

VI. Versão Matricial do Simplex

1. Introdução

Considere-se o seguinte modelo de PL:

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{array}{rclclcl} \text{sujeito a:} & 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ & 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Matrizes associadas ao modelo:

Matriz Tecnológica	$A = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$
Matriz-coluna das Variáveis de Decisão	$X_a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
Matriz-coluna dos segundos membros das restrições técnicas	$B = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix}$
Matriz-linha dos coeficientes das variáveis de decisão, em $f(X)$	$C_a = [c_1 \quad c_2] = [6 \quad 8]$

Nota: O índice "a" de X_a e C_a associam estas matrizes à matriz "A"

Modelo na forma -padrão do Simplex:

$$f(X) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2$$

$$\begin{array}{rclclcl} \text{sujeito a:} & 30x_1 & + & 20x_2 & + & F_1 & = & 300 \\ & 5x_1 & + & 10x_2 & & + & F_2 & = & 110 \\ & & & x_1, x_2, F_1, F_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Matrizes adicionais (forma-padrão):

Matriz das Variáveis para a 1ª Base (Identidade)	$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matriz-coluna das variáveis para a 1ª Base	$X_i = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$
Matriz-linha dos coeficientes das VB (1ª Base), em $f(X)$	$C_i = [c_{F1} \quad c_{F2}] = [0 \quad 0]$

Nota: O índice "i" de X_i e C_i associam estas matrizes à matriz "I"

A forma-padrão do Simplex pode agora escrever-se:

$$\begin{aligned} A X_a + I X_i &= B \\ f(X) - C_a - C_i &= 0 \end{aligned}$$

ou, de forma mais favorável para deduzir a versão matricial do Simplex:

$$\begin{bmatrix} 0 & A & I \\ 1 & -C_a & -C_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f \\ X_a \\ X_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

O quadro da 1ª Base para iniciar a aplicação do Método do Simplex é o seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	30	20	1	0	300
F_2	5	10	0	1	110
f(X)	-6	-8	0	0	0

que pode agora ser apresentado matricialmente do seguinte modo:

VB	$X_a^T = [x_1 \ x_2]$	$X_i^T = [F_1 \ F_2]$	VSM
$X_i = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$	A	I	B
f(X)	$-C_a$	$-C_i$	0

Retomando a forma-padrão podemos escrevê-la:

$$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix}$$

Para obter soluções básicas do sistema de equações é necessária usar “Bases” que constituam matrizes quadradas para que seja possível a sua inversão.

Havendo duas restrições técnicas ($m=2$) a base será uma matriz “ A_m ” associada a um vector “ X_m ”.

Assim, por exemplo, se pretendemos a solução do sistema de equações em ordem às variáveis x_2 e F_1 , tal

exige considerar nulas as restantes variáveis o que conduz a resolver
$$\begin{cases} 20x_2 + F_1 = 300 \\ 10x_2 = 110 \end{cases}$$

Para esta base, em que as VB são x_2 e F_1 , há:

- a matriz da base que designaremos por $A_m = \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$
- o vector das VB que designaremos $X_m = \begin{bmatrix} x_2 \\ F_1 \end{bmatrix}$
- o vector dos segundos membros $B = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix}$

Veja-se agora o sistema de equações e a sua representação matricial:

$\begin{cases} 20x_2 + F_1 = 300 \\ 10x_2 = 110 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A_m X_m = B$
--	--

A solução para esta base é:

$$X_m = A_m^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ F_1 \end{bmatrix}$$

O valor de $f(X)$ para esta solução é:

$$f(X) = 8x_2 + 0F_1 = 8(11) + 0(80) = 88$$

que pode obter-se matricialmente considerando a matriz dos coeficientes das VB que designaremos por $C_m = [8 \ 0]$.

A função objectivo tem então o valor $f(X) = C_m X_m = 88$:

$f(X) = 8x_2 + 0F_1$	$f(X) = [8 \ 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ F_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow f(X) = C_m X_m$
----------------------	--

Em resumo:

Seleccionada uma base para solução do modelo, esta pode obter-se matricialmente considerando:

$A_m X_m = B$	$f(X) = C_m X_m$
---------------	------------------

São estas duas relações matriciais que permitem deduzir a Versão Matricial do Simplex.

2. Dedução da Versão Matricial do Simplex

As relações anteriores:

$$\boxed{A_m X_m = B \quad f(X) = C_m X_m}$$

podem ser apresentadas matricialmente do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} 0 & A_m \\ 1 & -C_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_m \\ 1 & -C_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

A matriz inversa $\begin{bmatrix} 0 & A_m \\ 1 & -C_m \end{bmatrix}^{-1}$ é igual a : $\begin{bmatrix} C_m A_m^{-1} & 1 \\ A_m^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$

Substituindo em (2) temos:

$$\begin{bmatrix} f \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m A_m^{-1} & 1 \\ A_m^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m A_m^{-1} B \\ A_m^{-1} B \end{bmatrix}$$

Do antecedente escreveu-se a forma-padrão do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} 0 & A & I \\ 1 & -C_a & -C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ X_a \\ X_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Multiplicando os 2 membros da relação anterior (1) pela matriz (3) tem-se:

$$\begin{bmatrix} C_m A_m^{-1} & 1 \\ A_m^{-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & A & I \\ 1 & -C_a & -C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ X_a \\ X_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m A_m^{-1} & 1 \\ A_m^{-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando os produtos matriciais a relação anterior fica:

$$\begin{bmatrix} f + X_a (C_m A_m^{-1} A - C_a) + X_i (C_m A_m^{-1} - C_i) = C_m A_m^{-1} B \\ X_a (A_m^{-1} A) + X_i (A_m^{-1}) = A_m^{-1} B \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde podemos ver o quadro Simplex na Versão Matricial.

Conclusão : partindo de uma base inicial que forma uma matriz Identidade

VB	X_a^T	X_i^T	VSM
X_i	A	I	B
f(X)	$-C_a$	$-C_i$	0

a versão matricial do Simplex, lida em (4), é a seguinte:

VB	X_a^T	X_i^T	VSM
X_m	$A_m^{-1} A$	A_m^{-1}	$A_m^{-1} B$
f(X)	$C_m A_m^{-1} A - C_a$	$C_m A_m^{-1} - C_i$	$C_m A_m^{-1} B$

onde:

- a solução básica é $X_m = A_m^{-1} B$
- o valor da função é $f(X) = C_m A_m^{-1} B$
- os coeficientes correntes das variáveis decisionais formam a matriz $A_m^{-1} A$
- a matriz inversa da base, que é A_m^{-1} , encontra-se nas colunas das VB da base inicial
- a matriz de coeficientes na equação corrente da função, nas colunas das variáveis decisionais, é igual a $C_m A_m^{-1} A - C_a$
- na equação corrente da função, nas colunas das VB da base inicial, a matriz de coeficientes é igual a $C_m A_m^{-1} - C_i$

O quadro Simplex, na versão matricial, é de muito interesse para efectuar:

Interpretação Económica

Pós-optimização

Análise de Sensibilidade

Nota: A correcta identificação das colunas onde se encontra a matriz A_m^{-1} é fundamental. **Tenha-se em atenção** que essas colunas são as das VB do Quadro Inicial (Variáveis de Folga ou Variáveis Artificiais ou dos dois tipos).

A matriz “C_i” (coeficientes das variáveis auxiliares na função objectivo) é sempre nula pelo que se pode considerar que $C_m A_m^{-1} - C_i = C_m A_m^{-1}$.

3. Exemplo de Aplicação da Versão Matricial do Método do Simplex

Uma fábrica de produtos químicos tem que satisfazer uma encomenda de 1000 kg de uma mistura de três produtos (A, B e C).

Na mistura (1000 kg) devem verificar-se as seguintes especificações:

- não ultrapassar 300 kg do produto A
- ter pelo menos 150 kg do produto B
- ter pelo menos 200 kg do produto C

Os custos unitários de aquisição dos produtos são:

- produto A : 5 u.m. / kg
- produto B : 6 u.m. / kg
- produto C : 7 u.m. / kg

O modelo de PL para minimizar o custo de produção da mistura é o seguinte:

$$\text{Min } f(X) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \quad (\text{restrição técnica nº 1})$$

$$x_1 \leq 300 \quad (\text{restrição técnica nº 2})$$

$$x_2 \geq 150 \quad (\text{restrição técnica nº 3})$$

$$x_3 \geq 200 \quad (\text{restrição técnica nº 4})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

em que x_1 , x_2 e x_3 representam, na mistura, a quantidade (kg) dos produtos A, B e C respectivamente.

Construa-se o quadro Simplex com as VB x_1 , x_2 , x_3 e E_3 (base que se sabe ser admissível).

a. Registrar as VB, Matriz Identidade associada à base e Coeficientes nulos em $f(X)$ para as VB

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_1	1	0	0	0						
x_2	0	1	0	0						
x_3	0	0	1	0						
E_3	0	0	0	1						
$f(X)$	0	0	0	0						

- A_1 , A_3 e A_4 são variáveis artificiais associadas às restrições técnicas 1, 3 e 4 respectivamente.
- F_2 , E_3 e E_4 são variáveis auxiliares associadas às restrições técnicas 2, 3 e 4 respectivamente.

Nota: as colunas das variáveis excedentárias foram colocadas entre as das variáveis de decisão e as variáveis básicas do quadro inicial (variáveis de folga e artificiais). Deste modo reduz-se a possibilidade de erro na identificação das colunas onde se encontra a matriz inversa da base.

b. Calcular produtos matriciais e registá-los no quadro Simplex

- Matriz da Base “ A_m ” (é uma matriz quadrada de ordem “ m ”)

É constituída pelos vectores das VB x_1 , x_2 , x_3 e E_3 (coeficientes destas variáveis nas equações da forma-padrão):

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz A_m^{-1} (inversa da matriz “ A_m ”)

$$A_m^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

O quadro Simplex actualizado fica:

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_1	1	0	0	0		0	1	0	0	
x_2	0	1	0	0		1	-1	0	-1	
x_3	0	0	1	0		0	0	0	1	
E_3	0	0	0	1		1	-1	-1	-1	
$f(X)$	0	0	0	0						

- Produto Matricial $A_m^{-1}A$

A matriz “ A ” é a matriz tecnológica (coeficientes das V.Decisão no modelo):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O produto matricial $A_m^{-1}A$ é:

$$A_m^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(já foi registado no quadro porque as Variáveis de Decisão são VB)

- Produto Matricial $A_m^{-1}B$

A matriz “B” é a matriz dos segundos membros das restrições técnicas $B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 300 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix}$

O produto matricial $A_m^{-1}B(\text{solução})$ é:

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000 \\ 300 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 500 \\ 200 \\ 350 \end{bmatrix}$$

O quadro Simplex actualizado fica:

$C_a = [\quad 5 \quad \quad 6 \quad \quad 7 \quad]$

$C_m^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_1	1	0	0	0		0	1	0	0	300
x_2	0	1	0	0		1	-1	0	-1	500
x_3	0	0	1	0		0	0	0	1	200
E_3	0	0	0	1		1	-1	-1	-1	350
f(X)	0	0	0	0						

- Produto Matricial $C_m A_m^{-1}A - C_a$

A matriz “ C_m ” é a matriz dos coeficientes em f(X) das VB (ver orla esquerda do quadro):

$$C_m = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 0]$$

A matriz “ C_a ” é a matriz dos coeficientes em f(X) das Variáveis de decisão (ver orla superior do quadro):

$$C_a = [5 \quad 6 \quad 7]$$

O produto matricial $A_m^{-1}A$ já está “calculado”

Finalmente $C_m A_m^{-1}A - C_a$ é:

$$C_m A_m^{-1}A - C_a = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - [5 \quad 6 \quad 7] = [0 \quad 0 \quad 0]$$

(já foi registado no quadro porque as Variáveis de Decisão são VB)

- Produto Matricial $C_m A_m^{-1} - C_i$

A matriz “C_m” é a matriz dos coeficientes em f(X) das VB:

$$C_m = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 0]$$

A matriz inversa A_m^{-1} já está calculada

A matriz “C_i” é a matriz dos coeficientes em f(X) das Variáveis Auxiliares da 1ª Base (é sempre nula)

$$C_i = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Finalmente $C_m A_m^{-1} - C_i$ é:

$$C_m A_m^{-1} = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [6 \quad -1 \quad 0 \quad 1]$$

O quadro Simplex actualizado fica:

VB	x ₁	x ₂	x ₃	E ₃	E ₄	A ₁	F ₂	A ₃	A ₄	VSM
x ₁	1	0	0	0		0	1	0	0	300
x ₂	0	1	0	0		1	-1	0	-1	500
x ₃	0	0	1	0		0	0	0	1	200
E ₃	0	0	0	1		1	-1	-1	-1	350
f(X)	0	0	0	0		6	-1	0	1	

- Produto Matricial $C_m A_m^{-1} B$

$$C_m A_m^{-1} B = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 500 \\ 200 \\ 350 \end{bmatrix} = 5900$$

O quadro Simplex actualizado fica:

VB	x ₁	x ₂	x ₃	E ₃	E ₄	A ₁	F ₂	A ₃	A ₄	VSM
x ₁	1	0	0	0		0	1	0	0	300
x ₂	0	1	0	0		1	-1	0	-1	500
x ₃	0	0	1	0		0	0	0	1	200
E ₃	0	0	0	1		1	-1	-1	-1	350
f(X)	0	0	0	0		6	-1	0	1	5900

c. Colunas das variáveis excedentárias nas bases admissíveis

São sempre simétricas das colunas das variáveis artificiais associadas.

O quadro Simplex está calculado para a base proposta.

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	300
x_2	0	1	0	0	1	1	-1	0	-1	500
x_3	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	200
E_3	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	350
f(X)	0	0	0	0	-1	6	-1	0	1	5900

d. Outra técnica para calcular os coeficientes de f(X)

O cálculo dos coeficientes correntes da equação de f(X) e o valor da função pode ser efectuado directamente no quadro debruado com a matriz-linha C_a e a matriz-linha transposta de C_m :

$$C_a = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C_m^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	300
x_2	0	1	0	0	1	1	-1	0	-1	500
x_3	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	200
E_3	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	350
f(X)										

Cálculo dos coeficientes de f(X) e respectivo valor:

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
	+ 5(1)	+ 5(0)	+ 5(0)			+ 5(0)	+ 5(1)	+ 5(0)	+ 5(0)	+ 5(300)
	+ 6(0)	+ 6(1)	+ 6(0)			+ 6(1)	+ 6(-1)	+ 6(0)	+ 6(-1)	+ 6(500)
	+ 7(0)	+ 7(0)	+ 7(1)			+ 7(0)	+ 7(0)	+ 7(0)	+ 7(1)	+ 7(200)
	+ 0(0)	+ 0(0)	+ 0(0)			+ 0(1)	+ 0(-1)	+ 0(-1)	+ 0(-1)	+ 0(350)
	- 5	- 6	- 7							
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
f(X)	0	0	0	0	-1	6	-1	0	1	5900

4. Auto Teste

Para o modelo anterior calcular, via matricial, o quadro Simplex em que as variáveis básicas são x_2, x_3, F_2 e E_4 .

5. Solução do Auto Teste

a. Quadro Simplex a calcular ; Matrizes a calcular

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_2	$A_m^{-1}A$					A_m^{-1}				$A_m^{-1}B$
x_3										
F_2										
E_4										
f(X)	$C_m A_m^{-1} A - C_a$					$C_m A_m^{-1} - C_i$				$C_m A_m^{-1} B$

b. Calcular a Matriz Inversa da Base A_m^{-1}

A matriz da base é A_m com 4 vectores correspondentes aos coeficientes das VB no sistema de equações da forma-padrão do Simplex.

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa é $A_m^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ que se regista no quadro

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_2						0	0	1	0	
x_3						1	0	-1	0	
F_2						0	1	0	0	
E_4						1	0	-1	-1	
f(X)										

c. Calcular a Matriz $A_m^{-1}A$

Sendo "A" a matriz técnica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $A_m^{-1}A$ é:

$$A_m^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ que se regista no quadro:}$$

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_2	0	1	0			0	0	1	0	
x_3	1	0	1			1	0	-1	0	
F_2	1	0	0			0	1	0	0	
E_4	1	0	0			1	0	-1	-1	
f(X)										

d. Calcular a Matriz $A_m^{-1}B$

Sendo "B" o vector dos segundos membros:

$$B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 300 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix}$$

a matriz $A_m^{-1}B$ é:

$$A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000 \\ 300 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 850 \\ 300 \\ 650 \end{bmatrix} \text{ que se regista no quadro:}$$

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_2	0	1	0			0	0	1	0	150
x_3	1	0	1			1	0	-1	0	850
F_2	1	0	0			0	1	0	0	300
E_4	1	0	0			1	0	-1	-1	650
f(X)										

e. Calcular os coeficientes das variáveis em $f(X)$ e o valor da função para esta solução básica

Orlando o quadro com as matrizes C_a e a transposta de C_m calculam-se os valores pretendidos:

$$C_m^T = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_a = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_2	0	1	0			0	0	1	0	150
x_3	1	0	1			1	0	-1	0	850
F_2	1	0	0			0	1	0	0	300
E_4	1	0	0			1	0	-1	-1	650
$f(X)$	2	0	0			7	0	-1	0	6850

f. Completar o quadro (simetria nas colunas de E_3 e E_4 com as das variáveis A_3 e A_4)

VB	x_1	x_2	x_3	E_3	E_4	A_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_2	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	150
x_3	1	0	1	1	0	1	0	-1	0	850
F_2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	300
E_4	1	0	0	1	1	1	0	-1	-1	650
$f(X)$	2	0	0	1	0	7	0	-1	0	6850