IX. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Uma empresa produz mensalmente dois bens “A“ e “B” nas seguintes condições:

Recursos críticos disponíveis:	Madeira	300 Metros
	Horas de trabalho	110 Horas

		Madeira (metros)	Horas de Trabalho (h)
Consumos unitários previstos:	Produto A	30	5
	Produto B	20	10

	Produto A	Produto B
Lucro unitário da venda (€)	6	8

O Modelo Matemático para optimizar a produção é:

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcr} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1\,,\, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

em que x_1 e x_2 representam o nível de produção de “A” e “B” respectivamente.

O quadro óptimo obtido com o método Simplex é:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

Produção óptima : 4 unidades de ”A” ; 9 unidades de “B” ; lucro máximo de 96€.

Leitura da solução óptima do problema Dual:

- valor interno (preço sombra) de 1 metro de madeira: 0.1 € (porque $y_1 = {}^1/_{10}$)
- valor interno (preço sombra) de 1 hora de trabalho: 0.6 € (porque $y_2 = {}^3/_5$)
- custo de oportunidade de 1 unidade de A (valor da anti economia): 0 € (porque $y_3 = 0$)
- custo de oportunidade de 1 unidade de B (valor da anti economia): 0 € (porque $y_4 = 0$)
- valor interno óptimo, dos recursos: 96 € (porque Min $g(Y) = 300y_1 + 110y_2 = 96$)

Se o valor interno de 1 metro de madeira é de 0.1 € tal significa que se à produção for entregue mais 1 metro de madeira, a produção óptima gerará mais 0.1 € no lucro total. Se, pelo contrário, for desperdiçado 1 metro de madeira tal acarretará a perda de 0.1 € no lucro total.

Admitamos então, por exemplo, que voltamos a usar o modelo apresentado para optimizar a produção mas agora disponibilizando apenas 200 metros de madeira em vez dos 300 metros para os quais é conhecido o plano óptimo de produção.

> Será válido afirmar que, sendo de 0.1 €/metro o preço sombra da madeira, o lucro total será reduzido de 100(0.1) = 10 € passando a ser portanto 96 - 10 = 86 € ?

Já anteriormente foi referido que a validade da solução óptima do Dual está estreitamente relacionada com determinados intervalos de variação quer dos recursos (segundos membros das restrições técnicas) quer dos coeficientes das variáveis de decisão, na função objectivo.

Conhece-se a solução óptima $A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Alterando a matriz "B" para $B = \begin{bmatrix} 200 \\ 110 \end{bmatrix}$ a nova solução é $A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ que não é admissível pois x_1 tem valor negativo!

O quadro Simplex disponível é corrigido e fica:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	-1
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	11.5
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	86

Podemos agora ver que esta solução não satisfaz o critério de admissibilidade (SBNAP) mas satisfaz o critério de paragem (SBAD) pelo que se pode reoptimizar recorrendo ao método Dual-Simplex.
Há que mudar de base, saindo a variável x_1 e entrando a variável F_2. A solução óptima para a disponibilidade de 200 metros de madeira é então:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_2	-10	0	$^{-1}/_2$	1	10
x_2	$^3/_2$	1	$^1/_{20}$	0	10
f(X)	6	0	$^2/_5$	0	80

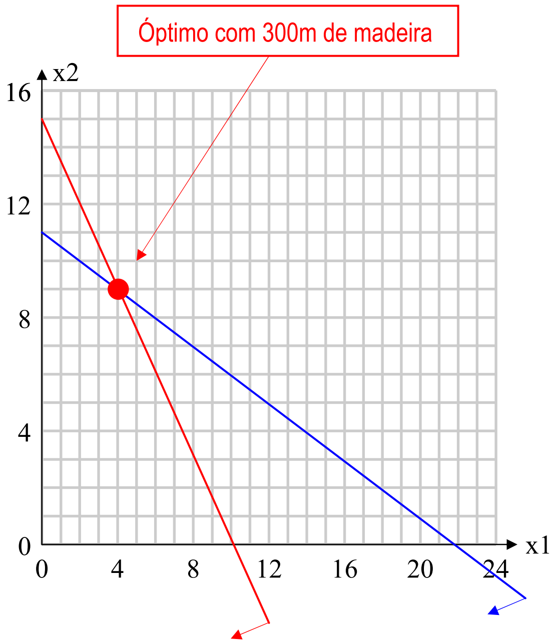
Comecemos por notar que se alteraram as bases óptimas do Primal e do Dual em consequência da redução de 100 metros de madeira. A resposta à hipótese proposta,

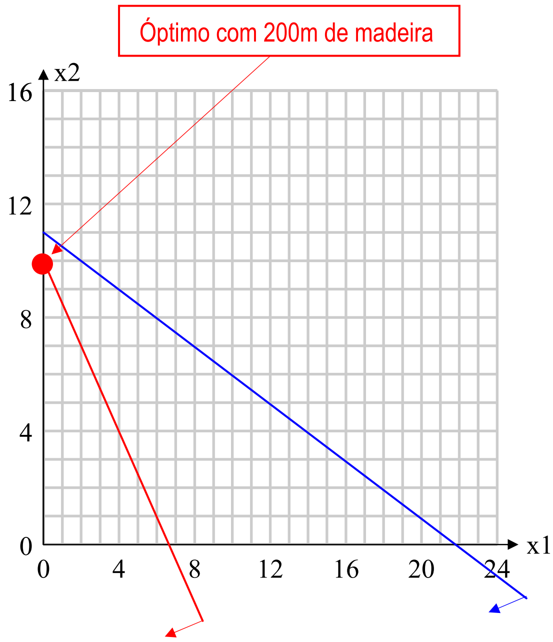
> Será válido afirmar que, sendo de 0.1 €/metro o preço sombra da madeira, o lucro total será reduzido de 100(0.1) = 10 € passando a ser portanto 96 - 10 = 86 € ?

é negativa. O lucro total óptimo passará a ser de 80€ com outra base óptima e em que o preço sombra de 1 metro de madeira passou a ser de 0.4 €/m.!!!

O preço sombra de um dado recurso é válido para uma dada base e para um determinado intervalo de variação da respectiva disponibilidade. Fora deste intervalo a base deixa de ser admissível.

Veja-se geometricamente a situação proposta (alteração da disponibilidade de madeira de 300m para 200m):





A alteração da disponibilidade de madeira modificou o espaço de soluções admissíveis (note que a restrição de horas de trabalho passou a ser redundante) e deslocou a solução básica óptima de x_1=4 e x_2=9 com 300 metros de madeira, para x_2=10 e F_2=10 com 200 metros de madeira.

Mudanças de base óptima também poderão ocorrer se houver alterações dos coeficientes de lucro ou dos coeficientes da matriz técnica.

Eis as razões da necessidade de "medir a robustez" de uma solução antes de a adoptar (decidir).

No exemplo proposto com 300m de madeira, se for decidido produzir os bens "A" e "B" teremos:

- Plano (estrutura da solução): produzir "A" e "B" (base com as variáveis x_1 e x_2)
- Programa (valor das VB) : 4 unidades de "A" e 9 unidades de "B" (x_1 = 4 ; x_2 = 9)

Atente-se que um mesmo plano pode consentir várias programações mas que "Replanear" implica sempre "Reprogramar".

Na prática não são desejáveis situações que obriguem a alterar quer o planeamento quer a programação mas, reconheça-se, uma boa decisão não dá espaço a "surpresas" que obriguem a "replaneamento".

Conclua-se que após o cálculo de uma solução óptima tem que efectuar-se a sua análise matemática para obter informação que ajude a gerir a incerteza associada a um plano.

Denominando por “A” a matriz técnica do modelo, por “B” a matriz dos segundos membros das restrições técnicas e por “C” a matriz de coeficientes das variáveis de decisão na função objectivo, o esquema seguinte mostra os diferentes tipos de análise que podem ser efectuados:

Análise de Perturbação

Análise de Tolerância

Análise de Tolerância Simétrica

Análise Paramétrica

Análise de sensibilidade

Intervalo admissível de variação independente de “A” ou “B” ou “C”

Intervalo admissível de variação simultânea, no mesmo sentido, em “A” ou “B” ou “C”

Mesma variação percentual admissível, no mesmo sentido, em todos os valores de “A” e/ou “B” e/ou “C”

Variação percentual admissível, nos dois sentidos, para cada um dos valores de “A”, “B” e/ou “C”

Conjunto máximo para quaisquer variações simultâneas em “A”, “B”, “C”

Neste capítulo tratar-se-á apenas da Análise de Sensibilidade (variações independentes em “A” ou “B” ou “C”).

Para a solução óptima do problema proposto vamos quantificar as seguintes variações admissíveis (variações que não comprometem a base óptima):

- Intervalo de variação admissível da disponibilidade de madeira
- Intervalo de variação admissível da disponibilidade de horas de trabalho
- Intervalo de variação admissível do lucro unitário de venda do produto “A”
- Intervalo de variação admissível do lucro unitário de venda do produto “B”

Nota

A abordagem teórica do cálculo destes intervalos de variação será feita considerando o modelo Primal com a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(X) = CX \\ &\text{s.a.} \\ &AX \leq B \\ &B \geq 0 \\ &X \geq 0 \end{aligned}$$

1. Análise de Sensibilidade - Segundos Membros das restrições técnicas

O conjunto dos segundos membros forma uma matriz coluna que vimos designando por "B".

A alteração da matriz "B" reflecte-se exclusivamente nas matrizes do quadro Simplex $A_m^{-1}B$ e $C_m A_m^{-1}B$.

Atendendo a que o critério de admissibilidade é satisfeito com $A_m^{-1}B \geq 0$ concluímos que:

Qualquer alteração no vector "B" só afecta a optimalidade, de uma solução básica X*, se deixar de observar-se o critério de admissibilidade $A_m^{-1}B \geq 0$.

Vejamos como actuar retomando o exemplo anteriormente proposto:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcr} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1 , x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

O quadro óptimo associado é:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

Análise de Sensibilidade - Disponibilidade de Madeira "b_1" (valor actual = 300 metros)

Definamos $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ 110 \end{bmatrix}$ em vez de $B = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix}$.

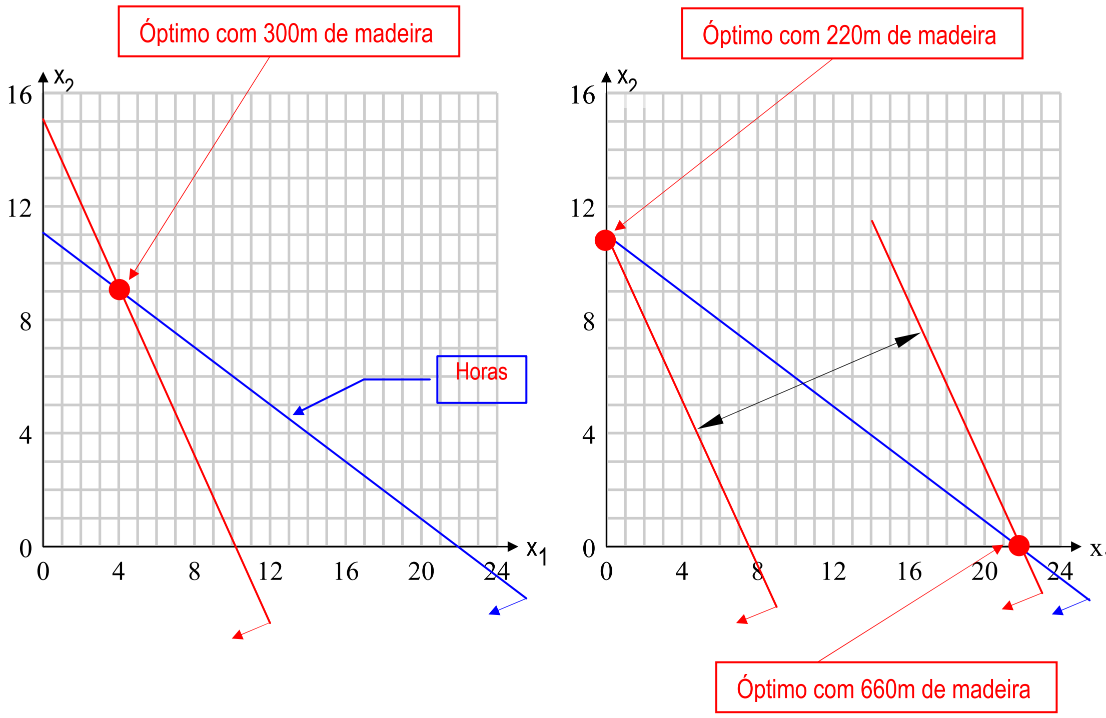
Estabeleçamos a condição de admissibilidade $A_m^{-1}B \geq 0 \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 \\ 110 \end{bmatrix} \geq 0$ e calculemos o intervalo de variação de "b_1" onde a base óptima se mantém:

$$\begin{cases} \frac{1}{20}b_1 - \frac{1}{10}(110) \geq 0 \\ -\frac{1}{40}b_1 + \frac{3}{20}(110) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 \geq 220 \; metros \\ b_1 \leq 660 \; metros \end{cases}$$

Conclusão: A variação independente da disponibilidade de madeira, no intervalo [220 , 660] , não afecta a estrutura da base óptima. Para os valores extremos (220 e 660 metros) a solução óptima é Degenerada dado estar na fronteira de transição para outra base óptima.

Ao decisor interessa saber que a decisão de produzir "A" e "B" usando 300 metros de madeira não é alterada ainda que "faltem" 80 metros de madeira (cerca de -27%) ou "utilizar" mais 360 metros (cerca de +120%).

Vejamos a geometria associada ao intervalo calculado:



Vejam-se as rectas-fronteira (paralelas) da disponibilidade de madeira em que as VB do óptimo são sempre x_1 e x_2.

Recomenda-se ao leitor o cálculo dos quadros óptimos do Simplex para disponibilidade de madeira nos extremos do intervalo.

Análise de Sensibilidade - Disponibilidade de horas de trabalho "b_2" (valor actual = 110 horas)

Definamos $B=\begin{bmatrix}300\\ b_2\end{bmatrix}$ em vez de $B=\begin{bmatrix}300\\ 110\end{bmatrix}$.

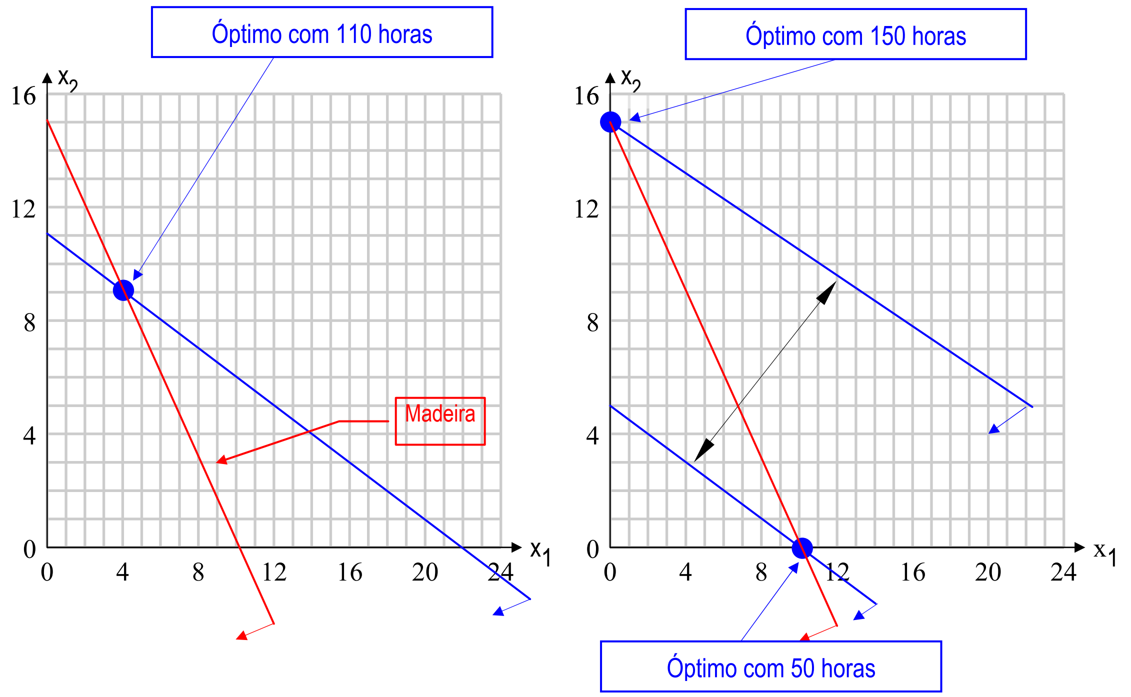
Estabeleçamos a condição de admissibilidade $A_m^{-1}B\geq 0\equiv\begin{bmatrix}\frac{1}{20} & -\frac{1}{10}\\ -\frac{1}{40} & \frac{3}{20}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}300\\ b_2\end{bmatrix}\geq 0$ e calculemos o intervalo de variação de "b_2" onde a base óptima se mantém:

$$\begin{cases}\frac{1}{20}(300)-\frac{1}{10}b_2\geq 0\\ -\frac{1}{40}(300)+\frac{3}{20}b_2\geq 0\end{cases}\begin{cases}b_2\leq 150\ horas\\ b_2\geq 50\ horas\end{cases}$$

Conclusão: A variação independente da disponibilidade das horas de trabalho, no intervalo [50 , 150] , não afecta a estrutura da base óptima. Para os valores extremos (50 e 150 horas) a solução óptima é Degenerada dado estar na fronteira de transição para outra base óptima.

Ao decisor interessa saber que a decisão de produzir "A" e "B" usando 110 horas de trabalho não é alterada ainda que "faltem" 60 horas (cerca de -54%) ou "utilizar" mais 40 horas (cerca de +36%).

Vejamos a geometria associada ao intervalo calculado:



Vejam-se as rectas-fronteira (paralelas) da disponibilidade de horas de trabalho onde as VB do óptimo são sempre x_1 e x_2.

Recomenda-se ao leitor o cálculo dos quadros óptimos do Simplex para disponibilidade de horas de trabalho nos extremos do intervalo.

a. Cálculo dos intervalos em situação particular

a.1. Base Óptima com variáveis de folga

Se na base óptima uma variável de folga é VB então é porque o recurso é abundante.

Nesta situação o intervalo de variação do recurso tem os seguintes limites:

limite Superior = + ∞

limite Inferior = Valor actual - Valor da variável de folga

a.2. Base Óptima com variáveis excedentárias

Se na base óptima uma variável excedentária é VB então é porque o valor do 2º membro é escasso.

Nesta situação o intervalo de variação do 2º membro da restrição associada à variável tem os seguintes limites:

limite Superior = Valor actual + Valor da variável excedentária

limite Inferior = - ∞

b. Cálculo dos intervalos no quadro Óptimo

Pode efectuar-se o cálculo anterior no quadro óptimo recorrendo à interpretação algébrica dos vectores das variáveis básicas do quadro inicial do Simplex (variáveis de folga e/ou artificiais).

O quadro óptimo do problema proposto é o seguinte:

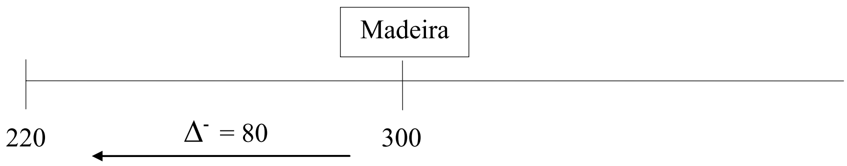
VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

Simulando F_1 = 1, 2 , 3 ... metros de madeira (sobra) reduz-se a disponibilidade de madeira para 299, 298, … metros.

Para calcular o <u>máximo de metros de madeira que se podem reduzir</u> sem alterar a estrutura da base óptima corrente, é necessário calcular a menor "ratio" positiva que se pode estabelecer sendo divisores os valores positivos do vector de F_1 (não é mais do que calcular o valor de F_1 para entrar na base).

Do exame do quadro-óptimo corrente verifica-se que se $F_1 = \frac{4}{\frac{1}{20}} = 80$ metros entra para a base por troca com a VB x_1 que se anula.

Ora se F_1 pode atingir 80 metros, a disponibilidade de madeira <u>pode ser reduzida</u>, no máximo, de 80 metros pelo que o limite inferior procurado é 300 - 80 = 220 metros como mostra a figura seguinte:

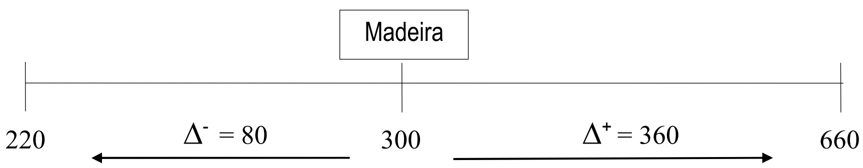


Simulando F_1 = -1, -2 , -3, ... metros de madeira aumenta-se a disponibilidade de madeira para 301, 302, … metros.

Para calcular o <u>máximo de metros de madeira que se podem aumentar</u> sem alterar a estrutura da base óptima corrente, é necessário calcular a menor "ratio" absoluta que se pode estabelecer sendo denominadores os valores negativos do vector de F_1.

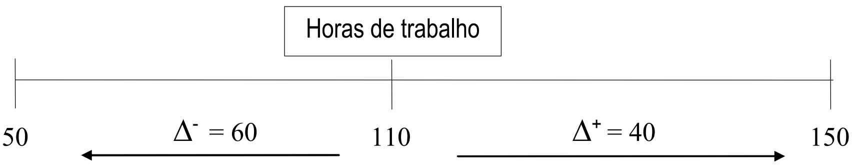
Do exame do quadro-óptimo corrente verifica-se que se $F_1 = \frac{9}{-\frac{1}{40}} = -360$ metros entra para a base por troca com a VB x_2 que se anula.

Ora se F_1 pode atingir -360 metros, a disponibilidade de madeira <u>pode ser aumentada</u>, no máximo, de 360 metros pelo que o limite superior procurado é 300 + 360 = 660 metros como mostra a figura seguinte:



Usando agora a variável F_2 para simular o aumento/diminuição das horas de trabalho obtêm-se os seguintes resultados:

$$\begin{cases} \Delta^+ = \left| \dfrac{4}{-\frac{1}{10}} \right| = 40 \ horas \\ \Delta^- = \dfrac{9}{\frac{3}{20}} = 60 \quad horas \end{cases}$$



Nota : Se no vector da variável auxiliar não há elementos negativos então $\Delta^+ = +\infty$ e o limite superior do intervalo é " $+\infty$ ".

Inversamente se no vector da variável auxiliar não há elementos positivos então $\Delta^- = +\infty$ e o limite inferior do intervalo é " $-\infty$ ".

Só se utilizam para denominadores das "ratio", os coeficientes das variáveis auxiliares:

variáveis de folga nas restrições do tipo " $\leq$ "

variáveis artificiais nas restrições do tipo " $\geq$ "

c. Variação simultânea dos segundos membros das restrições técnicas

Embora o presente capítulo seja dedicado apenas à variação independente dos segundos membros das restrições técnicas é fácil aplicar o exposto à variação simultânea dos mesmos.

Para o exemplo proposto basta considerar $B = \begin{bmatrix} 300 + v_1 \\ 110 + v_2 \end{bmatrix}$ e recalcular a solução básica óptima:

$$A_m^{-1} B \geq 0 \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 + v_1 \\ 110 + v_2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{20} v_1 - \frac{1}{10} v_2 + 4 \geq 0 \\ -\frac{1}{40} v_1 + \frac{3}{20} v_2 + 9 \geq 0 \end{cases}$$

Nestas condições a solução básica em ordem às variações "v_1" e "v_2" é:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	$\frac{1}{20} v_1 - \frac{1}{10} v_2 + 4$
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	$-\frac{1}{40} v_1 + \frac{3}{20} v_2 + 9$
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	$\frac{1}{10} v_1 + \frac{3}{5} v_2 + 96$

Comparando esta solução parametrizada com a original conclui-se que os coeficientes de "v_1" e "v_2" são os das variáveis de equilíbrio de cada uma das restrições o que torna desnecessário o seu cálculo ($^1/_{20}$ da variável F_1 e $-^1/_{10}$da variável F_2 no caso da VB x_1).

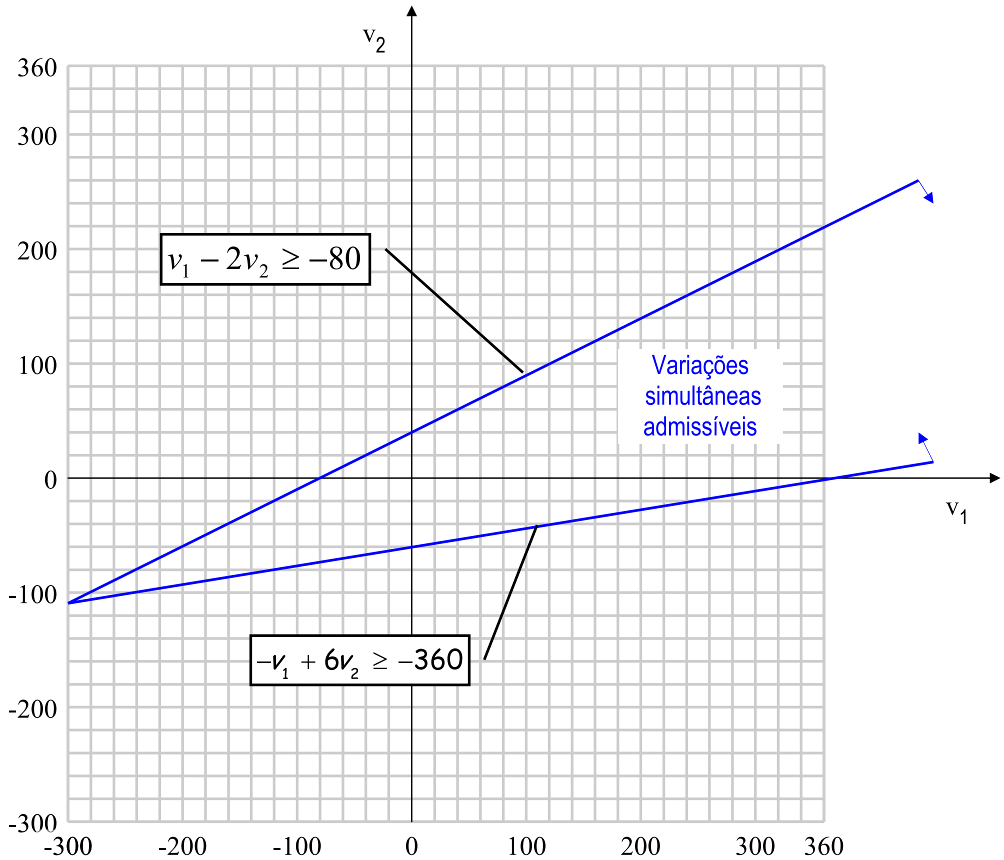
Notar que para variações nulas ($v_1 = 0$ e $v_2 = 0$) a solução é a já calculada:

$$x_1 = 4 \ ; x_2 = 9 \ ; \ f(X) = 96€$$

A base óptima mantém-se desde que se verifiquem as restrições:

$$\begin{cases} \frac{1}{20}v_1 - \frac{1}{10}v_2 + 4 \geq 0 \\ -\frac{1}{40}v_1 + \frac{3}{20}v_2 + 9 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} v_1 - 2v_2 \geq -80 \\ -v_1 + 6v_2 \geq -360 \end{cases}$$

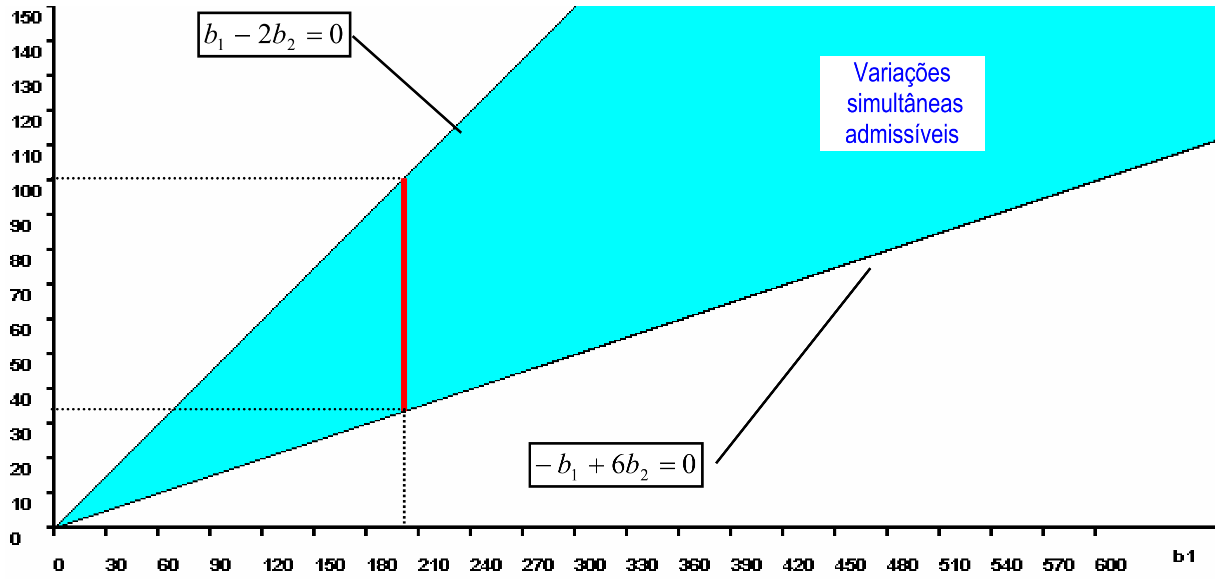
Geometricamente o espaço das variações dos segundos membros que mantêm a optimalidade da solução básica com VB x_1 e x_2 é o seguinte:



Na origem do espaço (v_1 = -300 ; v_2 = -110) a solução óptima é $x_1 = x_2 = 0$ correspondente a $b_1 = 300 + v_1 = 0$ e $b_2 = 110 + v_2 = 0$.

Podemos obter informação idêntica calculando a solução básica em ordem a "b_1" e "b_2", graficar os resultados e ler directamente valores admissíveis para variação simultânea dos segundos membros:

$$A_m^{-1}B \geq 0 \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 - 2b_2 \geq 0 \\ -b_1 + 6b_2 \geq 0 \end{cases}$$



Por exemplo, para 200 metros de madeira, o número de horas pode variar no intervalo assinalado que corresponde a:

$$\begin{cases} b_1 - 2b_2 \geq 0 \\ -b_1 + 6b_2 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 200 - 2b_2 \geq 0 \\ -200 + 6b_2 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} b_2 \leq 100 \\ b_2 \geq 33.33 \end{cases}$$

Vejam-se os quadros óptimos para os extremos do intervalo de variação admissível do número de horas:

	x1	x2	F1	F2	VSM	
F1	30	20	1	0	200	
F2	5	10	0	1	100/ 3	
f (X)	-6	-8	0	0	0	Maximizar
F1	20	0	1	-2	400/ 3	
x2	1/ 2	1	0	1/ 10	10/ 3	
f (X)	-2	0	0	4/ 5	80/ 3	
x1	1	0	1/ 20	- 1/ 10	20/ 3	
x2	0	1	- 1/ 40	3/ 20	0	
f (X)	0	0	1/ 10	3/ 5	40	Óptimo

Limite inferior

	x1	x2	F1	F2	VSM	
F1	5	10	1	0	100	
F2	30	20	0	1	200	
f (X)	-6	-8	0	0	0	Maximizar
x2	1/ 2	1	1/ 10	0	10	
F2	20	0	-2	1	0	
f (X)	-2	0	4/ 5	0	80	
x2	0	1	3/ 20	- 1/ 40	10	
x1	1	0	- 1/ 10	1/ 20	0	
f (X)	0	0	3/ 5	1/ 10	80	Óptimo

Limite superior

Veja-se a manutenção da estrutura da base óptima (plano de produção).

Em capítulo posterior será abordada a técnica para parametrizar os segundos membros das restrições técnicas.

2. Análise de Sensibilidade - Coeficientes da função objectivo

Considere-se a função objectivo f(X) = $6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2$ em que x_1 e x_2 são as variáveis de decisão e as restantes são variáveis de folga nas duas restrições do modelo.

Como foi referido no capítulo "Versão Matricial do Simplex" o conjunto destes coeficientes forma as matrizes $C_a = [6 \quad 8]$ e $C_i = [0 \quad 0]$.

A alteração da matriz "C_a" reflecte-se em $C_m A_m^{-1} A - C_a$ do quadro Simplex e ainda em $C_m A_m^{-1} - C_i$ se o coeficiente alterado é de uma variável básica.

Em qualquer dos casos o critério de paragem pode deixar de ser observado e portanto a solução deixar de ser óptima (obrigando a mudança de base).

Atendendo a que a regra de paragem é satisfeita com $C_m A_m^{-1} A - C_a \geq 0$ e $C_m A_m^{-1} - C_i \geq 0$ concluímos que:

> Maximização de f(X) com AX ≤ B
>
> Qualquer alteração nos coeficientes de f(X) só afecta a optimalidade, de uma solução básica óptima X^*, se deixar de observar-se a regra de paragem $C_m A_m^{-1} A - C_a \geq 0$ e $C_m A_m^{-1} - C_i \geq 0$

Vejamos como actuar retomando o exemplo anteriormente proposto:

Max f(X) = $6x_1 + 8x_2$

sujeito a:	$30x_1$	+	$20x_2$	≤	300	Variável dual associada $y_1 \geq 0$
	$5x_1$	+	$10x_2$	≤	110	Variável dual associada $y_2 \geq 0$
			x_1, x_2	≥	0	

O quadro óptimo associado é:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

Critério de Paragem:

$$C_m A_m^{-1} - C_a = [y_3 \geq 0 \quad y_4 \geq 0]$$

$$C_m A_m^{-1} - C_i = [y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0]$$

Análise do coeficiente de lucro unitário do produto "A" (valor actual = 6€)

Designemos por "c_1" este coeficiente de lucro.

O sistema de desigualdades resultante de $C_m A_m^{-1} A - C_a \geq 0$ é:

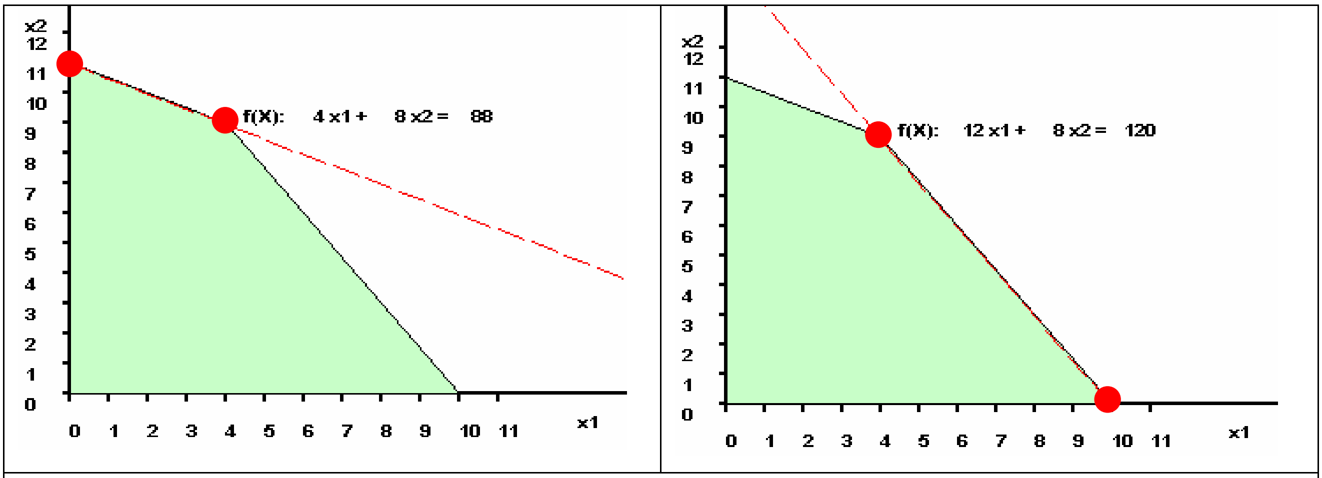
$$C_m A_m^{-1} A - C_a = \begin{bmatrix} c_1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 & 8 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 - 0 \geq 0 \\ 0 - 0 \geq 0 \end{cases}$$

O sistema de desigualdades resultante de $C_m A_m^{-1} - C_i \geq 0$ é:

$$C_m A_m^{-1} - C_i = \begin{bmatrix} c_1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{20} c_1 - \frac{8}{40} \geq 0 \\ -\frac{1}{10} c_1 + \frac{24}{20} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} c_1 \geq 4 \\ c_1 \leq 12 \end{cases}$$

Conclusão: A <u>variação independente</u> do coeficiente unitário de lucro do produto "A", no intervalo [4 , 12] , não afecta a estrutura da base óptima. Para os valores extremos (4 e 12 euros) a solução óptima é <u>Indeterminada</u> dado estar na fronteira de transição para outra base óptima.

Geometria do modelo associada aos extremos do intervalo calculado



Veja pontos óptimos alternativos (indeterminação)

O decisor sabe agora que, variando o coeficiente de lucro unitário do produto "A", pode obter lucro total desde 88 a 120 euros sem alterar o plano óptimo corrente.

Análise do coeficiente de lucro unitário do produto "B" (valor actual = 8€)

Designando por "c_2" o coeficiente de lucro, o sistema de desigualdades resultante de $C_m A_m^{-1} A - C_a \geq 0$ é:

$$C_m A_m^{-1} A - C_a = \begin{bmatrix} 6 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & c_2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 - 0 \geq 0 \\ 0 - 0 \geq 0 \end{cases}$$

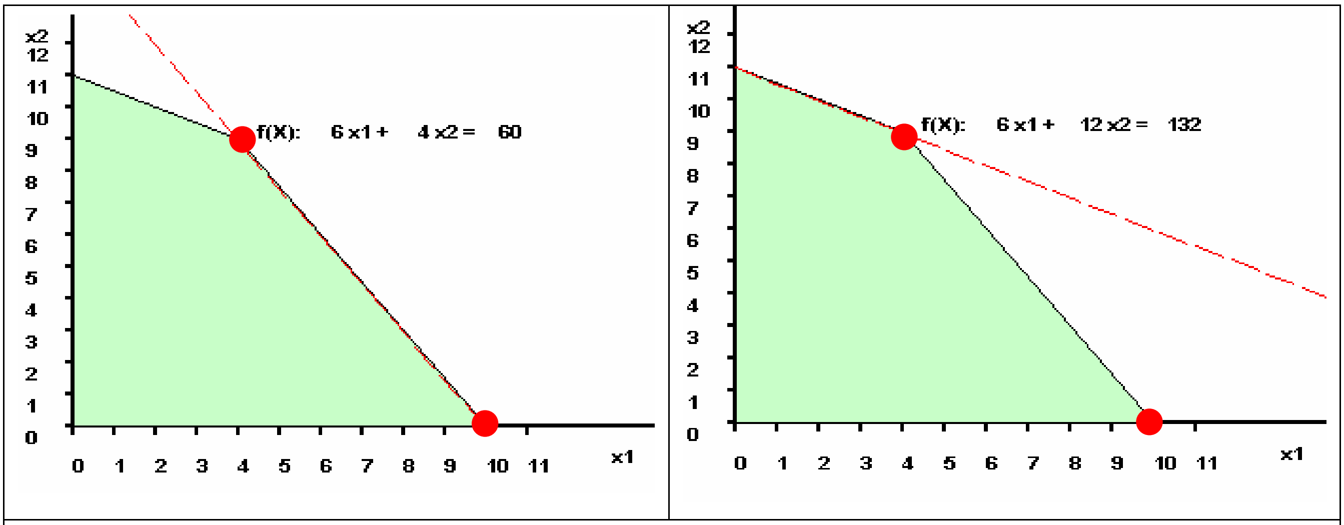
e o sistema de desigualdades resultante de $C_m A_m^{-1} - C_i \geq 0$ é:

$$C_m A_m^{-1} - C_i = \begin{bmatrix} 6 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \begin{cases} \dfrac{6}{20} - \dfrac{c_2}{40} \geq 0 \\ -\dfrac{6}{10} + \dfrac{3c_2}{20} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} c_2 \leq 12 \\ c_2 \geq 4 \end{cases}$$

O intervalo que satisfaz "$c_2 \leq 12$ e $c_2 \geq 4$ é [4 , 12].

Conclusão: A variação independente do coeficiente unitário de lucro do produto "B", no intervalo [4 , 12] , não afecta a estrutura da base óptima. Nos valores extremos (4 e 12 euros) a solução óptima é Indeterminada dado estar na fronteira de transição para outra base óptima.

Geometria do modelo associada aos extremos do intervalo calculado



* Assinalados os pontos óptimos alternativos (indeterminação)

O decisor sabe agora que, variando o coeficiente de lucro unitário do produto "B", pode obter lucro total desde 60 a 132 euros sem alterar o plano óptimo corrente.

a. Cálculo dos intervalos em situação particular

a.1. O coeficiente a estudar é de uma VNB no óptimo

Se uma variável de decisão não pertence à base óptima (e não há indeterminação associada a esta variável) então há anti economia associada pelo que o intervalo de variação do coeficiente de lucro tem os seguintes limites:

limite Inferior = $-\infty$
limite Superior = c_j + valor da anti economia

a.2. O coeficiente a estudar é de uma VB no óptimo

O coeficiente, em f(X), de uma variável de decisão do Primal é o segundo membro de uma restrição Dual. Resulta desta ligação que os limites de variação daquele coeficiente que mantêm a estrutura da base óptima, são iguais aos da variação do segundo membro da restrição Dual associada.

Para o problema Primal proposto o modelo Dual e respectivo quadro óptimo são os seguintes:

Min $g(Y) = 300y_1 + 110y_2$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcl} 30y_1 & + & 5y_2 & \geq & 6 \\ 20y_1 & + & 10y_2 & \geq & 8 \\ & & y_1 , y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Quadro óptimo da minimização de g(Y)

VB	y_1	y_2	y_3	y_4	A_1	A_2	VSM
y_1	1	0	$-1/20$	$1/40$	$1/20$	$-1/40$	$1/10$
y_2	0	1	$1/10$	$-3/20$	$-1/10$	$3/20$	$3/5$
g	0	0	-4	-9	4	9	96

Para calcular os limites de variação do 2º membro da 1ª restrição Dual (associada a x_1) tem-se pelo processo rápido das "ratio" com os vectores da matriz A_m^{-1}:

$$\Delta^+ = \left| \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{10}} \right| = 6 \quad \Rightarrow limite\ superior = 6 + 6 = 12$$

$$\Delta^- = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{20}} = 2 \quad \Rightarrow limite\ inferior = 6 - 2 = 4$$

Eis o intervalo [4 , 12] onde "c_1" (coeficiente de x_1) pode variar sem alterar a base óptima.

Comparemos o cálculo efectuado com os valores disponíveis no quadro óptimo do Primal para "descobrir" neste, a técnica de cálculo do intervalo de variação:

Quadro óptimo da Maximização de f(X)

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$1/20$	$-1/10$	4
x_2	0	1	$-1/40$	$3/20$	9
f(X)	0	0	$1/10$	$3/5$	96

Para obter os valores máximos dos aumentos/reduções que podem fazer-se em "c_1" é necessário:

- Fixar a equação "pivot" : é a equação da variável x_1 pois estamos a estudar o seu coeficiente em f(X)
- Fixar as colunas das VNB (colunas de F_1 e F_2)

- Nas colunas das VNB calcular as "ratios" entre os coeficientes da equação de f(X) e os coeficientes da equação "pivot" do seguinte modo:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

"Ratio" Negativa com menor valor absoluto = $\left|\frac{3}{5} / \frac{-1}{10}\right| = 6$ (é o aumento máximo para c_1)

Limite superior do intervalo de c_1 = Valor corrente + 6 = 6 + 6 = 12 euros/unidade de A

"Ratio" Positiva com menor valor = $\left|\frac{1}{10} / \frac{1}{20}\right| = 2$ (é a redução máxima para c_1)

Limite inferior do intervalo de c_1 = Valor corrente - 2 = 6 - 2 = 4 euros/unidade de A

Procedendo de forma idêntica com o coeficiente "c_2" os valores máximos dos aumentos/reduções que podem fazer-se, sem afectar a base óptima, são:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

"Ratio" Negativa com menor valor absoluto = $\left|\frac{1}{10} / \frac{-1}{40}\right| = 4$ (é o aumento máximo para c_2)

Limite superior do intervalo de c_2 = Valor corrente + 4 = 8 + 4 = 12 euros/unidade de B

"Ratio" Positiva de menor valor = $\left|\frac{3}{5} / \frac{3}{20}\right| = 4$ (é a redução máxima para c_2)

Limite inferior do intervalo de c_2 = Valor corrente - 4 = 8 - 4 = 4 euros/unidade de B

b. Cálculo dos intervalos no quadro Óptimo

O cálculo matricial efectuado pode ser conduzido no próprio quadro óptimo desde que nas suas margens sejam registadas as matrizes $C_m \; e \, C_a$.

Para o estudo do coeficiente c_1 veja-se o arranjo do quadro Simplex:

$$C_a = \begin{bmatrix} c_1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C_m^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

Os coeficientes na equação de f(X), em ordem a "c_1" são:

$$\begin{cases} c_1(1)+8(0)-c_1 \\ c_1(0)+8(1)-8 \\ c_1(\frac{1}{20})+8(\frac{-1}{40})-0 \\ c_1(\frac{-1}{10})+8(\frac{3}{20})-0 \end{cases}$$

Colocando estes resultados no quadro Simplex temos:

$C_a = \begin{bmatrix} c_1 & 8 \end{bmatrix}$

$C_m^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ 8 \end{bmatrix}$

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$\frac{c_1}{20} - \frac{1}{5}$	$\frac{-c_1}{10} + \frac{6}{5}$	

Para garantir a optimalidade desta base é necessário observar a regra de paragem o que implica que os coeficientes $\frac{c_1}{20} - \frac{1}{5}$ e $\frac{-c_1}{10} + \frac{6}{5}$ devem manter-se não negativos:

$$\begin{cases} \frac{c_1}{20} - \frac{1}{5} \geq 0 \\ \frac{-c_1}{10} + \frac{6}{5} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \geq 4 \\ c_1 \leq 12 \end{cases}$$

Como se vê o intervalo calculado, [4 , 12] , está correcto.

Para calcular a variação do coeficiente "c_2" procede-se de modo idêntico:

$C_a = \begin{bmatrix} 6 & c_2 \end{bmatrix}$

$C_m^T = \begin{bmatrix} 6 \\ c_2 \end{bmatrix}$

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$\frac{6}{20} - \frac{c_2}{40}$	$\frac{-6}{10} + \frac{3c_2}{20}$	

Para garantir a optimalidade desta base é necessário observar a regra de paragem o que implica que os coeficientes $\frac{6}{20} - \frac{c_2}{40}$ e $\frac{-6}{10} + \frac{3c_2}{20}$ devem manter-se não negativos:

$$\begin{cases} \frac{6}{20} - \frac{c_2}{40} \geq 0 \\ \frac{-6}{10} + \frac{3c_2}{20} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 \geq 4 \\ c_2 \leq 12 \end{cases}$$

Como se vê o intervalo calculado, [4 , 12] , está correcto.

c. Variação simultânea dos coeficientes das variáveis de decisão, na função objectivo

Embora o presente capítulo seja dedicado apenas a variações independentes é fácil aplicar o exposto à variações simultâneas.

Considerando $C_a = [c_1 \quad c_2]$ e calculando os coeficientes na equação de f(X), temos:

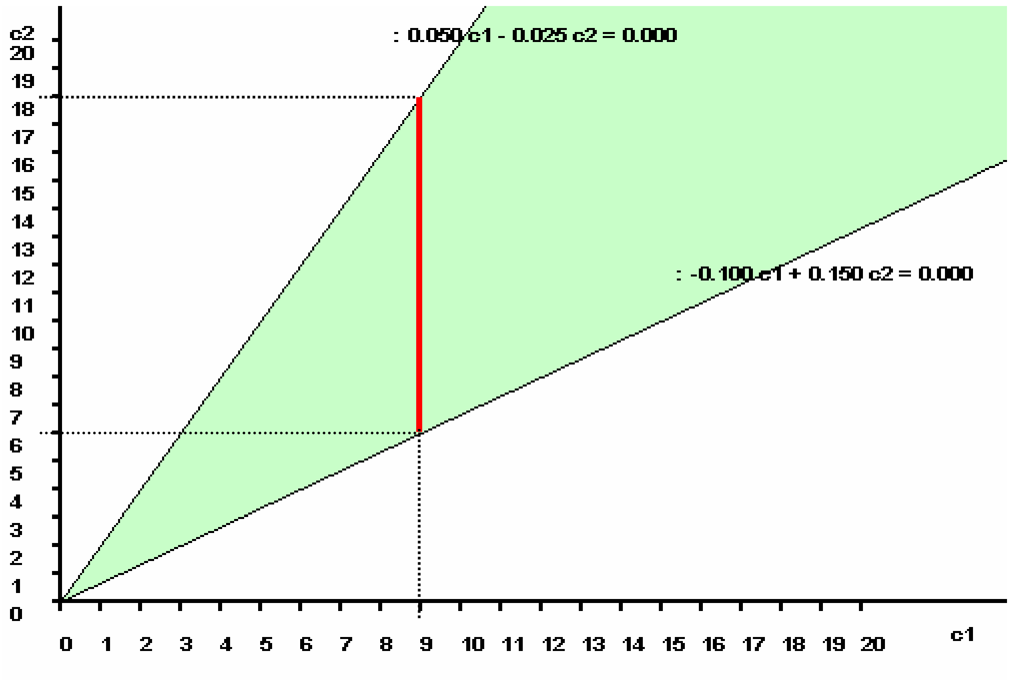
$C_a = [c_1 \quad c_2]$

$C_m^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$\frac{c_1}{20} - \frac{c_2}{40}$	$\frac{-c_1}{10} + \frac{3c_2}{20}$	

Esta base óptima mantém-se desde que os coeficientes, expressos em ordem a "c_1" e c_2", se mantenham não negativos.

Região geral admissível para valores de "c_1" e "c_2" $\begin{cases} \frac{c_1}{20} - \frac{c_2}{40} \geq 0 \\ \frac{-c_1}{10} + \frac{3c_2}{20} \geq 0 \end{cases}$



Exemplo de leitura:

Com lucro unitário de 9€ para o produto "A", o lucro unitário para "B" pode variar no intervalo assinalado :

$$\begin{cases} \frac{c_1}{20} - \frac{c_2}{40} \geq 0 \\ \frac{-c_1}{10} + \frac{3c_2}{20} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} C_2 \leq 18 \\ C_2 \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \text{6 a 18 euros}$$

Os quadros óptimos para estes extremos do lucro unitário do produto “B” são:

	x1	x2	F1	F2	VSM	
F1	30	20	1	0	300	
F2	5	10	0	1	110	
f (X)	-9	-6	0	0	0	Maximizar
x1	1	2/ 3	1/ 30	0	10	
F2	0	20/ 3	- 1/ 6	1	60	
f (X)	0	0	3/ 10	0	90	Óptimo
x1	1	0	1/ 20	- 1/ 10	4	
x2	0	1	- 1/ 40	3/ 20	9	
f (X)	0	0	3/ 10	0	90	Alternativa

	x1	x2	F1	F2	VSM	
F1	30	20	1	0	300	
F2	5	10	0	1	110	
f (X)	-9	-18	0	0	0	Maximizar
F1	20	0	1	-2	80	
x2	1/ 2	1	0	1/ 10	11	
f (X)	0	0	0	9/ 5	198	Óptimo
x1	1	0	1/ 20	- 1/ 10	4	
x2	0	1	- 1/ 40	3/ 20	9	
f (X)	0	0	0	9/ 5	198	Alternativa

Veja-se a manutenção da estrutura da base óptima (plano de produção).

Em capítulo posterior será abordada a técnica para parametrizar os coeficientes da função objectivo.

3. Exemplo de aplicação

Uma empresa pretende produzir dois produtos “A “e “B” nas seguintes condições:

- O total do stock não deve ocupar no armazém mais do que 4 unidades de área (u.a.).
- Uma unidade do produto “A” ocupa 2 u.a., enquanto ”B” necessita apenas de 1 u.a.
- O stock do produto “A” deve ser pelo menos de 1 unidade.
- Os lucros unitários de venda são, respectivamente, de 1€ para “A” e de 2€ para “B”.

Considerando x_1 e x_2 as quantidades de “A” e “B” a produzir, o modelo de PL para calcular o plano óptimo de produção é o seguinte:

Max $f(X) = x_1 + 2x_2$

s.a.

$$\begin{array}{lcccc} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & & & \geq & 1 \\ & & & & x_1 , x_2 \geq 0 \end{array}$$

com quadro-óptimo:

VB	x_1	x_2	E_2	F_1	A_2	VSM
x_1	1	0	-1	0	1	1
x_2	0	1	2	1	-2	2
f(X)	0	0	3	2	-3	5

a. Analisar a sensibilidade do modelo à variação independente da área de armazenagem e do stock do produto “A”.

b. Analisar a sensibilidade do modelo à variação independente dos lucros unitários de venda de “A” e “B”.

c. Software disponível para resolver este tipo de análise

4. Solução do Exemplo de aplicação

a. Análise de Sensibilidade (segundos membros)

Para manter a estrutura da solução óptima, é necessário que se mantenha $A_m^{-1}B \geq 0$.

a.1. Segundo membro da primeira restrição (área de armazenagem)

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

Obtém-se $b_1 - 2 \geq 0$, donde $b_1 \geq 2$ (não há limite superior).

A base óptima mantém-se para $b_1 \in [2 \quad +\infty[$

a.2. Segundo membro da segunda restrição (stock de "A")

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ b_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

Obtém-se $b_2 \geq 0$ e $b_2 \leq 2$.

A base óptima mantém-se para $b_2 \in [0 \quad 2]$

b. Análise de Sensibilidade (coeficientes da função objectivo)

Tendo em consideração as restrições lógicas do problema Dual, a regra de paragem exige para os coeficientes da equação de f(X):

VB	x_1	x_2	E_2	F_1	A_2	VSM
x_1	1	0	-1	0	1	1
x_2	0	1	2	1	-2	2
f(X)	$C_m A_m^{-1} - C_a = [y_3 \geq 0 \quad y_4 \geq 0]$		3	$C_m A_m^{-1} - C_i = [y_1 \geq 0 \quad y_2 \leq 0]$		5

b.1. Coeficiente de lucro unitário do produto "A" (valor corrente 1€)

Dado que x_1 é VB, calculam-se para f(X) os coeficientes de F_1 e A_2:

$$C_m A_m^{-1} - C_i = [c_1 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - [0 \quad 0] = [2 \quad c_1 - 4]$$

Obteve-se $y_1 = 2$ e $y_2 = c_1 - 4$. A restrição lógica de $y_2 \leq 0$ impõe:

$$c_1 - 4 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 \leq 4 \text{ (não há limite inferior)}$$

A base óptima mantém-se para $c_1 \in]-\infty \quad 4]$

b.2. Coeficiente de lucro unitário do produto "B" (valor corrente 2€)

Dado que x_2 é VB, calculam-se para f(X) os coeficientes de F_1 e A_2:

$$C_m A_m^{-1} - C_i = \begin{bmatrix} 1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & 1-2c_2 \end{bmatrix}$$

Obteve-se $y_1 = c_2$ e $y_2 = 1 - 2c_2$. As restrições lógicas de y_1 e y_2 impõem:

$$\begin{cases} c_2 \geq 0 \\ 1-2c_2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 \geq 0 \\ c_2 \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_2 \geq \tfrac{1}{2} \text{ (não há limite superior)}$$

A base óptima mantém-se para $c_2 \in \left[\tfrac{1}{2} \quad +\infty\right[$

O quadro seguinte resume o cálculo efectuado:

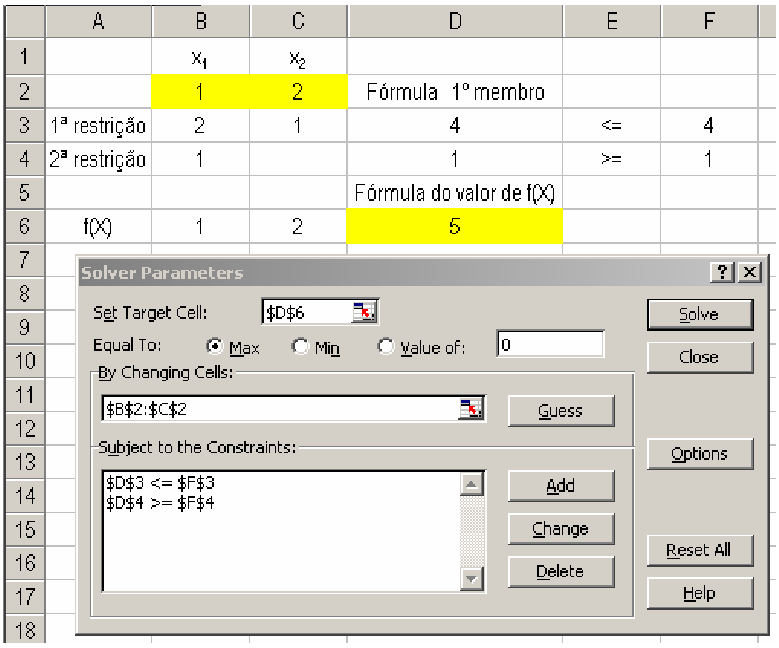
Análise de Sensibilidade

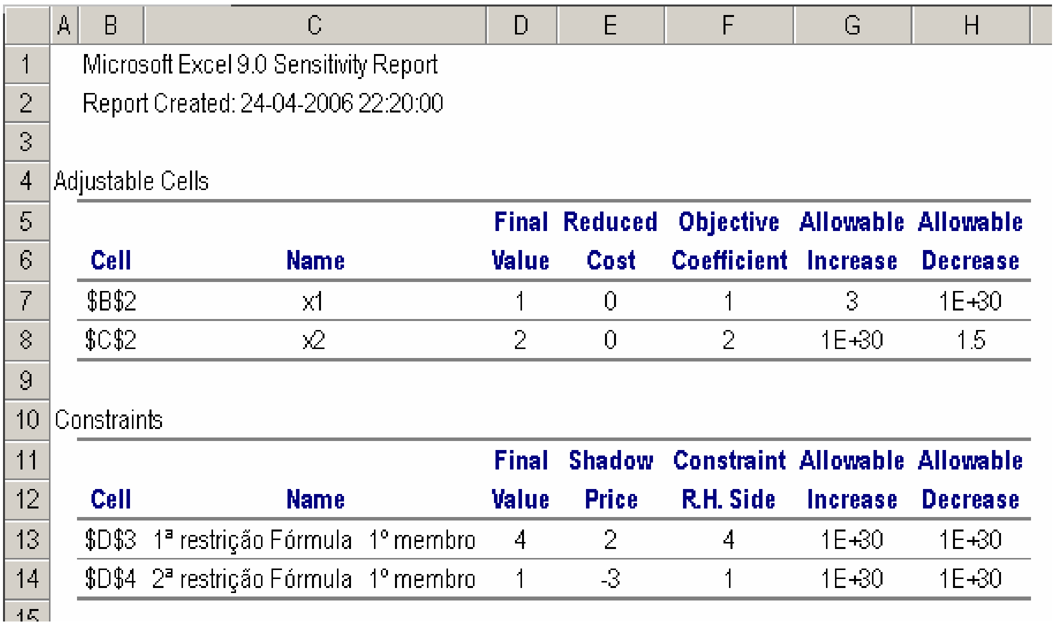
	Limite Inferior	Actual	Limite Superior
b_1	2	4	$+\infty$
b_2	0	1	2
c_1	$-\infty$	1	4
c_2	$^1/_2$	2	$+\infty$

c. Software disponível

O software existente no mercado apresenta sempre a Análise de Sensibilidade associada à solução óptima como mostram os exemplos seguintes:

c.1. Microsoft Office (Solver do Excel)





Microsoft Excel 9.0 Sensitivity Report
Report Created: 24-04-2006 22:20:00

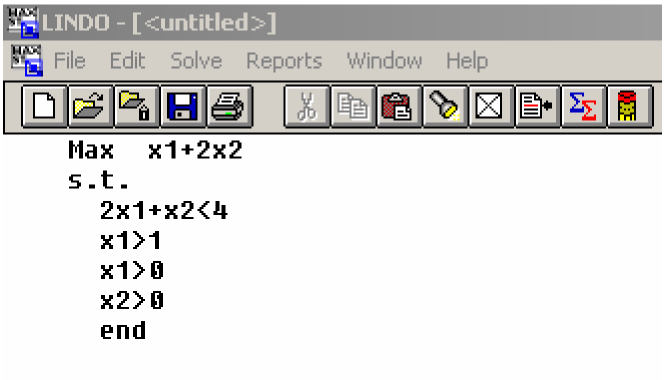
Adjustable Cells

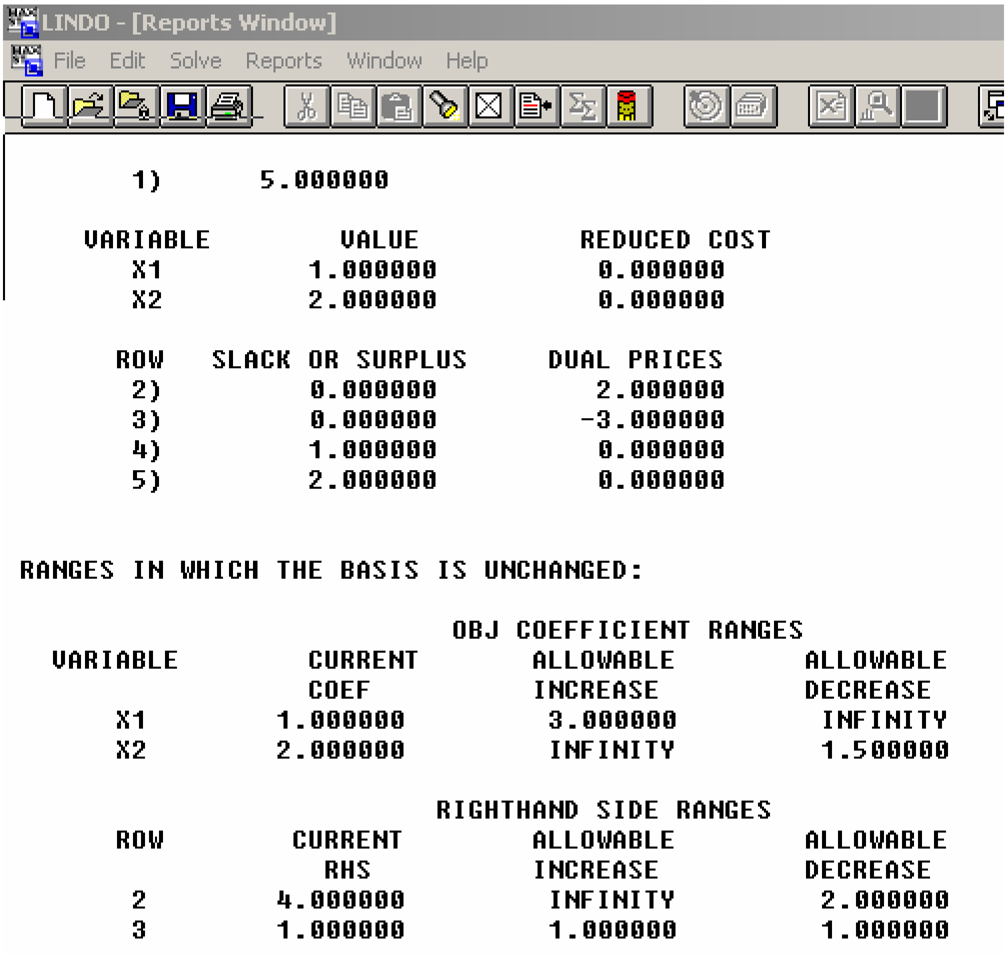
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
B2	x1	1	0	1	3	1E+30
C2	x2	2	0	2	1E+30	1.5

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
D3	1ª restrição Fórmula 1º membro	4	2	4	1E+30	1E+30
D4	2ª restrição Fórmula 1º membro	1	-3	1	1E+30	1E+30

c.2. Lindo * (software comercializado por Lindo Systems)

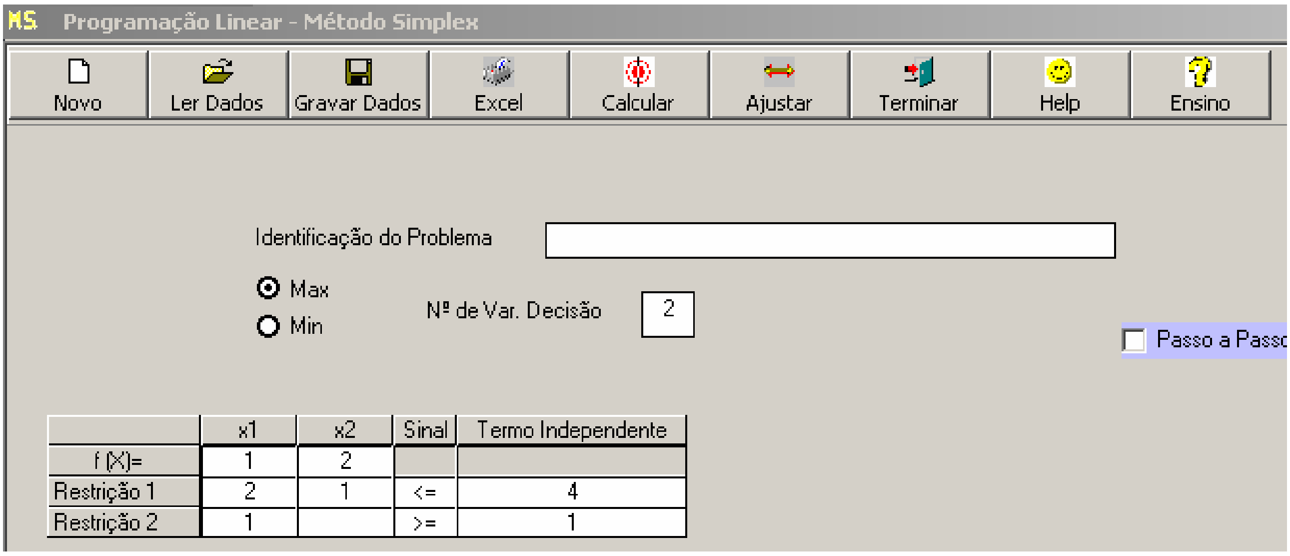




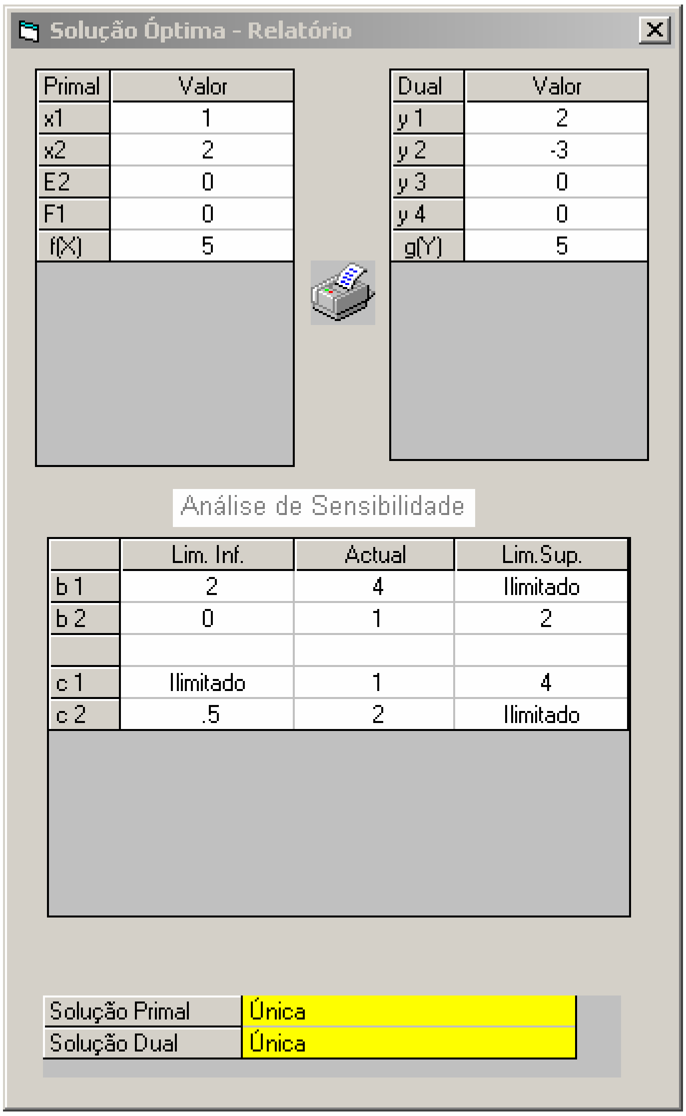

```
        1)      5.000000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         1.000000          0.000000
       X2         2.000000          0.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          2.000000
       3)         0.000000         -3.000000
       4)         1.000000          0.000000
       5)         2.000000          0.000000

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1        1.000000        3.000000         INFINITY
       X2        2.000000        INFINITY         1.500000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        2        4.000000        INFINITY         2.000000
        3        1.000000        1.000000         1.000000
```

* A versão para estudante é grátis

c.3. Software do autor



	x1	x2	Sinal	Termo Independente
f (X)=	1	2		
Restrição 1	2	1	<=	4
Restrição 2	1		>=	1



Primal	Valor
x1	1
x2	2
E2	0
F1	0
f(X)	5

Dual	Valor
y 1	2
y 2	-3
y 3	0
y 4	0
g(Y)	5

	Lim. Inf.	Actual	Lim.Sup.
b 1	2	4	Ilimitado
b 2	0	1	2
c 1	Ilimitado	1	4
c 2	.5	2	Ilimitado

Solução Primal	Única
Solução Dual	Única

5. Auto Teste

Um modelo de PL tem a seguinte estrutura:

- 3 variáveis de decisão não negativas (x_1 , x_2 , x_3)
- 1ª restrição técnica do tipo " $\leq$ "
- 2ª restrição técnica do tipo " = "
- 3ª restrição técnica do tipo " $\geq$ "
- Maximização de f(x_1 , x_2 , x_3)

Considere que na forma-padrão foram utilizadas as variáveis auxiliares F_1 (1ª restrição) e E_3 (3ª restrição) e que a solução óptima foi calculada usando o Método dos "dois passos".

O quadro Simplex foi organizado da forma usual:

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	F_1	A_2	A_3	VSM
Base								
f(X)								

a. Considerando que x_1 , x_2 e F_1 são VB no óptimo, responda às seguintes questões:

a.1. Identificar, no quadro, as colunas da matriz A_m^{-1}

a.2. Identificar, no quadro, as colunas da matriz $A_m^{-1} A$

a.3. Identificar, no quadro, a matriz $A_m^{-1} B$

a.4. Identificar, no quadro, as colunas da matriz $C_m A_m^{-1} A - C_a$

a.5. Identificar, no quadro, as colunas da matriz $C_m A_m^{-1} - C_i$

a.6. Identificar, no quadro, a matriz $C_m A_m^{-1} B$

a.7. Condições a estabelecer para calcular a sensibilidade do modelo à variação do coeficiente c_3 ?

b. Considerar o modelo de PL:

○ Max
◉ Min

Nº de Var. Decisão: 3

	x 1	x 2	x 3	Sinal	2º membro
f (X)=	5	3	2		
Restrição 1	1	2	1	<=	16
Restrição 2	1	1	1	>=	8
Restrição 3	2	2	1	>=	9

e o quadro óptimo:

Quadro Óptimo

(Matriz inversa da base nas colunas amarelas)

	x 1	x 2	x 3	E2	E3	F1	A2	A3	VSM	
x 2	1	1	0	1	-1	0	-1	1	1	
x 3	0	0	1	-2	1	0	2	-1	7	
F1	-1	0	0	0	1	1	0	-1	7	
f (X)	-2	0	0	-1	-1	0	1	1	17	Mínimo

Analisar a sensibilidade do modelo para variações independentes dos segundos membros das restrições e coeficientes de lucro.

6. Solução do Auto Teste

a. Quadro Óptimo de Max f(X) com restrições "≤" , "=" e "≥" respectivamente

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	F_1	A_2	A_3	VSM
X_m		$A_m^{-1}A$				A_m^{-1}		$A_m^{-1}B \geq 0$
$f(X)$		$C_m A_m^{-1} A - C_a$				$C_m A_m^{-1} - C_i$		$C_m A_m^{-1} B$
		≥ 0			$y_1 \geq 0$	y_2 livre	$y_3 \leq 0$	

a.7. As condições a estabelecer para c_3 são as seguintes:

$$C_m A_m^{-1} A - C_a = \begin{bmatrix} \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 \end{bmatrix}$$
$$C_m A_m^{-1} - C_i = \begin{bmatrix} \geq 0 & Livre & \leq 0 \end{bmatrix}$$

No quadro óptimo de uma Maximização, os coeficientes das variáveis em f(X) são:

- Não negativos nas variáveis de decisão
- Não negativos nas variáveis de Folga
- Não negativos nas variáveis Excedentárias (sendo pois Não Positivos nas variáveis Artificiais associadas)

Notar que enquanto se pode afirmar que, no quadro óptimo, as coordenadas do vector linha do produto matricial $C_m A_m^{-1} A - C_a$ são todas não negativas na Maximização e não positivas na Minimização já tal generalização não pode ser feita para o produto matricial $C_m A_m^{-1} - C_i$ onde o valor das coordenadas está associado ao domínio das variáveis de decisão do problema Dual.

b. Análise de Sensibilidade

b.1. Termos Independentes

O cálculo é efectuado considerando que uma solução admissível implica $A_m^{-1} B \geq 0$:

$$A_m^{-1}.\begin{bmatrix} b_1 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} b_1 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ b_1 - 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ b_1 \geq 9 \end{cases} \Rightarrow b_1 \in \left[9 \; +\infty\right[$$

$$A_m^{-1}.\begin{bmatrix} 16 \\ b_2 \\ 9 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 16 \\ b_2 \\ 9 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -b_2 + 9 \geq 0 \\ 2b_2 - 9 \geq 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 \leq 9 \\ b_2 \geq \frac{9}{2} \Rightarrow b_2 \in \left[\frac{9}{2} \quad 9\right] \\ - \end{cases}$$

$$A_m^{-1}.\begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ b_3 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ b_3 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + b_3 \geq 0 \\ 16 - b_3 \geq 0 \\ 16 - b_3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_3 \geq 8 \\ b_3 \leq 16 \Rightarrow b_3 \in \left[8 \quad 16\right] \\ b_3 \leq 16 \end{cases}$$

b.2. Coeficientes da função objectivo

Quadro Óptimo de Min f(X) com restrições "≤" , "≥", "≥" respectivamente

VB	x_1 x_2 x_3	E_3	F_1	A_2	A_3	VSM
X_m	$A_m^{-1}A$		A_m^{-1}			$A_m^{-1}B \geq 0$
$f(X)$	$C_m A_m^{-1} A - C_a$		$C_m A_m^{-1} - C_i$			$C_m A_m^{-1} B$
	≤ 0		$y_1 \leq 0$	$y_2 \geq 0$	$y_3 \geq 0$	

No quadro óptimo de uma Minimização, os coeficientes das variáveis em f(X) são:

- Não positivos nas variáveis de decisão
- Não positivos nas variáveis de Folga
- Não positivos nas variáveis Excedentárias (sendo pois Não Negativos nas variáveis Artificiais associadas)

Atente-se que, no quadro óptimo de uma Minimização, os valores das variáveis Auxiliares Duais (y_4 , y_5 e y_6) são simétricos dos coeficientes, em f(X), das variáveis de decisão x_1, x_2 e x_3. Sendo estes não positivos, os valores simétricos são não negativos o que está de acordo com a condição de não negatividade associada a todas as variáveis auxiliares do problema Dual.

Notar que enquanto se pode afirmar que, no quadro óptimo, as coordenadas do vector linha do produto matricial $C_m A_m^{-1} A - C_a$ são todas não negativas na Maximização e não positivas na Minimização já tal generalização não pode ser feita para o produto matricial $C_m A_m^{-1} - C_i$ onde o valor das coordenadas está associado ao domínio das variáveis de decisão do problema Dual.

Orlando as margens do quadro óptimo com os valores dos coeficientes das variáveis em f(X) temos:

Coeficiente c_1:

		[c_1	3	2]			[0	0	0]
	VB	x_1	x_2	x_3	E_2	E_3	F_1	A_2	A_3
3	x_2	1	1	0	1	-1	0	-1	1
2	x_3	0	0	1	-2	1	0	2	-1
0	F_1	-1	0	0	0	1	1	0	-1
		≤ 0	≤ 0	≤ 0			≤ 0	≥ 0	≥ 0

$$\{3 + 0 - c_1 \leq 0 \quad \{c_1 \geq 3 \Rightarrow c_1 \in [3 \quad +\infty[$$

Coeficiente c_2:

		[5	c_2	2]			[0	0	0]
	VB	x_1	x_2	x_3	E_2	E_3	F_1	A_2	A_3
c_2	x_2	1	1	0	1	-1	0	-1	1
2	x_3	0	0	1	-2	1	0	2	-1
0	F_1	-1	0	0	0	1	1	0	-1
		≤ 0	≤ 0	≤ 0			≤ 0	≥ 0	≥ 0

$$\begin{cases} c_2+0+0-5\le 0 \\ -c_2+4+0\ge 0 \\ c_2-2+0\ge 0 \end{cases} \begin{cases} c_2\le 5 \\ c_2\le 4 \\ c_2\ge 2 \end{cases} \Rightarrow c_2\in\left[2 \quad 4\right]$$

Coeficiente c_3:

		[5	3	c_3]			[0	0	0]
	VB	x_1	x_2	x_3	E_2	E_3	F_1	A_2	A_3
3	x_2	1	1	0	1	-1	0	-1	1
c_3	x_3	0	0	1	-2	1	0	2	-1
0	F_1	-1	0	0	0	1	1	0	-1
		≤ 0	≤ 0	≤ 0			≤ 0	≥ 0	≥ 0

$$\begin{cases} -3+2c_3+0\ge 0 \\ 3-c_3+0\ge 0 \end{cases} \begin{cases} c_3\ge \frac{3}{2} \\ c_3\le 3 \end{cases} \Rightarrow c_3\in\left[\tfrac{3}{2} \quad 3\right]$$

O quadro resumo é pois o seguinte:

Análise de Sensibilidade

	Lim. Inf.	Actual	Lim.Sup.
b 1	9	16	Ilimitado
b 2	9/ 2	8	9
b 3	8	9	16
c 1	3	5	Ilimitado
c 2	2	3	4
c 3	3/ 2	2	3