgebra linear, geometria e computação gráfica recorrem a matrizes pelo que é necessário saber operar com as mesmas.

1. Adição de Matrizes

Só podem adicionar-se matrizes da mesma ordem (número igual de linhas e colunas).

A adição é feita somando os elementos correspondentes das matrizes:

Exemplo da Soma da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *com a matriz* $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Nota: A Soma de Matrizes é COMUTATIVA ou seja $A+B = B+A$

2. Subtração de Matrizes

Tal como a adição também a subtração exige matrizes da mesma ordem.

A subtração é feita subtraindo os elementos correspondentes das matrizes:

Exemplo da Subtração da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *com a matriz* $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Pode optar-se por somar a matriz simétrica:

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Nota: A Subtração de Matrizes NÃO É COMUTATIVA.

3. Multiplicação de Matrizes

Só é possível multiplicar $[A_{m \times n}] \times [B_{p \times q}]$

se o número "n" de colunas da matriz A for igual ao número "p" de linhas da matriz B

A matriz C = A × B tem o número de linhas de A e o número de colunas de B

$$[A_{m \times n}] \times [B_{p \times q}] = C_{m \times q}$$

Na matriz $C = A \times B$

cada um dos elementos c_{ij} é a soma dos produtos da linha "i" de A com os da coluna "j" de B

Assim, por exemplo, c_{11} = soma dos produtos dos elementos da linha 1 de A com os da coluna 1 de B

e c_{13} = soma dos produtos dos elementos da linha 1 de A com os da coluna 3 de B

Exemplo da Multiplicação da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ com a matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Outro exemplo

$$\begin{matrix} 3 \times 2 & & 2 \times 4 & & 3 \times 4 \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ Produto possível (2 colunas para 2 linhas...)}$$

Outro exemplo

$$\begin{matrix} & 2 \times 4 & \longleftrightarrow & 3 \times 2 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & & \text{Produto impossível (4 colunas para 3 linhas...)} \end{matrix}$$

A Multiplicação de Matrizes não é comutativa

4. Multiplicação da matriz por um Escalar

Cada elemento da matriz é multiplicado pelo escalar:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e o escalar } \lambda = 3. \text{ O produto } \lambda \times A = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times 3 & 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

5. Matriz Transposta

A transposta da matriz A é A^T obtida trocando as linhas pelas colunas:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ então } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (1^a \text{ linha passa a } 1^a \text{ coluna; } 2^a \text{ linha passa a } 2^a \text{ coluna})$$

6. Determinante de uma Matriz

O determinante é um valor associado a uma **matriz quadrada**.

No caso da matriz quadrada de ordem 2 o determinante é igual à diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal e da diagonal secundária.

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ então } \Delta_A = (1 \times 4) - (3 \times 2) = -2$$

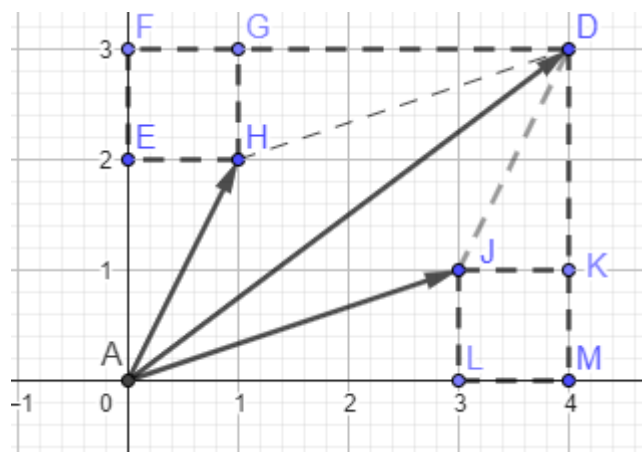
O determinante é importante para calcular a matriz Inversa e ainda para averiguar se esta existe.

Considere – se o sistema de equações $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases}$ onde não há independência linear porque a 2ª equação é múltipla da 1ª, sendo portanto redundante.

O determinante da matriz é nulo: $(2 \times 2) - (4 \times 1) = 0$, dado não haver redundância

Consideremos agora a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ que tem 2 vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e determinante $\Delta = -5$

Graficamente temos:



É evidente que os dois vectores são linearmente independentes. Haverá alguma relação com o determinante da matriz?

Calculando áreas temos:

Área AFDM = $3 \times 4 = 12$; Área EFGH = JKLM = 1 ; Área AEH = DJK = 1 ; Área DGH = AJL = 1.5

Área do paralelogramo $AHDJ = 12 - 1 - 1 - 1 - 1.5 - 1.5 = 5$

Verifica-se que a área do paralelogramo é igual ao Valor Absoluto do determinante da matriz

Se há independência linear há paralelogramo (na matriz 2x2) com área sinalizando determinante não nulo

7. Matriz Identidade I

É uma matriz **Quadrada** com todos os elementos da diagonal principal unitários e os restantes nulos

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Matriz Inversa

A matriz Inversa da matriz A é A^{-1} tal que $A \times A^{-1} = I$

Só as matrizes quadradas com Determinante não nulo é que têm inversa

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calculemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ sabendo que $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Efectuando a multiplicação temos $\begin{bmatrix} 2a + 3b & 2c + 3d \\ 1a + 2b & c + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A igualdade só se verifica se $\begin{bmatrix} 2a + 3b = 1 & 2c + 3d = 0 \\ 1a + 2b = 0 & c + 2d = 1 \end{bmatrix}$. A solução é $a = 2, b = -1, c = -3; d = 2$

A matriz Inversa é pois $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

9. Caso particular da Inversa de uma Matriz 2 x 2

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. O determinante de A é $\Delta = (ad - bc)$.

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ o determinante é $\Delta = [2 \times (-2)] - [1 \times (-6)] = 2$

Para Inverter a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ com determinante $\Delta = 2$

1º **trocam** – se os elementos da diagonal principal ficando $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

2º **multiplcam** – se por -1 os elementos da diagonal secundária ficando $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3º **dividem** – se todos os elementos pelo determinante $\Delta = 2$ da matriz

$$A^{-1} = 2 \times \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ com $\Delta = 8 - 6 = 2$; $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

10. Matriz dos Cofactores

Para cada elemento a_{ij} de uma matriz há um Cofactor associado $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

M_{ij} é o determinante da matriz que se obtém quando na matriz A se elimina a linha "i" e a coluna "j"

Exemplo do cálculo do Cofactor C_{11} associado ao elemento a_{11} da Matriz seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- elemento a_{11} : eliminar a linha 1 e a coluna 1

- calcular o determinante da matriz restante = $(2 \times 0) - (3 \times (-1)) = 3$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1^2) \cdot (3) = 3$$

Cálculo da matriz dos Cofactores da matriz A:

$C_{11} = -1^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$	$C_{12} = -1^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$	$C_{13} = -1^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$
$C_{21} = -1^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$	$C_{22} = -1^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$	$C_{23} = -1^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$
$C_{31} = -1^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$	$C_{32} = -1^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$	$C_{33} = -1^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$$\text{Matriz dos cofactores da matriz } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

11. Matriz Adjunta e Matriz Inversa da matriz "A"

A matriz Adjunta da matriz A é a matriz Transposta da matriz dos cofactores dos seus elementos

Recorrendo à matriz do número anterior a matriz Adjunta, $Adj(A) = [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

A matriz Inversa da matriz "A" obtém-se dividindo a matriz Adjunta de "A" pelo determinante desta que é $\Delta = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times Adj(A) = \frac{1}{1} \times \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

12. Regra de Sarrus para cálculo do Determinante de matriz de ordem 3

Vejamos como foi calculado o determinante da matriz anterior (3 x 3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Para aplicar a regra de Sarrus é necessário:

- aumentar a matriz, à direita, com as suas duas primeiras colunas

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

- traçar as diagonais paralelas à diagonal principal e somar os produtos dos seus elementos

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

$$1 \times 2 \times 0 + (-1) \times (-1) \times 2 + 1 \times 0 \times 3 = 2$$

- traçar as diagonais paralelas à diagonal secundária e somar os produtos dos seus elementos

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 1 + 3 \times (-1) \times 1 + 0 \times 0 \times (-1) = 1$$

- o determinante da matriz é igual à diferença entre os somatórios principal (2) e secundário (1), sendo $\Delta = 2 - 1 = 1$

13. Calcular a matriz Inversa – Método de Gauss-Jordan

Inicia-se com a matriz original Aumentada com uma matriz Identidade adjacente.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$. Há Inversa? Calcular o determinante que é $\Delta = 8 - 6 = 2 \neq 0$. Há Inversa

Matriz Aumentada $\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$

Recorre-se a transformações lineares para obter a matriz: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{array} \right]$ onde teremos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Veja-se passo a passo como aplicar o método.

1º PASSO – TRANSFORMAR A 1ª COLUNA para obter o vector : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ter $a_{11} = 1$ divido a 1ª linha por 4 e tenho a linha Pivot :

$$\frac{4}{4} = 1 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 0$$

Para ter $a_{21} = 0$ multiplico a actual linha Pivot por 6 e somo com a 2ª linha

$$6 \times 1 + (-6) = 0 \quad 6 \times (-\frac{1}{4}) + 2 = \frac{1}{2} \quad 6 \times (\frac{1}{4}) + 0 = \frac{3}{2} \quad 6 \times 0 + 1 = 1$$

Fim do 1º Passo (1ª coluna pronta): $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

2º PASSO – TRANSFORMAR A 2ª COLUNA CORRENTE

Para ter $a_{22} = 1$ divido a 2ª linha por $\frac{1}{2}$ e tenho NOVA linha Pivot :

$$\frac{0}{1/2} = 0 \quad \frac{1/2}{1/2} = 1 \quad \frac{3/2}{1/2} = 3 \quad \frac{1}{1/2} = 2$$

Temos agora : $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Para ter $a_{12} = 0$ multiplico a actual linha Pivot por $\frac{1}{4}$ e somo com a 1ª linha

$$\frac{1}{4} \times 0 + 1 = 1 \quad \frac{1}{4} \times 1 + (-\frac{1}{4}) = 0 \quad \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} = 1 \quad \frac{1}{4} \times 2 + 0 = \frac{1}{2}$$

Fim do 2º Passo (2ª coluna pronta): $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Matriz Inversa } A^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & 1 & \frac{1}{2} \\ * & * & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Exemplo do cálculo da matriz Inversa pelo método de Gauss-Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1º Aumentar a matriz à direita com matriz Identidade

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2º Transformar linearmente o conjunto de vectores para obter a Matriz Identidade à esquerda

Decisão							Obs.
A	2	-2	1	1	0	0	
B	0	1	-1	0	1	0	
C	2	-2	0	0	0	1	
D = dividir linha A por 2	1	-1	1/2	1/2	0	0	
E = multiplicar linha D por 0 e somar a linha B	0	1	-1	0	1	0	
F = multiplicar linha D por -2 e somar a linha C	0	0	-1	-1	0	1	1ª coluna pronta
H = multiplicar linha G por 1 e somar a linha D	1	0	-1/2	1/2	1	0	
G = dividir linha E por 1	0	1	-1	0	1	0	
I = multiplicar linha G por 0 e somar a linha F	0	0	-1	-1	0	1	2ª coluna pronta
K = multiplicar linha J por 0.5 e somar à linha H	1	0	0	1	1	-1/2	
L = multiplicar linha J por 1 e somar à linha G	0	1	0	1	1	-1	
J = dividir linha I por -1	0	0	1	1	0	-1	3ª coluna pronta

$$\text{A matriz Inversa de A é } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

15. Característica da matriz

A Característica indica o número máximo de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz quadrada ou rectangular.

Para calcular a Característica da matriz é necessário escaloná-la.

Uma matriz considera-se escalonada, se satisfaz as seguintes condições:

- Todos os elementos abaixo de cada pivô são nulos

- se uma linha contém apenas zeros, ela deve estar abaixo das linhas que contêm elementos não nulos
- o pivô de uma linha está sempre à direita do pivô da linha anterior (ou seja, eles “escalam” para a direita ao descer pelas linhas da matriz).

Passos para escalonar uma matriz:

- **Escolha de um pivô:** O pivô é o primeiro elemento não nulo de uma linha. Se a primeira coluna tiver um número diferente de zero, esse será o pivô da primeira linha.
- **Criar zeros abaixo do pivô:** Usando operações elementares, subtrair múltiplos da linha do pivô das linhas abaixo, de modo a criar zeros abaixo do pivô.
- **Repetir para as linhas seguintes:** Passar para a linha seguinte e repetir o processo, criando pivôs nas colunas subsequentes e anulando os elementos abaixo desses pivôs.
- **Colocar as linhas nulas (se houver) no final:** Se houver linhas compostas inteiramente por zeros devem ser movidas para o final da matriz.

Exemplo:

L1 : dividir por 4

4	-2	5
-8	4	-10
1	2	2
1	-0.5	1.25
-8	4	-10
1	2	2
1	-0.5	1.25
0	0	0
0	2.5	0.75
1	-0.5	1.25
0	2.5	0.75
0	0	0

Novas linhas 2 e 3

Linha 1 x (8) + linha 2 anterior

Linha 1 x (-1) + linha 3 anterior

Linha de zeros passou para última linha

Matriz escalonada:

- há zeros abaixo de cada pivô.
- cada pivô está à direita do pivô da linha anterior.
- duas linhas não totalmente nulas
- **Característica da matriz igual a 2**

Notas: na matriz há pois 2 linhas linearmente independentes (veja-se que a 2ª linha é múltipla da 1ª).

Uma linha diferente de zero tem pelo menos um dos elementos diferente de zero

P.S Internet (calculadoras para Álgebra) : <https://www.emathhelp.net/pt/calculus-calculator/>

Morais da Silva

20Set24