VIII. MÉTODO DUAL-SIMPLEX

1. Introdução

Uma solução gerada pelo método Simplex só é Óptima se satisfaz simultaneamente dois critérios:

- Critério de Admissibilidade: as variáveis básicas têm valor não negativo
- Critério de Paragem: na equação da função objectivo no quadro do Simplex, os coeficientes das variáveis de decisão e de equilíbrio são todos não negativos (Maximização) ou não positivos (Minimização)

A qualquer solução do problema Primal que satisfaça o Critério de Admissibilidade está associada uma solução do problema Dual que satisfaz o Critério de Paragem.

A qualquer solução do problema Primal que satisfaça o Critério de Paragem está associada uma solução do problema Dual que satisfaz o Critério de Admissibilidade.

Comparemos os quadros Simplex de soluções Não Óptimas dos problemas seguintes:

Problema Primal

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{rcrcl} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Problema Dual

$$\text{Min } g(Y) = 300y_1 + 110y_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{rcrcl} 30y_1 & + & 5y_2 & \geq & 6 \\ 20y_2 & + & 10y_2 & \geq & 8 \\ & & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Soluções associadas (complementares) dos problemas Primal e Dual

Problema Primal

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	20	0	1	-2	80
x_2	$^1/_2$	1	0	$^1/_{10}$	11
f (X)	- 2	0	0	$^4/_5$	88

Problema Dual

VB	y_1	y_2	y_3	y_4	A_1	A_2	VSM
y_2	2	1	0	$-^1/_{10}$	0	$^1/_{10}$	$^4/_5$
y_3	- 20	0	1	$-^1/_2$	-1	$^1/_2$	- 2
g(Y)	- 80	0	0	-11	0	11	88

Satisfaz o Critério de Admissibilidade
Não satisfaz o Critério de Paragem

Satisfaz o Critério de Paragem
Não satisfaz o Critério de Admissibilidade

A mudança da base no problema Primal implica:

Nova VB : x_1

Nova VNB : F_1

No Dual a variável auxiliar y_3 é complementar da variável de decisão x_1 do problema Primal.

Se x_1 entra para a base corrente do Primal então y_3 sai da base corrente do Dual (mantém-se $x_1y_3 = 0$).

No Dual a variável de decisão y_1 é complementar da variável auxiliar F_1 do problema Primal.

Se F_1 sai da base corrente do Primal então y_1 entra para a base corrente do Dual (mantém-se $F_1y_1 = 0$).

Os quadros resultantes destas decisões são os seguintes:

Problema Primal					
VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

Problema Dual							
VB	y_1	y_2	y_3	y_4	A_1	A_2	VSM
y_1	1	0	$^{-1}/_{20}$	$^1/_{40}$	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{40}$	$^1/_{10}$
y_2	0	1	$^1/_{10}$	$^{-3}/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	$^3/_{20}$	$^3/_5$
g(Y)	0	0	- 4	- 9	4	9	96

Satisfaz o Critério de Admissibilidade
Satisfaz o Critério de Paragem

Satisfaz o Critério de Paragem
Satisfaz o Critério de Admissibilidade

Porque as duas soluções satisfazem simultaneamente os dois critérios as soluções associadas são Óptimas.

As relações de complementaridade Primal-Dual são, como vimos, o fundamento do método do Dual-Simplex.

2. Método do Dual-Simplex

Admitamos agora que, dispondo do quadro óptimo do problema Primal pretendemos estudar as consequências da alteração do 2º membro da 1ª restrição de 300 para 200.

Recorrendo á versão matricial do Simplex recalculamos $A_m^{-1}B$ e o valor de f(X) obtendo a solução seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	-1
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	$^{23}/_2$
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	86

Esta nova solução do problema Primal :

- não é admissível ($x_1 < 0$)
- satisfaz o critério de paragem porque todos os coeficientes na equação de f(X), do quadro Simplex, são não negativos

A solução Dual associada:

- não satisfaz o critério de paragem porque há coeficientes positivos na equação de g(Y) do quadro Simplex associado
- satisfaz o critério de admissibilidade ($y_1 = {}^1/_{10}$; $y_2 = {}^3/_5$; $y_3 = y_4 = 0$)

Diremos que no quadro do Primal temos uma SBNAP (Solução Básica Não Admissível do Primal) e uma SBAD (Solução Básica Admissível do Dual).

Método Dual-Simplex

Só pode ser utilizado quando no quadro do Primal existe uma SBNAP associada a uma SBAD

(Dual-Simplex sugere o uso do Simplex no quadro Primal mas resolvendo o problema Dual associado)

Para melhor apreender o método Dual-Simplex vamos fazê-lo na presença dos quadros Simplex associados dos dois problemas:

Problema Primal (Max)					
VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	-1
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	$^{23}/_2$
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	86
	y_3	y_4	y_1	y_2	

SBNAP

SBAD

Problema Dual (min)							
VB	y_1	y_2	y_3	y_4	A_1	A_2	VSM
y_1	1	0	$^{-1}/_{20}$	$^1/_{40}$	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{40}$	$^1/_{10}$
y_2	0	1	$^1/_{10}$	$^{-3}/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	$^3/_{20}$	$^3/_5$
g(Y)	0	0	1	$^{-23}/_2$	-1	$^{23}/_2$	86
	$-F_1$	$-F_2$			x_1	x_2	

SBAD

SBNAP

Para prosseguir a optimização no quadro Dual:

- entra para a base a variável y_3 porque tem o maior coeficiente positivo em g(Y)
- sai da base y_2 (menor "ratio" não negativa ($^3/_5$) / ($^1/_{10}$) = 6)

Para reproduzir esta mudança de base, actuando no quadro do Primal, é necessário decidir do seguinte modo:

- sai da base a variável x_1 (é complementar de y_3 que entra para a base do problema Dual)
- entra para a base a variável F_2 (é complementar da variável y_2 que sai da base do problema Dual)

Deste estudo comparativo, conclui-se que é possível resolver o problema Dual actuando apenas no quadro do problema Primal (o que justifica designar o método por Dual-Simplex).

Da sequência de decisões que obtivemos para o quadro Primal (sai x_1 ; entra F_2) podemos estabelecer que no Dual-Simplex a mudança de base, no quadro Simplex do problema Primal, é efectuada com a seguinte sequência.:

1º Seleccionar a variável que sai da base corrente

2º Seleccionar a variável que entra para a nova base

3. **Dual-Simplex : Seleccionar, no quadro Simplex do Primal, a variável que sai da base**

O critério a utilizar deve garantir que se reduza ou anule a não admissibilidade da solução do problema Primal.

Se a falta de admissibilidade decorre da existência de VB com valor negativo, deve sair da base a VB com valor mais negativo.

4. **Dual-Simplex: Seleccionar, no quadro Simplex do Primal, a variável que entra para a base**

Retomemos os quadros associados anteriores:

Problema Primal (Max)					
VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	-1
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	$^{23}/_2$
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	86
	y_3	y_4	y_1	y_2	

Problema Dual (min)							
VB	y_1	y_2	y_3	y_4	A_1	A_2	VSM
y_1	1	0	$^{-1}/_{20}$	$^1/_{40}$	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{40}$	$^1/_{10}$
y_2	0	1	$^1/_{10}$	$^{-3}/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	$^3/_{20}$	$^3/_5$
g(Y)	0	0	1	$^{-23}/_2$	-1	$^{23}/_2$	86
	$-F_1$	$-F_2$			x_1	x_2	

Mudança de Base no quadro do Dual

Entra y_3 : coeficiente mais positivo em g(Y)

Sai y_2 : menor "ratio" não negativa é $\left(\frac{3}{5}\right)/\left(\frac{1}{10}\right) = 6$

Estudada a mudança de base no quadro do Dual examine-se o quadro associado do Primal para encontrar o critério da escolha da variável que deve entrar para a base (sabendo já que a variável que sai da base é x_1).

A "ratio" mínima, em valor absoluto, é $\left|\left(\frac{3}{5}\right)/\left(\frac{-1}{10}\right)\right| = 6$ que se estabelece na coluna de F_2.

Porque é necessário que no quadro seguinte a solução continue a satisfazer o critério de paragem (todos os coeficientes da equação da função não negativos) a regra para escolher a variável que entra para a base é a seguinte:

Dual-Simplex : Escolha da nova VB no quadro do Primal

Equação-pivot : equação da variável que sai da base

Entra para a base a variável onde se verifica o <u>menor valor absoluto das "ratio"</u> estabelecidas entre os coeficientes na equação da função objectivo e os coeficientes <u>negativos</u> da equação-pivot.

Apliquemos esta regra no quadro do Primal onde se decidiu que x_1 sai da base:

Problema Primal					
VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	-1
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	$^{23}/_2$
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	86
	y_3	y_4	y_1	y_2	

Problema Dual							
VB	y_1	y_2	y_3	y_4	A_1	A_2	VSM
y_1	1	0	$^{-1}/_{20}$	$^1/_{40}$	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{40}$	$^1/_{10}$
y_2	0	1	$^1/_{10}$	$^{-3}/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	$^3/_{20}$	$^3/_5$
g(Y)	0	0	1	$^{-23}/_2$	-1	$^{23}/_2$	86
	F_1	F_2			x_1	x_2	

Equação-pivot : linha de x_1

Só há um coeficiente negativo para divisor…

"Ratio(s)" em valor absoluto:

$$\left(\tfrac{3}{5}\right)/\left(\tfrac{-1}{10}\right)=6$$

Sai da base a variável F_2

No quadro seguinte o coeficiente de x_1, na equação de f(X), será "6" (valor da "ratio")

Problema Primal						Obs.
VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	-1	Sai x_1
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	$^{23}/_2$	Entra F_2
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	86	
F_2	- 10	0	$^{-1}/_2$	1	10	
x_2	$^3/_2$	1	$^1/_{20}$	0	10	
f(X)	6	0	$^2/_5$	0	80	Novo Óptimo

Solução óptima do problema Primal: $X^*=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\F_1\\F_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\10\\0\\10\end{bmatrix};Max\ \ f(X^*)=80$

Solução óptima do problema Dual: $Y^*=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\0\\6\\0\end{bmatrix};Min\ g(Y^*)=80$

Notar que a admissibilidade da nova solução é consequência da divisão da equação "pivot" por um coeficiente negativo (eis porque se escolhe um valor negativo para divisor da "ratio"…).

Aconselha-se o leitor a iterar no quadro do problema Dual e comparar o quadro óptimo com o que foi calculado para o problema Primal.

5. RESUMO DO MÉTODO DO DUAL-SIMPLEX

Condições necessárias para aplicar o Dual-Simplex no quadro do problema Primal

- *A Solução Básica do Primal, não é admissível (SBNAP)*
- *A Solução Básica do Dual, é admissível (SBAD)*

Ter sempre em atenção o seguinte:

- se a solução Primal satisfaz o critério de paragem, a solução Dual é admissível

Variável que sai da base da solução do Primal

- *Variável Básica com valor negativo de maior valor absoluto (mais negativa)*

Variável que entra para a base da solução do Primal

Considerando "pivot" a equação (linha) da VB que sai da base:

Entra para a base a variável onde se registar o menor valor absoluto das "ratio" entre os coeficientes da função objectivo e os coeficientes <u>negativos</u> da equação "pivot".

6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO (Maximização da função objectivo)

Considere-se a seguinte solução da Maximização de $f(X) = -4x_1 - 2x_2 - 3x_3$:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
x_2	0	1	$^1/_3$	0	0	$^{-1}/_3$	3
F_1	-1	0	$^{-1}/_3$	1	0	$^{-2}/_3$	-1
F_2	-2	0	-3	0	1	0	-5
f(X)	4	0	$^7/_3$	0	0	$^2/_3$	-6

A solução não é admissível (SBNAP).

A solução satisfaz a regra de paragem pelo que a solução do Dual é admissível (SBAD).

Pode aplicar-se, neste quadro, o método Dual-Simplex para progredir no cálculo da solução óptima.

Estudo da mudança de base:

- Quem sai da base?

  Variável F_2 por ser a VB com valor mais negativo. A linha de F_2 é a equação "pivot" para escolha dos divisores para estabelecer "ratios"

- Quem entra para a base?

  Variável x_3 porque das "ratios" com divisor negativo $\frac{4}{-2}, \frac{7/3}{-3}$ a de menor valor absoluto é $\frac{7}{9}$ (coluna de x_3)

Nova solução:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
x_3	$^2/_3$	0	1	0	$^{-1}/_3$	0	$^5/_3$
x_2	$^{-2}/_9$	1	0	0	$^1/_9$	$^{-1}/_3$	$^{22}/_9$
F_1	$^{-7}/_9$	0	0	1	$^{-1}/_9$	$^{-2}/_3$	$^{-4}/_9$
f(X)	$^{22}/_9$	0	0	0	$^7/_9$	$^2/_3$	$^{-89}/_9$

A solução não é admissível (SBNAP).

A solução satisfaz a regra de paragem pelo que a solução do Dual é admissível (SBAD).

Pode aplicar-se, neste quadro, o método Dual-Simplex para progredir no cálculo da solução óptima.

Estudo da mudança de base:

- Variável que sai da base: F_1 (é a VB com valor mais negativo). A equação "pivot" é a linha desta VB.
- Variável que entra para a base: F_3 porque,

  "Ratios" com divisor negativo : $\frac{22/9}{-7/9}, \frac{2/3}{-2/3}$

  "Ratio" com menor valor absoluto: $\left| -\frac{22}{7}, -1 \right| = 1$ na coluna de F_3

Nova solução:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM	
F_3	$^7/_6$	0	0	$^{-3}/_2$	$^1/_6$	1	$^2/_3$	
x_3	$^2/_3$	0	1	0	$^{-1}/_3$	0	$^5/_3$	
x_2	$^1/_6$	1	0	$^{-1}/_2$	$^1/_6$	0	$^8/_3$	
f(X)	$^5/_3$	0	0	1	$^2/_3$	0	$^{-31}/_3$	Óptimo

Solução óptima do problema Primal: $X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$; $Max\ f(X^*) = -\frac{31}{3}$

Solução óptima do problema Dual: $Y^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $Min\ g(y^*) = -\frac{31}{3}$

7. EXEMPLO DE APLICAÇÃO (Minimização da função objectivo)

Resolver o modelo seguinte recorrendo ao método Dual-Simplex:

Min $f(X) = 7x_1 + 5x_2 + x_3$

s.a.

$$\begin{array}{lllllll} 5x_1 & & & - & 3x_3 & \geq & 7 \\ & & 2x_2 & - & 5x_3 & \geq & 4 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 3 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Multiplicando as duas primeiras restrições por “-1” temos:

$$\begin{array}{lllllll} -5x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & -7 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & -4 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 3 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Quadro Inicial:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
F_1	-5	0	3	1	0	0	-7
F_2	0	-2	5	0	1	0	-4
F_3	1	-3	0	0	0	1	3
f(X)	-7	-5	-1	0	0	0	0

A solução não é admissível (SBNAP).

A solução satisfaz a regra de paragem, em minimização, pelo que a solução do Dual é admissível (SBAD).

Pode aplicar-se, neste quadro, o método Dual-Simplex para progredir no cálculo da solução óptima.

Estudo da mudança de base:

- Variável que sai da base: F_1 (é a VB com valor mais negativo). A equação “pivot” é a linha desta VB.
- Variável que entra para a base: x_1 porque é a única que tem coeficiente negativo na equação “pivot”; a “ratio” óptima é $^7/_5$.

Nova solução:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
x_1	1	0	$^{-3}/_5$	$^{-1}/_5$	0	0	$^7/_5$
F_2	0	-2	5	0	1	0	-4
F_3	0	-3	$^3/_5$	$^1/_5$	0	1	$^8/_5$
f(X)	0	-5	$^{-26}/_5$	$^{-7}/_5$	0	0	$^{49}/_5$

Aplicando o Dual-Simplex sai da base a variável F_2 e entra para a base a variável x_2.

Nova solução:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM	
x_2	0	1	$^{-5}/_{2}$	0	$^{-1}/_{2}$	0	2	
x_1	1	0	$^{-3}/_{5}$	$^{-1}/_{5}$	0	0	$^{7}/_{5}$	
F_3	0	0	$^{-69}/_{10}$	$^{1}/_{5}$	$^{-3}/_{2}$	1	$^{38}/_{5}$	
f(X)	0	0	$^{-177}/_{10}$	$^{-7}/_{5}$	$^{-5}/_{2}$	0	$^{99}/_{5}$	Óptimo

Solução óptima do problema Primal: $X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{38}{5} \end{bmatrix}; Min\ f(X^*) = \frac{99}{5}$

Solução óptima do problema Dual: $Y^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{177}{10} \end{bmatrix}; Max\ g(y^*) = \frac{99}{5}$

Notar que as 1ª e 2ª restrições do modelo foram alteradas para gerar uma SBNAP associada a uma SBAD e assim poder aplicar o método Dual-Simplex.

No quadro óptimo obtido, para efectuar correctamente a leitura da solução Dual, é preciso considerar as restrições lógicas deste problema <u>associadas ao modelo Primal não modificado</u>. O modelo Dual é:

Min f(X) = $7x_1 + 5x_2 + x_3$

s.a.

$$\begin{array}{rrrcl l}
5x_1 & & -\ 3x_3 & \geq & 7 & \text{Variável dual associada é } y_1 \geq 0 \\
 & 2x_2 & -\ 5x_3 & \geq & 4 & \text{Variável dual associada é } y_2 \geq 0 \\
x_1 & -\ 3x_2 & & \leq & 3 & \text{Variável dual associada é } y_3 \leq 0 \\
 & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

O valor das variáveis duais tem pois que ser feito à luz destas conclusões ou seja lê-se no quadro Primal:

$y_1 = {}^{7}/_{5}$ e não ${}^{-7}/_{5}$; $y_2 = {}^{5}/_{2}$ e não ${}^{-5}/_{2}$; $y_3 = 0$

Notar ainda que o valor de variáveis auxiliares é sempre não negativo pelo que se lê:

$y_4 = y_5 = 0$; $y_6 = {}^{177}/_{10}$ e não ${}^{-177}/_{10}$

Deixa-se ao leitor o cuidado de conferir estes valores nas equações da forma-padrão do problema Dual.

8. EXEMPLO DE APLICAÇÃO (Problema Dual com Solução Indeterminada)

No capítulo VII foi apresentado o exemplo seguinte:

$$\begin{aligned}
&Max\ \ f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3\\
&s.a.\\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4\\
&\qquad 2x_2 + x_3 \le 4\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

com o seguinte quadro óptimo:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	Termo Independente
x_2	1	1	$^1/_2$	$^1/_2$	0	2
F_2	-2	0	0	-1	1	0
f(X)	1	0	0	1	0	4

A solução básica do Primal é degenerada.

Na base corrente é possível trocar a variável F_2 pela variável x_1 recorrendo ao método Dual-Simplex.

A solução do problema Primal não se altera com a mudança da base porque é uma solução degenerada mas o mesmo não sucede com a solução do problema Dual dado que à mudança de base referida está associada uma "ratio" absoluta não nula ($^1/_2$). Este valor será o novo coeficiente da variável F_2 e portando o novo valor de uma das variáveis do problema Dual.

Em suma, o problema Dual tem solução óptima indeterminada sendo pois necessário obter outra solução sabendo que sai da base a variável F_2 (equação "pivot" é a linha desta VB) e entra para a base a variável x_1 ("ratio" diferente de zero...).

O quadro da nova solução é:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	Termo Independente	Obs.
x_1	1	0	0	$^1/_2$	$^{-1}/_2$	0	
x_2	0	1	$^1/_2$	0	$^1/_2$	2	
f(X)	0	0	0	$^1/_2$	$^1/_2$	4	Novo óptimo Dual

Obtiveram-se duas soluções óptimas para o problema Dual:

$$Y_1^* = \begin{bmatrix} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 0 \\ y_5 = 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad Y_2^* = \begin{bmatrix} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = \frac{1}{2} \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_5 = 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad g(Y_1^*) = g(Y_2^*) = 4 = Min\ g(Y^*)$$

A expressão geral das soluções óptimas do problema Dual é então:

$$\text{Min g}(Y^*) = 4 = \lambda_1 Y_1^* + \lambda_2 Y_2^* \text{ com } \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_1, \lambda_2 \ge 0$$

9. MÉTODO DA RESTRIÇÃO ARTIFICIAL

O método do Dual-Simplex é aplicável quando se dispõe de uma solução não admissível do problema Primal (SBNAP) e de uma solução admissível para o problema Dual (SBAD).

Há contudo situações de Pós-optimização em que pode ocorrer simultaneamente a não admissibilidade das soluções dos dois problemas (SBNAP e SBNAD) o que impede a aplicação do método Dual-Simplex como se conclui no exemplo seguinte:

$$\text{Max } f(X) = -7x_1 + 5x_2 + x_3$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcrcr|l}
 & & -2x_2 & - & 3x_3 & \leq & -4 & \text{Variável dual associada é } y_1 \geq 0 \\
-2x_1 & & & - & 3x_3 & \leq & -7 & \text{Variável dual associada é } y_2 \geq 0 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 10 & \text{Variável dual associada é } y_3 \geq 0 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Quadro Inicial:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM	
F_1	0	-2	-3	1	0	0	-4	
F_2	-2	0	-3	0	1	0	-7	SBNAP
F_3	1	3	1	0	0	1	3	SBNAD
f(X)	7	-5	-1	0	0	0	0	

A solução do Primal não é admissível (F_1 e F_2 têm valor negativo).

A solução não satisfaz o critério de paragem pelo que a solução do problema Dual não é admissível (a solução do Dual é $y_1 = y_2 = y_3 = 0$; $y_4 = 7$; $y_5 = -5$; $y_6 = -1$; os valores de y_5 e y_6 violam as restrições lógicas).

Vejamos como actuar para gerar uma solução admissível para o problema Dual e assim tornar possível a aplicação do método Dual-Simplex:

- Identificar as variáveis do problema Primal cujos coeficientes, na equação de f(X), têm valor não admissível para as variáveis Duais. No exemplo corrente são as variáveis x_2 e x_3 (são ambas seleccionáveis para a base, na maximização…)
- Considerar a soma das variáveis identificadas com limite superior ilimitado ("big M") e aumentar o problema original com esta restrição artificial:

  $x_2 + x_3 \leq M$ (não altera o espaço de soluções porque é redundante)

A restrição artificial, na forma padrão, é $x_2 + x_3 + x_0 = M$ sendo $x_0 \geq 0$ a variável de folga. Esta equação é inserida no quadro inicial onde também é aberta uma coluna para a variável x_0 que é VB da solução inicial.

Quadro inicial aumentado com a restrição artificial:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	x_0	VSM
F_1	0	-2	-3	1	0	0	0	-4
F_2	-2	0	-3	0	1	0	0	-7
F_3	1	3	1	0	0	1	0	10
x_0	0	1	1	0	0	0	1	M
f(X)	7	-5	-1	0	0	0	0	0

A primeira mudança de base é sempre efectuada entre variáveis da restrição artificial (x_2 , x_3 e x_0) e de acordo com as seguintes regras:

- sai sempre da base a variável de folga da restrição artificial (x_0)
- entra sempre para a base a variável da restrição artificial que tem, na equação de f(X), o coeficiente "mais inadmissível" para valor de uma variável Dual. Neste caso entra para a base a variável x_2 (coeficiente "-5")

Desta mudança de base **resultará sempre uma solução admissível para o problema Dual** (SBAD) onde se poderá aplicar o método do Dual-Simplex.

Vejamos então a 1ª mudança de base:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	x_0	VSM	Obs.
F_1	0	-2	-3	1	0	0	0	-4	Obrigatório:
F_2	-2	0	-3	0	1	0	0	-7	Sai x_0
F_3	1	3	1	0	0	1	0	10	Entra x_2
x_0	0	1	1	0	0	0	1	M	
f(X)	7	-5	-1	0	0	0	0	0	
x_2	0	1	1	0	0	0	1	M	SBNAP
F_1	0	0	-1	1	0	0	2	- 4+ 2M	SBAD
F_2	-2	0	-3	0	1	0	0	-7	
F_3	1	0	-2	0	0	1	-3	10 - 3M	
f(X)	7	0	4	0	0	0	5	5M	

A solução obtida não é admissível para o problema Primal (SBNAP) porque F_2 e F_3 têm valor negativo mas, porque satisfaz a regra de paragem, a solução do problema Dual é admissível (SBAD) podendo agora aplicar-se o método Dual-Simplex.

Os quadros seguintes resultam da aplicação do método Dual-Simplex:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	x_0	VSM	Obs.
x_2	0	1	1	0	0	0	1	M	SBNAP; SBAD
F_1	0	0	-1	1	0	0	2	- 4 + 2M	
F_2	-2	0	-3	0	1	0	0	-7	Sai F_3
F_3	1	0	-2	0	0	1	-3	10 - 3M	Entra x_0
f(X)	7	0	4	0	0	0	5	5M	
x_0	$^{-1}/_3$	0	$^2/_3$	0	0	$^{-1}/_3$	1	$^{-10}/_3$ + M	
x_2	$^1/_3$	1	$^1/_3$	0	0	$^1/_3$	0	$^{10}/_3$	SBNAP; SBAD
F_1	$^2/_3$	0	$^{-7}/_3$	1	0	$^2/_3$	0	$^8/_3$	Sai F_2
F_2	-2	0	-3	0	1	0	0	-7	Entra x_3
f(X)	$^{26}/_3$	0	$^2/_3$	0	0	$^5/_3$	0	$^{50}/_3$	

Notar que a variável de folga da restrição artificial (x_0) entrou para a base o que conduziu a valores finitos das restantes variáveis da restrição artificial ($x_1 = 0$; $x_2 = {}^{10}/_3$).

O elevado valor de $x_0 = M - {}^{10}/_3$ torna-a definitivamente variável básica pelo que as suas linha e coluna do quadro Simplex podem ser eliminadas:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	x_0	VSM	Obs.
x_3	$^2/3$	0	1	0	$^{-1}/_3$	0		$^7/_3$	SBAP
x_2	$^1/_9$	1	0	0	$^1/_9$	$^1/_3$		$^{23}/_9$	SBAD
F_2	$^{20}/_9$	0	0	1	$^{-7}/_9$	$^2/_3$		$^{73}/_9$	
f(X)	$^{74}/_9$	0	0	0	$^2/_9$	$^5/_3$		$^{136}/_9$	Óptimo

Solução óptima do problema Primal: $X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{23}{9} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \\ \frac{73}{9} \\ 0 \end{bmatrix}$; $Max\ f(X^*) = \frac{136}{9}$

Solução óptima do problema Dual: $Y^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{9} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{74}{9} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $Min\ g(y^*) = \frac{136}{9}$

10. EXEMPLO DE APLICAÇÃO (Restrição Artificial em problema de Minimização)

Considere-se o modelo de PL:

Min $f(X) = 7x_1 + 5x_2 - x_3$

s.a.

$-5x_1 + 3x_3 \le -7$	Variável dual associada é $y_1 \le 0$
$-2x_2 + 5x_3 \le -4$	Variável dual associada é $y_2 \le 0$
$x_1 - 3x_2 \le 3$	Variável dual associada é $y_3 \le 0$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$	

Quadro Inicial:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM	Obs.
F_1	-5	0	3	1	0	0	-7	SBNAP;
F_2	0	-2	5	0	1	0	-4	$F_1, F_2 < 0$
F_3	1	-3	0	0	0	1	3	SBNAD
f(X)	-7	-5	1	0	0	0	0	$y_6 = -1$
	$-y_4$	$-y_5$	$-y_6$	y_1	y_2	y_3		

SBNAP : solução do Primal não é admissível (F_1 e F_2 têm valor negativo).

SBNAD : solução do Dual não é admissível pois a variável auxiliar dual $y_6 = -1$ viola a restrição lógica $y_6 \ge 0$.

A leitura desta variável é feita na coluna de x_3 ... pelo que a restrição artificial a considerar, para obter uma SBAD, é:

$$x_3 \le M$$

que na forma-padrão é $x_3 + x_0 = M$ com $x_0 \ge 0$.

Quadro Inicial aumentado com a restrição artificial:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	x_0	VSM	Obs.
F_1	-5	0	3	1	0	0	0	-7	SBNAP; SBNAD
F_2	0	-2	5	0	1	0	0	-4	Entra x_3
F_3	1	-3	0	0	0	1	0	3	Sai x_0
x_0	0	0	1	0	0	0	1	M	Quadro seguinte
f(X)	-7	-5	1	0	0	0	0	0	com SBAD

Procede-se agora à primeira mudança de base entre variáveis da restrição artificial:

- Sai da base : x_0 (variável de folga da restrição artificial)
- Entra para a base : x_3 (é, neste caso, a única VB da restrição artificial)

Desta mudança de base resulta o quadro seguinte onde a solução Dual já é admissível (SBAD):

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	x_0	VSM	Obs.
x_3	0	0	1	0	0	0	1	M	SBNAP; SBAD
F_1	-5	0	0	1	0	0	-3	-7 - 3M	Aplicar Dual-Simplex
F_2	0	-2	0	0	1	0	-5	-4 - 5M	Sai F_2
F_3	1	-3	0	0	0	1	0	3	Entra x_0
f(X)	-7	-5	0	0	0	0	-1	-M	

Os quadros seguintes resultam da aplicação do método Dual-Simplex:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	x_0	VSM	Obs.
x_0	0	$^{2}/_{5}$	0	0	$^{-1}/_{5}$	0	1	$^{4}/_{5}$ + M	SBNAP; SBAD
F_1	-5	$^{6}/_{5}$	0	1	$^{-3}/_{5}$	0	0	$^{-23}/_{5}$	Sai F_1
F_3	1	-3	0	0	0	1	0	3	Entra F_2
x_3	0	$^{-2}/_{5}$	1	0	$^{1}/_{5}$	0	0	$^{-4}/_{5}$	(x_0 é VB ; linha e coluna podem eliminar-se)
f(X)	-7	$^{-23}/_{5}$	0	0	$^{-1}/_{5}$	0	0	$^{4}/_{5}$	
F_2	$^{25}/_{3}$	-2	0	$^{-5}/_{3}$	1	0		$^{23}/_{3}$	SBNAP; SBAD
F_3	1	-3	0	0	0	1		3	Sai x_3
x_3	$^{-5}/_{3}$	0	1	$^{1}/_{3}$	0	0		$^{-7}/_{3}$	Entra x_1
f(X)	$^{-16}/_{3}$	-5	0	$^{-1}/_{3}$	0	0		$^{7}/_{3}$	
x_1	1	0	$^{-3}/_{5}$	$^{-1}/_{5}$	0	0		$^{7}/_{5}$	SBNAP; SBAD
F_2	0	-2	5	0	1	0		-4	Sai F_2
F_3	0	-3	$^{3}/_{5}$	$^{1}/_{5}$	0	1		$^{8}/_{5}$	Entra x_2
f(X)	0	-5	$^{-16}/_{5}$	$^{-7}/_{5}$	0	0		$^{49}/_{5}$	
x_2	0	1	$^{-5}/_{2}$	0	$^{-1}/_{2}$	0		2	
x_1	1	0	$^{-3}/_{5}$	$^{-1}/_{5}$	0	0		$^{7}/_{5}$	
F_3	0	0	$^{-69}/_{10}$	$^{1}/_{5}$	$^{-3}/_{2}$	1		$^{38}/_{5}$	
f(X)	0	0	$^{-157}/_{10}$	$^{-7}/_{5}$	$^{-5}/_{2}$	0		$^{99}/_{5}$	Óptimo
	$-y_4$	$-y_5$	$-y_6$	y_1	y_2	y_3			

Soluções óptimas:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{38}{5} \end{bmatrix} ;\ Min\ f(X^*) = \tfrac{99}{5} \qquad Y^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{5} \\ \frac{-5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{157}{10} \end{bmatrix} ;\ Max\ g(y^*) = \tfrac{99}{5}$$

11. EXEMPLO DE APLICAÇÃO (Restrição Artificial em problema com solução Ilimitada)

Considere-se o modelo:

Min f (X) = $-7x_1 + 5x_2 + x_3$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -5x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & -7 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & -4 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 3 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Quadro Inicial da Minimização:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
F_1	-5	0	3	1	0	0	-7
F_2	0	-2	5	0	1	0	-4
F_3	1	-3	0	0	0	1	3
f(X)	7	-5	-1	0	0	0	0

SBNAP : solução do Primal não é admissível (F_1 e F_2 têm valor negativo).

SBNAD : solução do Dual não é admissível pois a variável auxiliar dual y_4 = -7 viola a restrição lógica $y_4 \geq 0$. A leitura desta variável é feita na coluna de x_1 pelo que a restrição artificial para obter uma SBAD, é :

$x_1 \leq M$; na forma-padrão é $x_1 + x_0 = M$ com $x_0 \geq 0$ como variável de folga.

Aumento do quadro inicial com a restrição artificial e 1ª mudança de base (troca de x_0 por x_1):

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	x_0	VSM	Obs.
F_1	-5	0	3	1	0	0	0	-7	Obter SBAD
F_2	0	-2	5	0	1	0	0	-4	Sai x_0
F_3	1	-3	0	0	0	1	0	3	Entra x_1
x_0	1	0	0	0	0	0	1	M	
f(X)	7	-5	-1	0	0	0	0	0	
x_1	1	0	0	0	0	0	1	M	SBNAP; SBAD
F_1	0	0	3	1	0	0	5	-7 + 5M	Dual-Simplex
F_2	0	-2	5	0	1	0	0	-4	Sai F_3
F_3	0	-3	0	0	0	1	-1	3 - M	Entra x_2
f(X)	0	-5	-1	0	0	0	-7	-7M	
x_2	0	1	0	0	0	$-1/3$	$1/3$	$-1 + M/3$	SBAP; SBAD
x_1	1	0	0	0	0	0	1	M	Óptimo
F_2	0	0	3	1	0	0	0	-7 + 5M	
F_3	0	0	5	0	1	$-2/3$	$2/3$	$-6 + 2M/3$	
f(X)	0	0	-1	0	0	$-5/3$	$-16/3$	$-5 - 16M/3$	

O problema aumentado tem solução óptima admissível mas as VB têm valor em função de "big M" pelo que se conclui que o problema original tem solução ilimitada.

De facto, $f(X) = -7x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 - {}^{16M}/_3 \rightarrow -\infty$ (sem limite inferior)

Esta situação ocorre porque $x_0 = 0$ (é VNB no óptimo).

Na equação artificial $x_1 + x_0 = M$ tem-se $x_1 = M$ (sem limite superior).

Na função objectivo a parcela "$-7x_1$ " não permite que f(X) tenha valor finito.

TÉCNICA DA RESTRIÇÃO ARTIFICIAL

O aumento do problema com uma restrição artificial pode conduzir às situações seguintes:

1ª: Problema aumentado tem solução óptima admissível:

- Variável de folga da restrição artificial (x_0) é VB

  Solução óptima do problema aumentado é solução óptima do problema original (só x_0 tem valor ilimitado)

- Variável de folga da restrição artificial (x_0) é VNB

  O problema original, em regra, não tem solução óptima finita (uma ou mais das variáveis da restrição artificial se forem VB têm valor ilimitado…)

2ª: Problema aumentado não tem soluções admissíveis:

O problema original também as não tem.

12. AUTO TESTE

a. A solução óptima do problema Primal a seguir apresentado é única (ver quadro óptimo)

$$\text{Max } f(X) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	1	1	1	0	2
F_2	1	2	0	1	4
f (X)	-3	-4	0	0	0
x_2	1	1	1	0	2
F_2	-1	0	-2	1	0
f (X)	1	0	4	0	8

Verifique se a solução óptima do Dual é única ou indeterminada.

Se concluir que a solução é indeterminada, apresente a expressão geral das soluções óptimas do problema Dual.

13. SOLUÇÃO DO AUTO TESTE

a. A solução óptima do problema Dual é Indeterminada dado que:

- a solução óptima do problema Primal é degenerada (variável básica $F_2 = 0$)
- na equação onde F_2 é VB, há variáveis com coeficiente negativo e é possível estabelecer uma "ratio" (Dual Simplex) diferente de zero. Nestas condições, aplicando o Dual-Simplex, é possível mudar de base e obter outra solução óptima para o problema Dual:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	
F_1	1	1	1	0	2	
F_2	1	2	0	1	4	
f (X)	-3	-4	0	0	0	
x_2	1	1	1	0	2	Óptimo
F_2	-1	0	-2	1	0	Sai F_2
f (X)	1	0	4	0	8	Entra x_1
x_1	1	0	2	-1	0	
x_2	0	1	-1	1	2	
f (X)	0	0	2	1	8	Novo Óptimo
	y_3	y_4	y_1	y_2		

Solução óptima única do problema Primal: $X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; Max\ f(X^*) = 8$

Soluções óptimas do problema Dual:

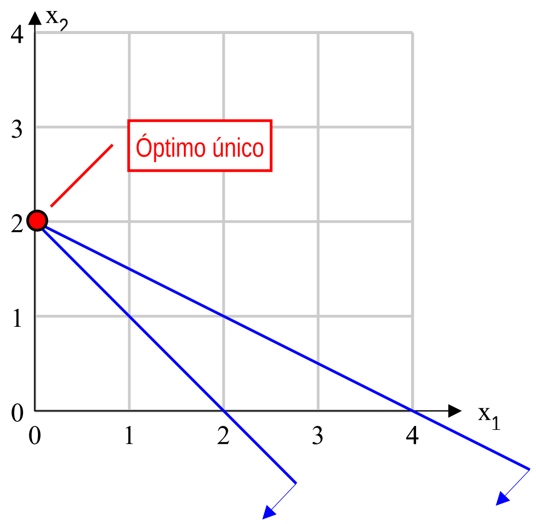
$$Y_1^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; Min\ g(Y_1^*) = 8 \qquad Y_2^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; Min\ g(Y_2^*) = 8$$

Expressão geral das soluções óptimas do problema Dual:

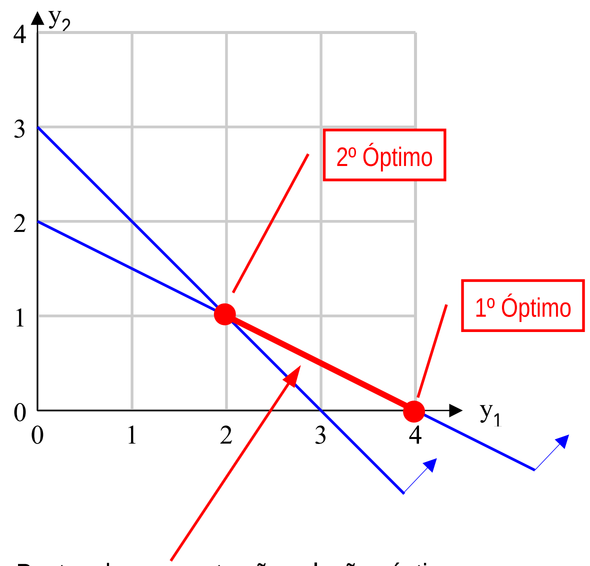
$$\begin{aligned} & Min\ g(Y^*) = 8 \\ & s.a. \\ & Y^* = \alpha_1 Y_1^* + \alpha_2 Y_2^* \\ & \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ & \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Observe a geometria dos dois modelos nas figuras seguintes.

Problema Primal



Problema Dual



Pontos do segmento são soluções óptimas.
Expressão geral das soluções óptimas:

$$Y^* = \alpha_1 Y_1^* + \alpha_2 Y_2^*$$
$$com:$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$
$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$