VII. Dualidade e Interpretação Económica

1. Modelo Dual

Uma empresa produz mensalmente dois bens "A" e "B" nas seguintes condições:

Recursos críticos disponíveis:	Madeira	300 metros
	Horas de trabalho	110 horas

		Madeira (metros)	Horas de Trabalho (h)
Consumos unitários previstos:	Produto A	30	5
	Produto B	20	10

	Produto A	Produto B
Lucro unitário da venda (€)	6	8

O Modelo Matemático para optimizar a produção é:

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{sujeito a: } \begin{array}{rcrcl} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

em que x_1 e x_2 representam o nível de produção de "A" e "B" respectivamente.

Aplicando o método Simplex obtém-se a solução óptima:

$$x_1^* = 4 \,;\, x_2^* = 9 \,;\, F_1^* = 0 \,;\, F_2^* = 0 \,;\, Max\ f(X^*) = 96€$$

ou seja, o plano óptimo de produção é de 4 unidades de "A" e 9 unidades de "B" do que resulta o <u>lucro máximo de 96€</u>. Os recursos disponíveis são integralmente utilizados (variáveis de folga nulas).

Assim sendo pode afirmar-se que:

Os recursos utilizados (300 metros de madeira e 110 horas de trabalho) <u>contribuem para o lucro</u> com 96 € (sem eles não haveria produção para venda...)

mas...

Qual é o contributo para o lucro de cada um dos 300 metros de madeira e de cada uma das 110 horas de trabalho?

Considerando que estes contributos são:

- y_1 euros por metro de madeira
- y_2 euros por hora de trabalho

então $300y_1 + 110y_2 = 96€$.

Dado que a produção de uma unidade de "A" consome 30 metros de madeira e 5 horas de trabalho, estes recursos valem "em lucro" $30y_1 + 5y_2$ euros.

Se uma unidade de "A" é vendida com o lucro de 6€ então os recursos incorporados contribuem para o lucro com, pelo menos, 6€ ou seja, $30y_1 + 5y_2 \geq 6$.

De modo idêntico, se a produção de uma unidade de "B" consome 20m de madeira e 10 horas de trabalho o contributo destes recursos para o lucro total é de $20y_1 + 10y_2$ valor que não deverá ser inferior ao lucro da venda de uma unidade de "B" que é de 8€ ou seja, $20y_1 + 10y_2 \geq 8$.

Qual o critério (função objectivo) a utilizar para optimizar os valores das variáveis y_1 e y_2 ?

Se os custos de aquisição de 1 metro de madeira e de 1 hora de trabalho forem, por exemplo, "k_1 euros" e "k_2 euros", respectivamente, a área financeira da empresa "deverá imputar à produção" o custo de $(k_1 + y_1)$ euros por metro de madeira e $(k_2 + y_2)$ euros por hora de trabalho. Deste modo a área da produção é "obrigada" a optimizar a transformação dos recursos recebidos (madeira e horas) para que, da venda dos bens produzidos, resulte uma receita que cubra os custos de aquisição $(300k_1 + 110k_2)$ acrescida do contributo para o lucro, $300y_1 + 110\,y_2$.

Notando que $(300k_1 + 110k_2)$ é constante a optimização do custo total (a imputar à produção) obriga a Minimizar uma função de "custos internos" $g(y_1,y_2) = 300y_1 + 110y_2$.

Assim sendo, a área financeira da empresa optimizará os contributos para o lucro, dos recursos utilizados na produção, recorrendo ao modelo matemático:

$$\text{Min } g(Y) = 300y_1 + 110y_2$$

$$\begin{array}{lccccc}
\text{sujeito a:} & 30y_1 & + & 5y_2 & \geq & 6 \\
 & 20y_1 & + & 10y_2 & \geq & 8 \\
 & & & y_1\,,\,y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

que é o modelo Dual do modelo para optimizar a produção (modelo Primal):

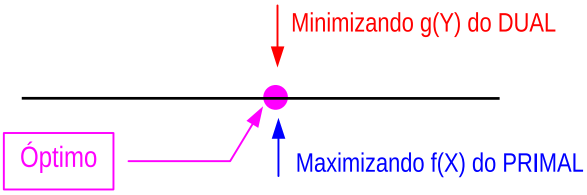
$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{array}{lccccc}
\text{sujeito a:} & 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\
 & 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\
 & & & x_1\,,\,x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Analisando os 2 modelos e tendo em atenção que se estão a considerar critérios de MAXIMIZAÇÃO no Primal e MINIMIZAÇÃO no Dual verifica-se que:

- A cada variável de Decisão do problema Primal está associada uma restrição Técnica do problema Dual. Em particular, a "n" variáveis de decisão não negativas, do Primal, estão associadas "n" restrições técnicas do Dual do tipo "≥";

- A cada restrição Técnica do problema Primal está associada uma Variável de Decisão do problema Dual. Em particular, a "m" restrições do Primal do tipo "$\leq$" estão associadas "m" variáveis não negativas do Dual;
- Na função objectivo do Dual, os coeficientes das variáveis de decisão são os segundos membros das restrições técnicas do problema Primal a que as variáveis duais estão associadas;
- Os segundos membros das restrições técnicas do problema Dual são os coeficientes das variáveis de decisão, na função objectivo do Primal, associadas àquelas restrições;
- O Primal Maximiza e o Dual Minimiza pelo que se pode antecipar que gerando sucessivamente soluções para os problemas Primal e Dual se procede ao "cerco" da solução óptima de ambos (caso exista);



- Naturalmente, o dual do problema Dual é o problema Primal.

Matricialmente, os dois problemas apresentados têm a forma geral:

Problema Primal	Problema Dual
$AX \leq B$	$A^TY \geq C^T$
$X \geq 0$	$Y \geq 0$
$\text{Max } f(X) = CX$	$\text{Min } g(Y) = B^TY$

2. Formalização do modelo DUAL

- As restrições do tipo " $\leq$ " são as mais frequentes nos modelos em que se Maximiza a função objectivo. Diremos que as restrições <u>típicas</u>, em ambiente de Maximização, são do tipo " $\leq$ ";
- As restrições do tipo " $\geq$ " são as mais frequentes nos modelos em que se Minimiza a função objectivo. Diremos que as restrições <u>típicas</u>, em ambiente de Minimização são do tipo " $\geq$ ";
- Nos modelos lineares as variáveis não negativas são as mais frequentes. Diremos que as variáveis de decisão não negativas (≥ 0) são <u>típicas</u>.
- Se a restrição técnica do Primal é típica associa-se, no Dual, uma variável de decisão típica
- Se a variável de decisão do Primal é típica associa-se, no Dual, uma restrição técnica típica.

Veja-se agora, passo a passo, a formalização do modelo Dual do seguinte problema Primal:

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{sujeito a: } \begin{array}{rcrcr} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1 , x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

1º Analisar o modelo Primal e "fixar" a estrutura do modelo Dual

Problema Primal →	Problema Dual
Max f(X)	Min g(Y)
1ª restrição do Primal é típica ("≤" em Max)	Variável dual y_1 é típica ($y_1 \geq 0$)
2ª restrição do Primal é típica ("≤" em Max)	Variável dual y_2 é típica ($y_2 \geq 0$)
Variável $x_1 \geq 0$ é típica	1ª restrição é do tipo "≥" (típica em Min)
Variável $x_2 \geq 0$ é típica	2ª restrição é do tipo "≥" (típica em Min)

2º Associar a cada uma das restrições técnicas do Primal, uma variável de decisão do Dual

Problema Primal						
Max f(X) =	$6x_1$	+	$8x_2$			
s.a.	$30x_1$	+	$20x_2$	$\leq$	300	y_1
	$5x_1$	+	$10x_2$	$\leq$	110	y_2
	x_1			$\geq$	0	
			x_2	$\geq$	0	

3º Escrever a primeira restrição técnica do dual associada à variável x_1 do Primal

Associar a y_1 e y_2 os coeficientes técnicos "30" e "5" obtendo " $30y_1 + 5y_2$" (1º membro da restrição).

Ler em f(X) o coeficiente "6" para o segundo membro da restrição.

Sabendo que a restrição é do tipo "≥" temos:

$$30y_1 + 5y_2 \geq 6$$

4º Escrever a segunda restrição técnica do dual associada à variável x_2 do Primal

Associar a y_1 e y_2 os coeficientes técnicos "20" e "10" obtendo " $20y_1 + 10y_2$" (1º membro da restrição).

Ler em f(X) o coeficiente "8" para o segundo membro da restrição.

Sabendo que a restrição é do tipo "≥" temos

$$20y_1 + 10y_2 \geq 8$$

5º Escrever a função objectivo do Dual (já sabemos que é para Minimizar)

Associar a y_1 e y_2 os segundos membros das restrições técnicas "300" e "110" obtendo

$$\text{Min } g(Y) = 300y_1 + 110y_2$$

3. Caso particular da Restrição Primal do tipo " = "

Admita-se Max f(X) = $25x_1 + 30x_2$ e a restrição Primal : $4x_1 + 2x_2 = 10$ com $x_1, x_2 \geq 0$ (típicas).

A igualdade pode ser substituída pelo par de desigualdades:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 10 \end{cases}$$

Colocando ambas na forma "≤ " (típica em Max) fica:

$4x_1 + 2x_2 \leq 10$	Var. Dual associada $y_1' \geq 0$ (típica)
$-4x_1 - 2x_2 \leq -10$	Var. Dual associada $y_1'' \geq 0$ (típica)

O modelo Dual Minimiza, pelo que a restrição Dual associada a x_1 é:

$$4y_1' - 4y_1'' \geq 25 \iff 4(y_1' - y_1'') \geq 25$$

onde se reconhece que $(y_1' - y_1'')$ pode ser substituído pela variável y_1 *sem restrição de sinal* (variável livre).

Pode assim concluir-se que a uma restrição de igualdade do Primal associa-se, no Dual, uma variável livre.

4. Caso particular da Restrição Primal do tipo "≥" em Maximização

Admita-se Max f(X) = $3x_1 + 4x_2$ e a restrição Primal : $6x_1 + 8x_2 \geq 14$ com $x_1, x_2 \geq 0$ (típicas).

Colocando a restrição na forma "≤ " (típica de Maximização) fica:

$-6x_1 - 8x_2 \leq -14$	Variável Dual associada $k_1 \geq 0$ (típica)

O modelo Dual Minimiza, pelo que as restrições Duais associadas a x_1 e x_2 (típicas) são:

- $-6k_1 \geq 3$
- $-8k_1 \geq 4$

e a função Dual é Min g(K) = $-14k_1$

Considerando a variável $y_1 = -k_1$ então teremos $y_1 \leq 0$ (não positiva) e as expressões anteriores ficam:

- $6y_1 \geq 3$
- $8y_1 \geq 4$
- Min g(Y) = $14y_1$

Pode assim concluir-se que, em ambiente de Maximização, a uma restrição Primal do tipo " ≥ " (não típica) corresponde uma variável Dual não positiva (≤ 0) que é não típica.

De modo geral, à restrição técnica não típica de um dos problemas é associada uma variável não típica no outro dos problemas.

5. Caso particular de Variável do Primal do tipo " ≤ 0 " (variável não positiva)

Atendendo ao exposto na alínea anterior e sabendo que o Dual do Dual é o Primal, fácil é concluir que em ambiente de **Maximização do Primal**, se a variável do Primal é não positiva (não típica) a restrição Dual associada é do tipo " $\leq$ " (restrição não típica no ambiente de Minimização do Dual)

6. Quadro-Resumo

	PRIMAL (Max)	DUAL (Min)	
Restrição	" ≤" (típica) " = " " ≥ " (não típica)	≥ 0 (típica) Livre ≤ 0 (não típica)	Variável
Variável	≥ 0 (típica) Livre ≤ 0 (não típica)	" ≥" (típica) " = " " ≤" (não típica)	Restrição
	DUAL (Max)	PRIMAL (Min)	

7. Propriedades Fundamentais da Dualidade

A apresentação das relações Primal-Dual é feita pressupondo que o modelo Primal tem as seguintes características:

$\Rightarrow$ Maximização da função-objectivo (Max f(X)

$\Rightarrow$ Restrições técnicas do tipo " $\leq$ " (típicas)

$\Rightarrow$ Variáveis de Decisão Não Negativas (típicas) ($x_j \geq 0$)

a. PRIMEIRA PROPRIEDADE

Se X e Y são respectivamente soluções admissíveis dos problemas Primal e Dual, o valor da função objectivo Dual é majorante do valor da função objectivo do Primal ($g(Y) \geq f(X)$).

Se f(X) = g(Y) então as soluções associadas são necessariamente óptimas.

Demonstração

Sendo $Min\ g(Y) = Y^T B\ com\ B = [A \quad I]\begin{bmatrix} X_a \\ X_i \end{bmatrix}$

em que :

- " B " é o vector-coluna dos segundos membros das restrições técnicas do Primal
- "A" é a matriz tecnológica do Primal
- " I " é a matriz identidade associada às variáveis de folga do Primal
- " X_a " e " X_i " são respectivamente vectores-coluna das variáveis de decisão e de folga do Primal

A função dual g(Y) pode então escrever-se:

$$g(Y) = Y^T [A \quad I] \begin{bmatrix} X_a \\ X_i \end{bmatrix} = [Y_a^T A \quad Y_i^T I] \begin{bmatrix} X_a \\ X_i \end{bmatrix}$$

em que Y_a e Y_i são, respectivamente, vectores-coluna das variáveis de decisão e auxiliares do Dual.

A função Primal $f(X) = C_a X_a + C_i X_i$ é na forma matricial $= \begin{bmatrix} C_a & C_i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_a \\ X_i \end{bmatrix}$

- "C_a" é a matriz-linha de coeficientes das variáveis decisionais na função-objectivo
- "C_i" é a matriz-linha de coeficientes das variáveis de folga na função-objectivo (matriz nula)
- "X_a" e "X_i" são respectivamente vectores-coluna das variáveis de decisão e de folga.

As restrições técnicas do modelo Dual são:

$$Y^T A \geq C_a^T \quad \text{e} \quad Y_i^T \geq C_i^T$$

então

$$g(Y) = [Y_a^T A \quad Y_i^T I] \begin{bmatrix} X_a \\ X_i \end{bmatrix} \geq [C_a \quad C_i] \begin{bmatrix} X_a \\ X_i \end{bmatrix}$$

ou seja $g(Y) \geq f(X)$ como se pretendia demonstrar.

O exemplo seguinte ajuda a visualizar a propriedade exposta:

Primal	Dual
Max $f(X) = 5x_1 + 3x_2$	Min $g(Y) = 15y_1 + 10y_2$
s.a. $3x_1 + 5x_2 \leq 15$	s.a. $3y_1 + 5y_2 \geq 5$
$5x_1 + 2x_2 \leq 10$	$5y_1 + 2y_2 \geq 3$
$x_1 , x_2 \geq 0$	$y_1 , y_2 \geq 0$

As quatro soluções *básicas admissíveis* do problema Primal (extremos do convexo de soluções) são:

	x_1	x_2	F_1	F_2	Valor da função f(X)
(1)	0	0	15	10	0
(2)	0	3	0	4	9
(3)	2	0	9	0	10
(4)	20/19	45/19	0	0	235/19 * (Max)

e as três soluções *básicas admissíveis* do problema Dual (extremos do convexo de soluções) são:

y_1	y_2	y_3	y_4	Valor da função g(Y)
5/3	0	0	16/3	25
0	3/2	5/2	0	15
5/19	16/19	0	0	235/19 * (Min)

o que permite concluir que $g(Y) \geq f(X)$.

b. SEGUNDA PROPRIEDADE

Se o problema Primal tem solução óptima finita, o valor óptimo das Variáveis de Decisão do Dual é:

$$Y^T = C_m A_m^{-1}$$

Recordando a versão matricial do Simplex conclui-se que, na equação da função f(X) no quadro Simplex do Primal, os coeficientes das variáveis de folga e artificiais são os valores das Variáveis de Decisão do Dual (associadas às restrições técnicas a que pertencem aquelas variáveis).

Demonstração

O valor de f(X) para qualquer solução básica do problema Primal é:

$$f(X) = C_m A_m^{-1} B$$

O valor de g(Y) para qualquer solução básica do problema Dual é:

$$g(Y) = Y^T B$$

Atendendo à primeira propriedade, no óptimo verifica-se f(X) = g(Y) pelo que:

$$Y^T B = C_m A_m^{-1} B \quad \text{donde,}$$

$$Y^T = C_m A_m^{-1} \quad \text{q.e.d.}$$

O exemplo seguinte ajuda a visualizar a 2ª propriedade.

Considere-se o problema Primal:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$

$$\text{sujeito a:} \quad \begin{array}{rcrcr} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

A base óptima é constituída pelos vectores P_1 e P_2 pelo que:

$$A_m = [P_1 \quad P_2] = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow A_m^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix}$$

Sendo $C_m = [\ c_1 \quad c_2\ ] = [\ 6 \quad 8\ ]$ então $C_m A_m^{-1} = [\ {}^1/_{10} \quad {}^3/_5\ ]$ pelo que o valor das <u>variáveis de decisão</u> do Dual têm o valor óptimo $Y_a^T = [y_1 \quad y_2] = [\frac{1}{10} \quad \frac{3}{5}]$ ou seja $y_1^* = \frac{1}{10}$; $y_2^* = \frac{3}{5}$.

A mesma conclusão pode ser obtida no quadro-óptimo:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

y_1 y_2

Na 1ª restrição do Primal a variável de folga é F_1 , sendo y_1 a variável de decisão Dual associada. O coeficiente de F_1 na equação da função é $^1/_{10}$ pelo que $y_1^* = {}^1\!/_{10}$.

Na 2ª restrição do Primal a variável de folga é F_2 , sendo y_2 a variável de decisão Dual associada. O coeficiente de F_2 na equação da função é $^3/_5$ pelo que $y_2^* = {}^3\!/_5$.

c. TERCEIRA PROPRIEDADE

Se o problema Primal tem solução óptima finita, o valor óptimo das Variáveis Auxiliares do Dual é $Y_i^T = C_m A_m^{-1} A - C_a$ pelo que os *coeficientes das variáveis de decisão na equação da função do quadro Primal são os valores das* <u>*Variáveis Auxiliares do Dual*</u> *(variáveis de equilíbrio das restrições duais associadas a cada uma das variáveis de decisão do Primal)*.

Demonstração

O modelo Dual tem as restrições técnicas:

$$Y^T A \geq C_a \text{ que na forma-padrão são } Y^T A - Y_i^T = C_a$$

pelo que as variáveis excedentárias têm o valor $Y_i^T = Y^T A - C_a$.

Da propriedade anterior tem-se $Y^T = C_m A_m^{-1}$ pelo que $Y_i^T = C_m A_m^{-1} A - C_a$ como se pretende demonstrar.

O exemplo seguinte ajuda a visualizar a 2ª propriedade.

Considerando a base óptima do exemplo anterior, constituída pelos vectores P_1 e P_2, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} ;\ C_a = \begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_m = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} ;\quad A_m^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} ;\quad A_m^{-1} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se assim $C_m A_m^{-1} A - C_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ pelo que o valor óptimo das <u>variáveis auxiliares</u> do Dual é:

$$Y_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou seja } y_3^* = 0 ;\ y_4^* = 0 .$$

A mesma conclusão pode ser obtida no quadro-óptimo:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

$\boxed{y_3}$ $\boxed{y_4}$

A 1ª restrição do Dual é constituída pelos coeficientes técnicos da variável de decisão x_1 pelo que o coeficiente desta variável na equação da função no quadro do Primal é o valor da variável auxiliar y_3 da 1ª restrição do Dual.

A 2ª restrição do Dual é constituída pelos coeficientes técnicos da variável de decisão x_2 pelo que o coeficiente desta variável na equação da função no quadro do Primal é o valor da variável auxiliar y_4 da 2ª restrição do Dual.

Nota: No quadro Simplex (Maximização) reconhece-se que a solução óptima do problema Primal foi atingida quando " todos" os coeficientes na equação da função objectivo são não negativos.

Enquanto o óptimo não for atingido há na equação da função coeficientes negativos; como estes coeficientes são valores de variáveis duais (que são não negativas) então a solução Dual associada não é admissível.

Resulta assim que um problema de programação linear tem solução óptima finita se e só se são admissíveis as soluções básicas dos problemas Primal e Dual.

d. QUARTA PROPRIEDADE (Complementaridade Prima-Dual)

Se, no óptimo, uma restrição do Primal tem folga então a variável Dual associada é nula (complementaridade).

Resulta assim que, no óptimo, se uma variável do Primal é positiva a variável Dual correspondente é nula e se uma variável Dual é positiva então a correspondente variável do primal é nula (complementaridade).

De forma breve pode concluir-se que no par de variáveis complementares se uma delas é VB num dos problemas a outra é VNB do outro problema (do que resulta o produto nulo de ambas…).

Importa atender ainda que há a possibilidade de ambas serem nulas (degeneração).

Demonstração

Atendendo às 2 ª e 3ª propriedades, deduz-se que se uma variável de folga Primal é positiva é porque é VB e tem coeficiente nulo na equação da função (este coeficiente é valor da correspondente variável Dual pelo que esta é nula). Se uma variável auxiliar do Dual é positiva é porque a correspondente variável do Primal é VNB e portanto nula.

O exemplo seguinte ajuda a visualizar esta propriedade.

Recorrendo ao quadro-óptimo do exemplo anterior:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^{1}/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^{3}/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^{1}/_{10}$	$^{3}/_{5}$	96
	$\boxed{y_3}$	$\boxed{y_4}$	$\boxed{y_1}$	$\boxed{y_2}$	

Relações de complementaridade Primal-Dual:

- $x_1 \,.\, y_3 = (4)\,(0) = 0$
- $x_2 \,.\, y_4 = (9)\,(0) = 0$
- $F_1 \,.\, y_1 = (0)\,(^1/_{10}) = 0$
- $F_2 \,.\, y_2 = (0)\,(^3/_5) = 0$

Da quarta propriedade resulta que se X e Y são soluções admissíveis dos problemas Primal e Dual, respectivamente, então X* e Y* são soluções óptimas de cada um dos problemas.

e. QUINTA PROPRIEDADE (Interpretação das Variáveis de Decisão do problema Dual)

Os valores óptimos das variáveis de Decisão do Dual representam variações do valor da função objectivo do Primal em consequência da variação marginal (1 unidade) do segundo membro das restrições Primais a elas associados.

(Como adiante se verá, na Interpretação Económica, os valores óptimos das variáveis de Decisão do Dual são denominados "*preços-sombra*" dos recursos).

Demonstração

Da 2ª propriedade sabe-se que $Y^T B = C_m A_m^{-1} B$ é, no óptimo, o valor máximo de f(X) do Primal e mínimo de g(Y) do Dual.

Se qualquer dos parâmetros de "B" é *aumentado de uma unidade* o valor óptimo da função Primal *aumenta* de valor igual ao da variável de decisão Dual associada à restrição.

O exemplo seguinte ajuda a visualizar esta propriedade.

Recorrendo ao quadro-óptimo do exemplo anterior:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

$\boxed{y_1}$ $\boxed{y_2}$

A variável $y_1 = {}^1/_{10}$ indica que se a disponibilidade de madeira *aumentar* de 1 metro (passando a ser 301 metros) o valor óptimo do lucro *aumenta* de $^1/_{10}$ €; do mesmo modo se a disponibilidade de horas de trabalho *aumentar* de 1 hora (passando a 111 horas) o valor do lucro óptimo *aumenta* de $^3/_5$ €.

Como chegar a estas conclusões?

Comecemos por notar que a restrição técnica $30x_1 + 20x_2 + F_1 = 300$ metros é:

$$30x_1 + 20x_2 = 300 - F_1$$

- simulando $F_1 = 1$ metro, a disponibilidade passa a ser de 299 metros de madeira.
- simulando $F_1 = -1$ metro, a disponibilidade passa a ser de 301 metros de madeira.

Estamos agora em condições de calcular a variação do lucro total se variarmos marginalmente a disponibilidade de madeira pois bastará ler, a equação da função-objectivo no quadro óptimo do problema Primal:

$$f(X) + 0x_1 + 0x_2 + {}^{1}/_{10}\,F_1 + {}^{3}/_{5}\,F_2 = 96€$$

Lida em ordem a F_1 temos:

$$f(X) = 96 - {}^{1}/_{10}F_1$$

Para F_1=1 metro ou F_1 = -1 metro a variação do lucro é de " - ${}^{1}/_{10}$ € " e "+ ${}^{1}/_{10}$ € " respectivamente como foi afirmado. Eis uma das leituras de interesse da equação de f(X) no quadro óptimo.

Podemos agora ler f(X) em ordem a F_2 para vermos o impacto no lucro da variação marginal das 110 horas de trabalho:

$$f(X) + 0x_1 + 0x_2 + {}^{1}/_{10}\,F_1 + {}^{3}/_{5}\,F_2 = 96€$$

Lida em ordem a F_2 temos:

$$f(X) = 96 - {}^{3}/_{5}\,F_2$$

Para F_2=1 hora ou F_2 = -1 hora a variação do lucro é de "- ${}^{3}/_{5}$ € " e "+ ${}^{3}/_{5}$ € " respectivamente como foi afirmado.

Tenha-se em atenção que esta variação apenas se verifica num dado intervalo de variação do 2º membro em análise, intervalo cuja determinação é apresentada no capítulo "Análise de Sensibilidade".

f. SEXTA PROPRIEDADE

Se o Primal (Dual) tiver solução ilimitada então o Dual (Primal) *não tem soluções admissíveis* (o conjunto de soluções é vazio).

Demonstração

Considere-se o Primal com solução ilimitada ($f(X) \to +\infty$).

Admita-se que há solução finita para o Dual.

De acordo com a Primeira Propriedade a função objectivo do Dual (de que se pretende o mínimo) terá um valor que limita superiormente o valor da função objectivo do Primal o que contradiz a hipótese proposta (solução finita para o Dual), ou seja, não há solução admissível para o problema Dual (conjunto de soluções é vazio).

De igual modo, se o problema Dual não tiver solução limitada então o conjunto de soluções do Primal é vazio (não há soluções admissíveis).

Veja-se agora um novo exemplo de formalização do modelo Dual.

8. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Apresentar o modelo Dual associado ao problema seguinte:

$$\text{Max } f = x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & \leq & 15 \\ & - & x_2 & & & + & 4x_4 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & \geq & 12 \\ \multicolumn{7}{c}{x_1 \text{ livre };\ x_2, x_3, x_4} & \geq & 0 \end{array}$$

1º Analisar o modelo Primal e "fixar" a estrutura do modelo Dual

Problema Primal	Problema Dual
Max f(X)	Min g(Y)
1ª restrição do Primal é típica ("$\leq$" em Max)	Variável dual y_1 é típica ($y_1 \geq 0$)
2ª restrição do Primal é do tipo "="	Variável dual y_2 é livre
3ª restrição do Primal é não típica ("$\geq$" em Max)	Variável dual y_3 é não típica ($y_3 \leq 0$)
Variável x_1 é livre	1ª restrição é do tipo " = "
Variável $x_2 \geq 0$ é típica	2ª restrição é do tipo " $\geq$ " (típica em Min)
Variável $x_3 \geq 0$ é típica	3ª restrição é do tipo " $\geq$ " (típica em Min)
Variável $x_4 \geq 0$ é típica	4ª restrição é do tipo " $\geq$ " (típica em Min)

2º Associar a cada uma das restrições técnicas do Primal, uma variável de decisão do Dual

Problema Primal

$$\begin{array}{rcrcrcrcl|c} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & \leq & 15 & y_1 \\ & - & x_2 & & & + & 4x_4 & = & 10 & y_2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & \geq & 12 & y_3 \\ \multicolumn{7}{c}{x_1 \text{ livre}} & & & \\ \multicolumn{7}{c}{x_2, x_3, x_4} & \geq & 0 & \end{array}$$

3º Escrever as restrições técnicas do dual associadas a x_1, x_2, x_3 e x_4:

$$2y_1 + 3y_3 = 1$$

$$y_1 - y_2 + 2y_3 \geq -3$$

$$-3y_1 - 4y_3 \geq 5$$

$$4y_2 - 2y_3 \geq -1$$

5º Escrever a função objectivo do Dual (já sabemos que é para Minimizar):

$$\text{Min } g(Y) = 15y_1 + 10y_2 + 12y_3$$

6º Escrever as restrições lógicas do Dual (ver 1º passo) :

$$y_1 \geq 0 \ ;\ y_2 \text{ livre } ;\ y_3 \leq 0$$

Em resumo:

O Primal tem 3 restrições técnicas pelo que o Dual tem 3 Variáveis de Decisão y_1 , y_2 e y_3 associadas àquelas restrições.

O Primal tem 4 Variáveis de Decisão pelo que o Dual tem 4 restrições técnicas associadas àquelas variáveis.

O Primal Maximiza pelo que o Dual Minimiza.

Em resumo, o modelo Dual é:

Min $g(Y) = 15y_1 + 10y_2 + 12y_3$

s.a. :

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2y_1 & & & + & 3y_3 & = & 1 \\
y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & \geq & -3 \\
-3y_1 & & & - & 4y_3 & \geq & 5 \\
 & & 4y_2 & - & 2y_3 & \geq & -1
\end{array}
$$

$y_1 \geq 0$; y_2 livre ; $y_3 \leq 0$

9. Auto Teste

a. Apresentar o modelo Dual associado ao problema seguinte:

$$\text{Min } f(X) = \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{3}{2}x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{lcccl} 5x_1 & + & 4x_2 & \geq & 600 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & \geq & 2400 \\ 8x_1 & & & \geq & 600 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b. Recorrendo às relações de complementaridade Primal-Dual, calcular a solução óptima do problema Dual sabendo que a solução óptima do problema Primal anterior é a seguinte:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 \\ 0 \\ 5400 \\ 0 \\ 9000 \end{bmatrix} \qquad \text{Min } f(X^*) = 600$$

c. Apresentar o modelo Dual associado ao problema seguinte:

$$\begin{array}{lccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \hline \text{Min } f(X)= & -2 & 5 & 3 & & \\ \hline & -5 & & 3 & <= & 9 \\ & -9 & -3 & 2 & = & 4 \\ & 3 & 4 & -1 & >= & 10 \end{array}$$

$$x_1 \leq 0 \; ; \; x_2 \; , x_3 \geq 0$$

d. Do problema anterior apresenta-se o quadro óptimo onde:

- $x_1 = -x'_1 \quad (x'_1 \geq 0)$
- F_1 é a variável de folga utilizada na 1ª restrição técnica
- A_2 é a variável artificial utilizada na 2ª restrição técnica
- E_3 é a variável excedentária utilizada na 3ª restrição técnica associada à variável artificial A_3

VB	x'_1	x_2	x_3	E_3	F_1	A_2	A_3	VSM
x'_1	1	0	$^5/_{27}$	$^{-1}/_9$	0	$^4/_{27}$	$^1/_9$	$^{46}/_{27}$
x_2	0	1	$^{-1}/_9$	$^{-1}/_3$	0	$^1/_9$	$^1/_3$	$^{34}/_9$
F_1	0	0	$^{56}/_{27}$	$^5/_9$	1	$^{-20}/_{27}$	$^{-5}/_9$	$^{13}/_{27}$
f(X)	0	0	$-^{86}/_{27}$	$-^{17}/_9$	0	$^{23}/_{27}$	$^{17}/_9$	$^{602}/_{27}$

Apresentar a solução óptima dos problemas Primal e Dual.

10. Solução do Auto Teste

a. O modelo Dual é:

$$\text{Max } g(Y) = 600y_1 + 2400y_2 + 600y_3$$

$$\begin{array}{llllllll} \text{s.a.} & 5y_1 & + & 2y_2 & + & 8y_3 & \leq & ^1/_2 \\ & 4y_1 & + & 4y_2 & & & \leq & ^3/_2 \\ & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

b. No quadro seguinte apresenta-se o estudo comparativo das 2 soluções:

PRIMAL Variáveis de Decisão	DUAL Variáveis Auxiliares	Complementaridade
x_1	Da 1ª restrição : y_4	$x_1 \cdot y_4 = 0$
x_2	Da 2ª restrição : y_5	$x_2 \cdot y_5 = 0$

PRIMAL Variáveis Auxiliares	DUAL Variáveis de Decisão	Complementaridade
Da 1ª restrição : E_1	y_1	$E_1 \cdot y_1 = 0$
Da 2ª restrição : E_2	y_2	$E_2 \cdot y_2 = 0$
Da 3ª restrição : E_3	y_3	$E_3 \cdot y_3 = 0$

Sabendo que a solução óptima do problema Primal é:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 \\ 0 \\ 5400 \\ 0 \\ 9000 \end{bmatrix} \qquad \text{Min } f(X^*) = 600$$

conclui-se que $y_1 = y_3 = y_4 = 0$.

Resolvendo o sistema de equações técnicas do Dual:

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + 8y_3 + y_4 = ^1/_2 \\ 4y_1 + 4y_2 + y_5 = ^3/_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = ^1/_4 \\ y_5 = ^1/_2 \end{cases}$$

A solução óptima do problema Dual é pois:

$$Y^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ^1/_4 \\ 0 \\ 0 \\ ^1/_2 \end{bmatrix} \qquad \text{Max } g(Y^*) = 600$$

c. O modelo Dual é o seguinte:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Max } g(Y)= & 9y_1 & + \ 4y_2 & + \ 10y_3 & & \\
\text{s.a.} & -5y_1 & - \ 9y_2 & + \ 3y_3 & \geq & -2 \\
 & & - \ 3y_2 & + \ 4y_3 & \leq & 5 \\
 & 3y_1 & + \ 2y_2 & - \ \ y_3 & \leq & 3 \\
 & \multicolumn{5}{l}{y_1 \leq 0 \ \ y_2 \text{ livre} ; y_3 \geq 0;}
\end{array}$$

d. A solução óptima do Primal é a seguinte:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ F_1 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^{46}/_{27} \\ {}^{34}/_{9} \\ 0 \\ {}^{13}/_{27} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(porque } x_1 = -x'_1\text{)} \qquad \text{Min } f(X^*) = {}^{602}/_{27}$$

A solução óptima do problema Dual é lida na equação de f(X) do quadro óptimo:

VB	x'_1	x_2	x_3	E_3	F_1	A_2	A_3	VSM
x'_1	1	0	${}^{5}/_{27}$	${}^{-1}/_{9}$	0	${}^{4}/_{27}$	${}^{1}/_{9}$	${}^{46}/_{27}$
x_2	0	1	${}^{-1}/_{9}$	${}^{-1}/_{3}$	0	${}^{1}/_{9}$	${}^{1}/_{3}$	${}^{34}/_{9}$
F_1	0	0	${}^{56}/_{27}$	${}^{5}/_{9}$	1	${}^{-20}/_{27}$	${}^{-5}/_{9}$	${}^{13}/_{27}$
f(X)	0	0	$-{}^{86}/_{27}$	$-{}^{17}/_{9}$	0	${}^{23}/_{27}$	${}^{17}/_{9}$	${}^{602}/_{27}$

$y_1 = 0$ (1ª variável de decisão dual lida na coluna de F_1)

$y_2 = {}^{23}/_{27}$ (2ª variável de decisão dual lida na coluna de A_2)

$y_3 = {}^{17}/_{9}$ (3ª variável de decisão dual lida na coluna de A_3)

Porque variáveis auxiliares são sempre não negativas, na Minimização de f(X) devem ser lidas em valor absoluto:

$y_4 = 0$ (1ª variável auxiliar dual lida, em valor absoluto, na coluna de x_1)

$y_5 = 0$ (2ª variável auxiliar dual lida, em valor absoluto, na coluna de x_2)

$y_6 = {}^{86}/_{27}$ (3ª variável auxiliar dual lida, em valor absoluto, na coluna de x_3)

Max $g(Y) = {}^{602}/_{27}$

11. RELAÇÕES ADICIONAIS ENTRE PRIMAL E DUAL

Mantendo como pressuposto a Maximização de f(X) do problema Primal e a Minimização de g(Y) do problema Dual analise-se o quadro seguinte:

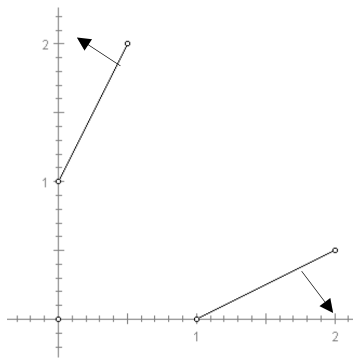
		Problema Dual : Min g(Y)	
		Possível	Impossível
Problema Primal Max f(X)	Possível	Max f(X) = Min g(Y)	Max f(X)= ilimitado
	Impossível	Min g(Y) = ilimitado	Primal e Dual sem solução

a. Exemplo de Primal e Dual Possíveis

Primal	Dual
Max $f(X)= x_1 + x_2$ $2x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1 + 2x_2 \leq 4$ $x_1 , x_2 \geq 0$	Min $g(Y)= 4y_1 + 4y_2$ $2y_1 + y_2 \geq 1$ $y_1 + 2y_2 \geq 1$ $y_1 , y_2 \geq 0$
<u>Solução óptima</u> $x_1 = {}^4/_3$ $x_2 = {}^4/_3$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ Max $f(X) = {}^8/_3$	<u>Solução óptima</u> $y_1 = {}^1/_3$ $y_2 = {}^1/_3$ $y_3 = 0$ $y_4 = 0$ Min $g(Y) = {}^8/_3$

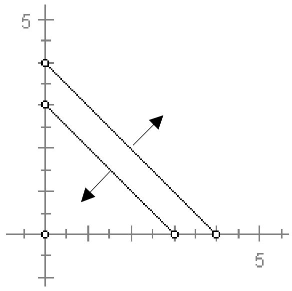
b. Exemplo de Primal Ilimitado (possível) e Dual Impossível (conjunto de soluções vazio)

Primal	Dual
Max $f(X)= x_1 + x_2$ $-2x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1 - 2x_2 \leq 2$ $x_1 , x_2 \geq 0$	Min $g(Y)= 2y_1 + 2y_2$ $-2y_1 + y_2 \geq 1$ $y_1 - 2y_2 \geq 1$ $y_1 , y_2 \geq 0$
<u>Solução óptima</u> f(X) ilimitada	<u>Solução óptima</u> Não há solução porque o conjunto de soluções é vazio (ver figura)



c. Exemplo de Primal Impossível (conjunto de soluções vazio) e Dual Ilimitado (possível)

Primal	Dual
Max $f(X)= 2x_1 + x_2$ $x_1 + x_2 \geq 4$ $x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 , x_2 \geq 0$	Min $g(Y)= 4y_1 + 3y_2$ $y_1 + y_2 \geq 2$ $y_1 + y_2 \geq 1$ $y_1 \leq 0$ $y_2 \geq 0$
<u>Solução óptima</u> Não há solução porque o conjunto de soluções é vazio (ver figura)	<u>Solução óptima</u> g(Y) ilimitada



d. Exemplo de Primal e Dual Impossíveis

Primal	Dual
Max $f(X)= x_1 + x_2$ $x_1 - x_2 \geq 0$ $x_1 - x_2 \leq -1$ $x_1 , x_2 \geq 0$	Min $g(Y)= -y_2$ $y_1 + y_2 \geq 1$ $-y_1 - y_2 \geq 1$ $y_1 \leq 0$ $y_2 \geq 0$
<u>Solução óptima</u> Não há solução porque o conjunto de soluções é vazio (ver restrições)	<u>Solução óptima</u> Não há solução porque o conjunto de soluções é vazio (ver restrições)

12. INTERPRETAÇÃO ECONÓMICA

Considere-se o modelo de PL para optimizar a produção dos bens A, B e C nas condições seguintes:

- disponibilidade de 30 horas na máquina M1
- disponibilidade de 40 horas na máquina M2
- lucros unitários de venda de 10, 8 e 9 euros, respectivamente para A, B e C

$$\text{Max } f(X) = 10x_1 + 8x_2 + 9x_3$$

$$\text{sujeito a:} \quad \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & \leq & 30 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 40 \\ & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0 \end{array}$$

O quadro-óptimo é o seguinte:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM
F_1	$^5/_2$	0	$^9/_2$	1	$^{-1}/_2$	10
x_2	$^3/_2$	1	$^3/_2$	0	$^1/_2$	20
f(X)	2	0	3	0	4	160

A solução óptima é $X^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$; $Max\, f(X^*) = 160€$

ou seja:

• não produzir o bem "A"	(valor de $x_1 = 0$)	Variável de Decisão
• produzir 20 unidades de "B"	(valor de $x_2 = 20$)	Variável de Decisão
• não produzir o bem "C"	(valor de $x_3 = 0$)	Variável de Decisão
• sobram10 horas em M1	(valor de$F_1 = 10$)	Variável de Folga
• sobram 0 horas em M2	(valor de $F_2 = 0$)	Variável de Folga
• 160 € de lucro máximo	valor de f(X)	

O modelo Dual é:

$$\text{Min } g(Y) = 30y_1 + 40y_2$$

$$\text{sujeito a:} \quad \begin{array}{rcrcr} 4y_1 & + & 3y_2 & \geq & 10 \\ y_1 & + & 2y_2 & \geq & 8 \\ 6y_1 & + & 3y_2 & \geq & 9 \\ & y_1, y_2, y_3 & & \geq & 0 \end{array}$$

A leitura da 1ª restrição técnica, do modelo Dual, é a seguinte:

O custo interno dos recursos necessários à produção de 1 unidade de "A" não deve ser inferior ao lucro associado à sua venda ou, o que é o mesmo, o custo interno de 4 horas da máquina M1 e de 3 horas da máquina M2 que são imputados à produção de 1 unidade de "A", não deve ser inferior ao lucro de 10 € resultante da venda dessa unidade de "A" ("output" da produção).

De igual modo a leitura da 2ª restrição técnica é a seguinte:

O custo interno dos recursos necessários à produção de 1 unidade de "B" não deve ser inferior ao lucro associado à sua venda ou, o que é o mesmo, o custo interno de 1 horas da máquina M1 e de 2 horas da máquina M2 que são imputados à produção de 1 unidade de "B", não deve ser inferior ao lucro de 8 € resultante da venda dessa unidade de "B" ("output" da produção).

De igual modo a leitura da 3ª restrição técnica é a seguinte:

O custo interno dos recursos necessários à produção de 1 unidade de "C" não deve ser inferior ao lucro associado à sua venda ou, o que é o mesmo, o custo interno de 6 horas da máquina M1 e de 3 horas da máquina M2 que são imputados à produção de 1 unidade de "C", não deve ser inferior ao lucro de 9 € resultante da venda dessa unidade de "C" ("output" da produção).

A leitura da função-objectivo do Dual é a seguinte:

O custo interno dos recursos a imputar à produção deve ser mínimo".

A leitura das restrições lógicas é a seguinte:

O custo interno dos recursos a imputar à produção deve ser não negativo".

Do exposto, conclui-se que as variáveis de decisão do Dual, y_1 e y_2 , devem ser entendidas como contributo unitário de, respectivamente, 1 hora de cada uma das máquinas para a formação do lucro.

Repete-se que este valor unitário do recurso é um preço interno associado à produção nada tendo a ver com preços de mercado (razão porque é denominado "preço-sombra" do recurso).

Da leitura do quadro-óptimo do Primal (equação óptima da função) conclui-se que os preços-sombra dos recursos são:

- para 1 hora da máquina M1: $y_1 = 0$ €
- para 1 hora da máquina M2: $y_2 = 4$ €

concluindo-se que, em termos relativos, 1 hora de trabalho da máquina M2 é "mais valiosa" do que 1 hora de trabalho da máquina M1.

Resta agora atender ao significado das variáveis de desvio y_3 e y_4.

As equações técnicas do problema Dual são:

$$4y_1 + 3y_2 - y_3 = 10$$

$$y_1 + 2y_2 - y_4 = 8$$

$$6y_1 + 3y_2 - y_5 = 9$$

pelo que:

$$y_3 = 4y_1 + 3y_2 - 10 = 0 + 12 - 10 = 2$$
$$y_4 = y_1 + 2y_2 - 8 = 0 + 8 - 8 = 0$$
$$y_5 = 6y_1 + 3y_2 - 9 = 0 + 12 - 9 = 3$$

Estes valores indicam o valor em lucro dos recursos incorporados deduzido do lucro unitário da venda de cada um dos bens produzidos.

Assim, para o produto “A” constatamos que a produção de uma unidade consome recursos com o valor de 12€, em lucro, mas como da sua venda resulta apenas o lucro de 10€ é óbvio que o bem não deve ser produzido (antieconomia de 2€ por unidade de “A”).

Idêntica conclusão pode ser obtida fazendo a leitura da equação óptima de f(X) em ordem a x_1 :

$$f(X) = 160 - 2x_1$$

Simulando $x_1 = 1$ (produzir uma unidade de “A”) o lucro total passa a ser de 158€ ou seja, é reduzido de 2€ (medida da antieconomia de “A”). Sabendo que x_1 e y_3 são variáveis complementares, fica claro que o valor do coeficiente de x_1 na equação de f(X) do quadro Simplex (maximização) é o valor da variável y_3.

De forma similar $y_4 = 0$ mostra que não há antieconomia associada à produção de “B” (de facto, no óptimo são produzidas 20 unidades de “B”).

Já com $y_5 = 3$ indica que há antieconomia de 3€ associada à produção unitária de “C” (e por isso $x_3 = 0$ na solução óptima).

Conhecido o significado económico das variáveis Duais importa efectuar uma leitura mais apurada das relações de complementaridade:

- $x_1y_3 = 0$ com $x_1 = 0$ e $y_3 = 2$

  A não produção do bem “A” é consequência da antieconomia de 2€ por unidade produzida.
- $x_2y_4 = 0$ com $x_2 = 20$ e $y_4 = 0$

  A produção de “B” é consequência de ser nula a antieconomia associada à sua produção.
- $x_3y_5 = 0$ com $x_3 = 0$ e $y_5 = 3$

  A não produção do bem “C” é consequência da antieconomia de 3€ por unidade produzida.
- $y_1F_1 = 0$ com $y_1 = 0$ e $F_1 = 10$

  Significa que f(X) não é modificável com a variação marginal das horas disponíveis da máquina M1. Sobram 10 horas das 30 horas disponibilizadas. Se for cativada mais 1 hora ou reduzida 1 hora a variável de folga F_1 altera-se de 1 hora mas o lucro total de 160€ não se altera. Esta situação ocorre quando o recurso é <u>abundante</u> (excessivo em relação à capacidade de transformação).
- $y_2F_2 = 0$ com $y_2 = 4$ e $x_3 = 0$

  Significa que f(X) é modificável com a variação marginal das horas disponíveis da máquina M2.

São totalmente utilizadas as 40 horas disponibilizadas. Se for cativada mais 1 hora ou reduzida 1 hora a variável de folga F_2 continua com valor nulo mas o lucro total de 160€ aumenta ou diminui de 4€. Esta situação ocorre quando o recurso é escasso (totalmente utilizado na produção).

13. ELIMINAR A ANTIECONOMIA ASSOCIADA À PRODUÇÃO

O conhecimento da solução óptima do Dual permite estabelecer cenários de rentabilização de um produto que o óptimo Primal aconselha a não produzir.

Recorramos ao produto "A" da secção anterior que não é produzido ($x_1 = 0$).

O valor da antieconomia é de $y_3 = 2$€ por unidade produzida.

Comecemos por analisar a equação técnica do Dual associada à variável x_1:

$$4y_1 + 3y_2 - y_3 = 10$$

Substituindo as variáveis pelos seus valores correntes tem-se:

$$4\,(0) + 3(4) - 2 = 10$$

Constata-se que se consegue anular a antieconomia de 2€:

- reduzindo o número de horas que são consumidas na máquina M2

  ou

- aumentando a margem de lucro unitário da venda

  ou

- reduzindo o número de horas que são consumidas na máquina M2 e aumentando a margem de lucro unitário da venda em proporções a estudar

Notar que alterar o consumo de horas na máquina M1 não é opção dado que a primeira parcela será sempre nula.

Vejamos o primeiro cenário:

O consumo de horas na máquina M2 deve passar a ser "k" que elimine a antieconomia ou seja, a equação Dual deve passar a ser:

$$4y_1 + (k)y_2 - 0 = 10$$

o que conduz a k = 2.5 horas.

Se for possível alterar tecnicamente a produção para que o consumo de horas na máquina M2 passe de 3 horas para 2.5 horas por unidade de "A" (redução de 16.66 %) a produção deste bem passa a ser rentável pois o valor interno dos recursos, $2.5y_2$, é igual ao lucro unitário de venda de 10€.

Vejamos agora o segundo cenário:

A equação Dual com os valores óptimos correntes é:

$$4\,(0) + 3(4) - (2) = 10$$

Se adicionarmos 2€ a cada um dos membros da equação fica:

$$4\,(0) + 3(4) - (2) + 2 = 10 + 2 \text{ o que é:}$$

$$4\,(0) + 3(4) - 0 = 12$$

Conclui-se que se for possível vender o bem “A” com lucro unitário mínimo de 12€ a sua produção passará a ser rentável.

Vejamos agora o terceiro cenário considerando a rentabilização da produção de “A” actuando simultaneamente no consumo de horas da máquina M2 e no lucro unitário da venda do seguinte modo:

- reduzir 50% da antieconomia actuando no consumo de horas da máquina M2
- reduzir 50% da antieconomia actuando no lucro unitário da venda

Pretende-se então que a antieconomia de 2€ seja reduzida de 1€ via horas da máquina M2 e 1€ via margem de lucro.

Iniciemos o cálculo escrevendo a situação corrente:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4y_1 & + & 3y_2 & - & y_3 & = & 10 \\ 0 & + & 3\,(4) & - & 2 & = & 10 \end{array}$$

Redução da antieconomia de 2€ para 1€ via margem de lucro:

$$0 + 3\,(4) - 1 = 10 + 1 \quad \Big| \quad \text{(nova margem de lucro = 11€)}$$

Se a margem de lucro for de 11€ em vez de 10€ a antieconomia associada à produção de uma unidade de “A” passará a ser de 1€.

Redução da antieconomia de 1€ para 0€ via consumo de horas na máquina M2:

Nesta parte do estudo temos:

$$0 + 3\,(4) - 1 = 11$$

Para eliminar a antieconomia de 1€ actuando nas horas de consumo na máquina M2, calculamos as “k” horas de consumo que a tal conduzem:

$$0 + k\,(4) - 0 = 11$$

$$k = 2.75$$

Em resumo:

Alterando o lucro unitário de venda de 10€ para 11€ e o consumo unitário de horas da máquina M2 de 3 horas para 2.75 horas a produção de “A” passa a ser rentável.

O modelo de PL passaria a ser, neste cenário:

$$\text{Max } f(X) = 11x_1 + 8x_2 + 9x_3$$

$$\text{sujeito a:} \quad \begin{array}{ccccccc} 4x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & \leq & 30 \\ 2.75x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 40 \\ & & x_1, x_2, x_3 & & & \geq & 0 \end{array}$$

Se utilizarmos a versão matricial do Simplex podemos verificar a exactidão do cálculo efectuado.

No quadro óptimo disponível apenas se altera o vector de x_1 que para o novo modelo é $A_m^{-1} P_1$.

Face à alteração das horas de consumo na máquina M2 o vector técnico do produto "A" é:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.75 \end{bmatrix} \text{ pelo que:}$$

$$A_m^{-1} P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.625 \\ 1.375 \end{bmatrix}.$$

O quadro óptimo inicial era:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM
F_1	$^5/_2$	0	$^9/_2$	1	$^{-1}/_2$	10
x_2	$^3/_2$	1	$^3/_2$	0	$^1/_2$	20
f(X)	2	0	3	0	4	160

e neste terceiro cenário passa a ser:

$$C_m^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

	VB	[11] x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM
0	F_1	2.625	0	$^9/_2$	1	$^{-1}/_2$	10
8	x_2	1.375	1	$^3/_2$	0	$^1/_2$	20
	f(X)	0	0	3	0	4	160

0(2.625) + 8 (1.375) – 11 = 0

Antieconomia nula

Solução óptima não única

Podemos agora ensaiar a entrada para a base da variável x_1 (sai F_1) o que conduz ao novo quadro óptimo:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^{12}/_7$	$^8/_{21}$	$^{-4}/_{21}$	$^{80}/_{21}$
x_2	0	1	$^{-6}/_7$	$^{-11}/_{21}$	$^{16}/_{21}$	$^{310}/_{21}$
f(X)	0	0	3	0	4	160

Dispomos agora de duas soluções óptimas alternativas (a original e a agora calculada). Designando-as por X_1 e X_2 temos:

$$X_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; X_2^* = \begin{bmatrix} \frac{80}{21} \\ \frac{310}{21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad f(X_1^*) = f(X_2^*) = 160€ \Rightarrow Máximo$$

A expressão geral das soluções óptimas do terceiro cenário é:

$$X^* = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* \quad \text{com } \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \text{ e } \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$
$$\text{Max f}(X^*) = 160\,€$$

14. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Efectuar a interpretação económica da produção de 3 bens "A", "B" e "C" de que se apresentam o modelo de PL e respectivo quadro-óptimo:

Max $f = x_1 + x_2 + x_3$ (função de lucro em €)

s.a.

$$
\begin{array}{lllllll}
2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq 25 & \text{(capital em u.m.)} \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq 15 & \text{(horas da máquina M1)} \\
4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq 20 & \text{(horas da máquina M2)} \\
 & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq 0 & \text{(quantidades a produzir de "A", "B", "C")}
\end{array}
$$

O quadro óptimo é o seguinte:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
x_1	1	0	0	0	$-1/3$	$1/3$	$25/3$
x_2	0	1	$3/2$	0	$2/3$	$-1/6$	$20/3$
F_1	0	0	$1/2$	1	$-4/3$	$-1/6$	$5/3$
f(X)	0	0	$1/2$	0	$1/3$	$1/6$	$25/3$

Interpretação económica do modelo

A solução óptima do Primal indica:

- produzir $^{25}/_3$, $^{20}/_3$ e 0 unidades de "A", "B" e "C" respectivamente; o lucro máximo é de $^{25}/_3$ €.
- sobram $^5/_3$ u.m. do capital orçamentado ($F_1 = {}^5/_3$)
- não sobram horas de trabalho das máquinas M1 e M2 ($F_2 = F_3 = 0$).

A solução óptima do problema Dual associado é a seguinte:

$$y_1^* = 0;\ y_2^* = 1/3;\ y_3^* = 1/6;\ y_4^* = 0;\ y_5^* = 0;\ y_6^* = 1/2; \quad \text{Min } g(Y^*) = 25/3$$

Relações de complementaridade e interpretação:

1. $x_1y_4 = 0$ pois $x_1 = {}^5/_3$ e $y_4 = 0$; são produzidas $^5/_3$ unidades de "A" porque a antieconomia associada é nula.
2. $x_2y_5 = 0$ pois $x_2 = {}^{20}/_3$ e $y_5 = 0$; são produzidas $^{20}/_3$ unidades de "B" porque a antieconomia associada é nula.
3. $x_3y_6 = 0$ pois $x_3 = 0$ e $y_6 = {}^1/_2$; a produção de "C" é antieconómica. A produção de 1 unidade de "C" reduz o lucro total de $y_6 = {}^1/_2$ €

4. Preços-sombra dos recursos
   - $y_1 = 0$ € por unidade de capital orçamentada; a alteração marginal (mais ou menos uma unidade) das 25 u.m. de capital não altera o lucro total pois tal variação reflectir-se-á apenas no actual valor da variável de folga F_1 (não esquecer que esta afirmação só tem validade num determinado intervalo de variação cujo cálculo será tratado na Análise de Sensibilidade).
   - $y_2 = {}^1/_3$ € por hora da máquina M1. Reflecte o facto de serem utilizadas as 15 horas disponibilizadas (recurso escasso; restrição saturada). No intervalo de sensibilidade, a variação marginal das 15 horas alterará o valor do lucro total em ${}^1/_3$ €.
   - $y_3 = {}^1/_6$€ por hora da máquina M2. Reflecte o facto de serem utilizadas as 20 horas disponibilizadas (recurso escasso). No intervalo de sensibilidade, a variação marginal das 20 horas alterará o valor do lucro total em ${}^1/_6$ €.
   - Uma hora da máquina M1 tem maior contributo para o lucro do que uma hora da máquina M2.
5. Que relação existe entre a produção de "A", "B" e "C" que justifica esta antieconomia?

   Como é habitual a explicação resultará da análise das equações do quadro óptimo em ordem a x_3:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM
x_1			0				${}^5/_3$
x_2			${}^3/_2$				${}^{20}/_3$
F_1			${}^1/_2$				${}^5/_3$

Para explicar a antieconomia associada ao produto "C" analisa-se o valor das Variáveis de Decisão Básicas em função da variável x_3:

$$x_1 = {}^5/_3 - 0x_3$$

$$x_2 = {}^{20}/_3 - {}^3/_2\, x_3$$

Simulando a produção de uma unidade de "C" ($x_3 = 1$):

$$x_1 = {}^5/_3 - 0(1) = {}^5/_3 \quad \text{(a produção de "A" não se altera)}$$

$$x_2 = {}^{20}/_3 - {}^3/_2(1) = {}^{20}/_3 - {}^3/_2 = {}^{31}/_6 \quad \text{(a produção de "B" baixa } {}^3/_2\text{)}$$

conclui-se que há "incompatibilidade" entre as produções de "B" e "C" ou seja, produzir "C" desvia recursos da produção de "B" determinando a redução da produção deste. Sendo os lucros unitários de venda de 1€ para qualquer dos produtos o impacto no lucro total associado à simulação é:

		Impacto no lucro total
Produzir 1 unidade de "C"	$x_3 = 1$	+ 1 €
Nível da produção de "A"	Mantém-se	0 €
Nível da produção de "B"	Reduz ${}^3/_2$	- ${}^3/_2$ €
	Trade-off	- ${}^1/_2$ € (antieconomia de "C")

Vejamos agora alguns cenários para rentabilizar a produção de "C"

1. Actuando na margem de lucro

   O valor <u>mínimo</u> do lucro unitário de "C" que garante a sua produção em condições de economia é $^3/_2$ € correspondente ao valor actual (1 €) aumentado da medida de anti economia $y_6 = {}^1/_2$ €.

2. Actuando no consumo de horas da máquina M1 (preço sombra é $y_2 = {}^1/_3$ €)

   Consumo unitário corrente: 3 horas (ver modelo)

   Restrição Dual corrente associada a x_3:

   $$5y_1 + 3y_2 + 3y_3 - y_6 = 1$$

   $$5(0) + 3({}^1/_3) + 3({}^1/_6) - ({}^1/_2) = 1$$

   Cálculo do número de horas que anula a antieconomia ($y_6 = 0$):

   $$5(0) + k\,({}^1/_3) + 3({}^1/_6) - 0 = 1$$

   $k = {}^3/_2$ horas = 1.5 horas (redução de, pelo menos, 50% do tempo)

   Nota: Pode, com a regra de três simples, chegar à mesma conclusão:

   1 hora da máquina 1 $\longrightarrow$ Vale $^1/_3$ € (preço sombra)

   "Poupar " x horas $\longleftarrow$ "Poupar " 0.5 €

   x = 1.5 horas ("poupar")

   Consumo que rentabiliza = 3 - 1.5 = 1.5 horas

15. Classificação das Soluções Óptimas do Modelo Dual

a. Solução Óptima Única do modelo Dual

Como foi referido quando se discutiu o método do Simplex, dada a estreita ligação entre os modelos Primal e Dual é lógico supor que ambos possam ter soluções únicas ou múltiplas (indeterminadas).

No quadro óptimo do Simplex é possível classificar a solução de cada um dos modelos.

<u>Aborda-se agora exclusivamente o modelo Dual</u>.

Considere-se o seguinte quadro óptimo do problema de Maximização antes apresentado:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

A solução óptima do Dual é **Única** porque a solução óptima do Primal não é degenerada (VB do óptimo são não nulas) ou seja:

Se e solução óptima do Primal <u>não é degenerada</u> a solução óptima do Dual é sempre <u>Única</u>

b. Solução Óptima Indeterminada do modelo Dual

Considere-se o modelo seguinte e o respectivo quadro óptimo do problema Primal:

$$\text{Max } f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3$$

s.a.

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	Termo Independente
x_2	1	1	$^1/_2$	$^1/_2$	0	2
F_2	-2	0	0	-1	1	0
f(X)	1	0	0	1	0	4

A solução óptima do problema Dual é Indeterminada (múltipla) se existirem as seguintes condições:

1ª condição: solução básica do Primal degenerada

Neste caso, a VB F_2 é nula o que satisfaz esta condição

2ª condição : equação da(s) VB nula(s) com, pelo menos, um coeficiente negativo

Neste caso, na equação da variável básica F_2 há os coeficientes negativos de x_1 e de F_1 o que satisfaz esta condição

3ª condição : pelo menos uma das variáveis com coeficiente negativo, identificado na condição anterior, tem coeficiente positivo na equação de f(X).

Neste caso, na equação de f(X) quer a variável x_1 quer a variável F_1 têm coeficiente positivo o que satisfaz esta condição (há pelo menos uma variável a satisfazer as 2ª e 3ª condições)

Porque, em simultâneo, se verificam as 3 condições enunciadas, a solução Dual é Indeterminada.

Vejamos como calcular outra solução óptima para o problema Dual aplicando o método Dual-Simplex (apresentado noutro capítulo):

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	Termo Independente	Obs.
x_2	1	1	$^1/_2$	$^1/_2$	0	2	Sai F_2 ; Entra x_1
x_5	-2	0	0	-1	1	0	(dual Simplex)
f(X)	1	0	0	1	0	4	
x_1	1	0	0	$^1/_2$	$^{-1}/_2$	0	
x_2	0	1	$^1/_2$	0	$^1/_2$	2	
f(X)	0	0	0	$^1/_2$	$^1/_2$	4	Novo óptimo Dual

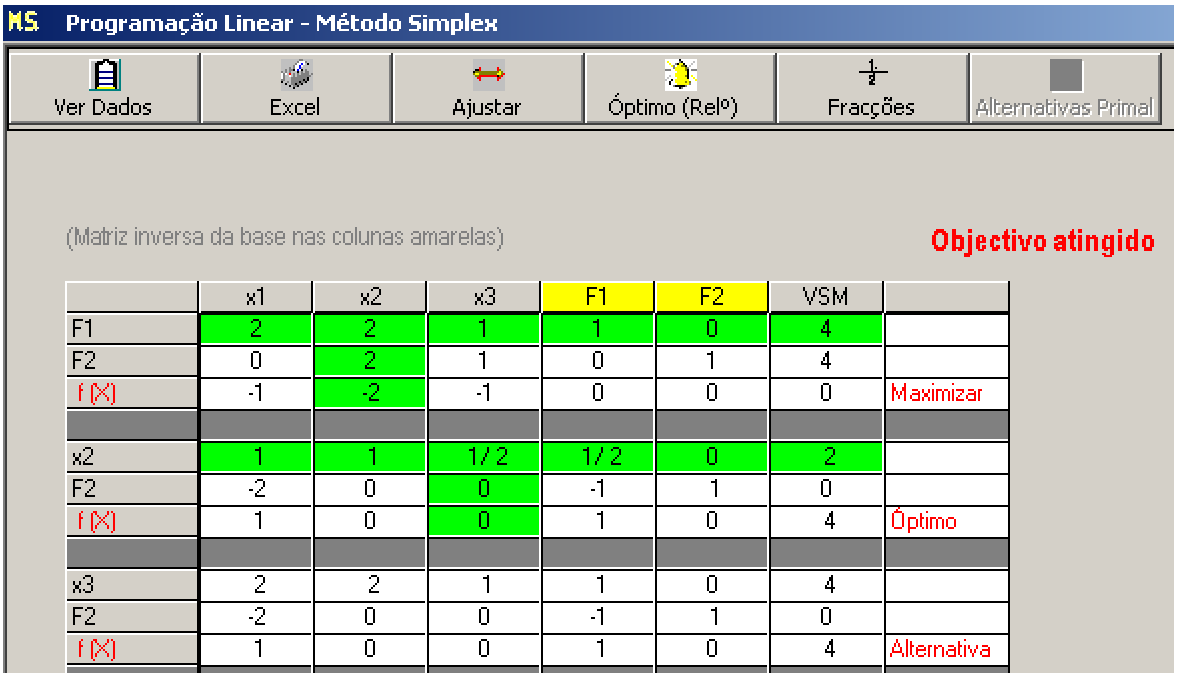
Temos agora de 2 soluções óptimas do problema Dual:

$$Y_1^* = \begin{bmatrix} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 0 \\ y_5 = 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad Y_2^* = \begin{bmatrix} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = \frac{1}{2} \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_5 = 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad g(Y_1^*) = g(Y_2^*) = 4 = \text{Min } g(Y^*)$$

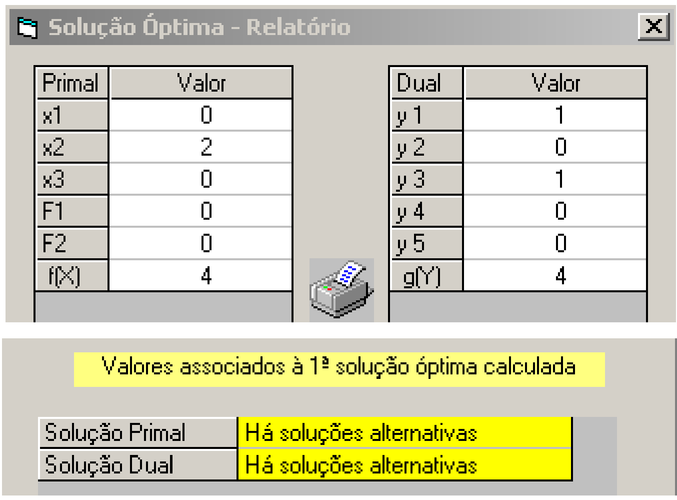
A expressão geral das soluções óptimas do problema Dual é:

$$\text{Min } g(Y^*) = \lambda_1 Y_1^* + \lambda_2 Y_2^* \text{ com } \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_1 , \lambda_2 \geq 0$$

Nota: Neste problema também a solução óptima do Primal é Indeterminada pois na equação óptima de f(X) a VNB x_3 tem coeficiente nulo e pode entrar para a base com valor não nulo (nova solução do problema Primal). Utilizando o software do autor obter-se-ia:



	x1	x2	x3	F1	F2	VSM	
F1	2	2	1	1	0	4	
F2	0	2	1	0	1	4	
f (X)	-1	-2	-1	0	0	0	Maximizar
x2	1	1	1/2	1/2	0	2	
F2	-2	0	0	-1	1	0	
f (X)	1	0	0	1	0	4	Óptimo
x3	2	2	1	1	0	4	
F2	-2	0	0	-1	1	0	
f (X)	1	0	0	1	0	4	Alternativa



Primal	Valor
x1	0
x2	2
x3	0
F1	0
F2	0
f(X)	4

Dual	Valor
y 1	1
y 2	0
y 3	1
y 4	0
y 5	0
g(Y)	4

Valores associados à 1ª solução óptima calculada

Solução Primal	Há soluções alternativas
Solução Dual	Há soluções alternativas