V. MÉTODO DO SIMPLEX

1. Introdução

No capítulo III foram apresentadas as bases teóricas do método do Simplex sendo de interesse recordar o seguinte:

- a solução óptima do PPL (quando existe) é atingida pelo menos num dos extremos do convexo de soluções;
- a mudança de um extremo do convexo para outro extremo adjacente é feita pela substituição de uma VB por uma das VNB;
- a selecção da VNB para entrada em nova base é feita atendendo ao seu coeficiente corrente na equação da função objectivo;
- a VB que sai da base é aquela que está *associada ao valor mínimo das "ratios"* designadas por "θ_i" (i = 1 a m);

2. Soluções do sistema de equações da forma-padrão. A mudança de base

Considere-se o seguinte modelo de PL:

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{sujeito a: } \begin{array}{rcrcr} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1 , x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Na forma-padrão do Simplex tem-se:

$$f(X) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2$$

$$\text{sujeito a: } \begin{array}{rcrcrcrcr} 30x_1 & + & 20x_2 & + & F_1 & & & = & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & & & + & F_2 & = & 110 \end{array}$$

$$x_1 , x_2 , F_1 , F_2 \geq 0$$

Analisando o sistema de equações no quadro seguinte:

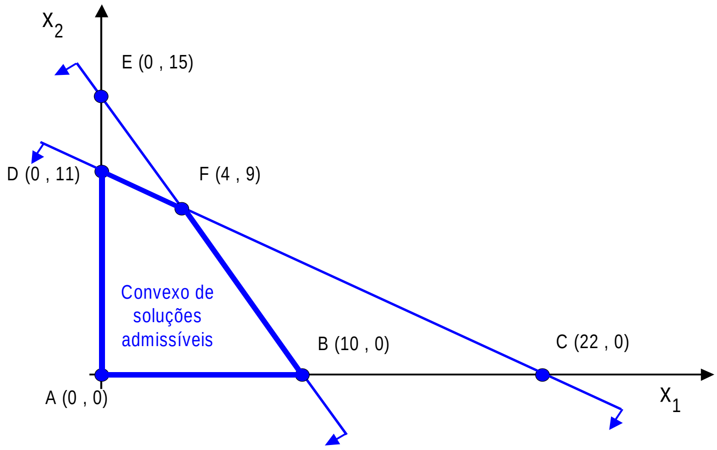
x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente
30	20	1	0	300
5	10	0	1	110

conclui-se que:

- o sistema é possível tendo, no máximo, $C_m^n = C_2^4 = 6$ soluções básicas admissíveis;
- o sistema é Indeterminado de ordem 2 ou seja as soluções básicas têm 2 variáveis básicas (VB) e 2 variáveis não básicas (VNB);
- cada uma destas soluções tem quatro coordenadas das quais, no mínimo, duas são nulas (valores das VNB).

Na figura apresentam-se as 6 soluções básicas do sistema de equações. As soluções nos pontos A, B, D e F são admissíveis e pelo menos uma delas é a solução óptima.

As soluções nos pontos C e E não são admissíveis por serem exteriores ao espaço de soluções do modelo.



Por exemplo, a solução básica no ponto “F” é $x_1 = 4$, $x_2 = 9$ e, obviamente com $F_1 = F_2 = 0$ resultando do sistema de equações:

$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 = 300 \\ 6x_1 + 8x_2 = 110 \\ F_1 = F_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 9 \\ F_1 = F_2 = 0 \end{cases}$$

em que as variáveis básica são x_1 e x_2.

O mesmo resultado pode obter-se com a versão matricial do sistema de equações sabendo que a matriz da base tem dimensão “2x2”. Organizando a matriz com os vectores de x_1 e de x_2 e anulando os vectores das variáveis F_1 e F_2 tem-se:

$$\begin{bmatrix} \vec{P_1} & \vec{P_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Veja-se agora que a solução básica no ponto “A” é $F_1 = 300$, $F_2 = 110$ pois que $x_1 = x_2 = 0$:

O sistema de equações é:

$$\begin{cases} F_1 + 0F_2 = 300 \\ 0F_1 + F_2 = 110 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = 300 \\ F_2 = 110 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

em que as variáveis básica são F_1 e F_2.

Organizando a matriz da base com os vectores de F_1 e de F_2 (consideram-se nulos os escalares x_1 e x_2):

$$\begin{bmatrix} \vec{P_{F1}} & \vec{P_{F2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix}$$

Conclua-se que, matricialmente, esta segunda solução é mais fácil de calcular pois a matriz da "base" é a matriz Identidade o que permite ler directamente a solução (valor dos segundos membros).

Esta é a técnica usada no método Simplex. Se a compreender bem então será fácil aplicar o método Simplex de forma racional.

Retomando o quadro anteriormente elaborado:

x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente
30	20	1	0	300
5	10	0	1	110

comecemos pela pergunta trivial…

<u>Qual o par de variáveis básicas (VB) a seleccionar para obter a primeira solução ?</u>

Observando o quadro é evidente que o par de VB (F_1 , F_2) é aquele para o qual a solução é imediata:

$$F_1 = 300 \; ; \; F_2 = 110$$

A "facilidade" com que se obtém esta primeira solução resulta de os Vectores Básicos constituírem uma <u>Matriz Identidade</u> pelo que:

Se um modelo de PL tem <u>apenas</u> restrições do tipo "≤ " a primeira base de solução deverá ser organizada com os <u>vectores das variáveis de folga</u>

Mudar de base implica substituir uma VB por uma VNB. Para beneficiar da "facilidade" referida, o cálculo da <u>nova base</u> deve ser efectuado de modo a que o <u>conjunto dos vectores das VB constitua uma Matriz Identidade</u>

No quadro do sistema apresentado, acrescente-se "à esquerda" uma coluna para registo das variáveis básicas da solução corrente e assinalem-se os seus coeficientes unitários em cada uma das equações:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente (solução)
F_1	30	20	1	0	300
F_2	5	10	0	1	110

No quadro assim organizado o valor das VB é obtido por simples leitura dos valores inscritos na última coluna (termo independente): $F_1 = 300$; $F_2 = 110$:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente (solução)
F_1			1	0	300
F_2			0	1	110

Ensaiemos a mudança da base admitindo a entrada da variável x_2 por troca com a variável F_2.

Será necessário calcular uma nova solução básica em que as VB serão x_2 e F_1.

O sistema de equações a resolver pelo Simplex é o seguinte:

$$\begin{cases} 30x_2 + F_1 = 300 \\ 10x_2 = 110 \\ x_1 = F_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = 80 \\ x_2 = 11 \\ x_1 = F_2 = 0 \end{cases}$$

A resolução por via matricial é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \vec{P}_{x2} & \vec{P}_{F1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Repare que agora não faz leitura directa da solução nos segundos membros pois terá que ser calculada a matriz inversa da base…

Veja, de seguida, a simplicidade com que o método Simplex lhe permite ultrapassar esta "dificuldade" recorrendo a transformações lineares que podendo ser tipificadas, permitem estabelecer regras de cálculo a efectuar sempre do mesmo modo (algoritmo).

Mais tarde aprenderá que, de facto, as transformações lineares que o método aplica não são mais do que as necessárias à inversão da matriz da base.

Continuando…

A mudança de base que se pretende efectuar é a seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente (solução)
F_1	30	20	1	0	300
F_2	5	10	0	1	110
F_1		0	1		
x_2		1	0		

Sendo $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ o vector dos coeficientes de F_1, é necessário que o vector de x_2 que é $\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$ passe a ser $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ para que a matriz da base seja uma Matriz Identidade.

Tal implica:

- que a 2ª coordenada do vector de x_2 que é "10" passe a ser "1" o que obriga a dividir por "10" as segundas coordenadas dos vectores das 4 variáveis)
- que a 1ª coordenada do vector de x_2 que é "20" passe a ser "0"

Começa-se por dividir por "10" a 2ª equação (onde F_2 é VB que vai sair da base) ficando:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente	Obs.
x_2	5/10 = $^1/_2$	10/10 = 1	0/10= 0	1/10= 1/10	110/10 = 11	"Nova" 2ª equação (Pivot)

Para anular o coeficiente de x_2 na 1ª equação é necessário multiplicar por "-20" esta equação "Pivot" (onde x_2 já tem coeficiente unitário) e adicioná-la à 1ª equação do quadro anterior.

Multiplicando por "-20" esta equação "pivot" da transformação linear obtém-se:

	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente
x_2	-20(1/2)= -10	-20(1)= -20	-20(0) = 0	-20(1/10)= -2	-20(11)= -220

que adicionada à 1ª equação que é:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente
F_1	30	20	1	0	300

permite obter a "nova" 1ª equação com coeficiente nulo para x_2 :

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente
F_1	20	0	1	-2	80

O novo quadro com o sistema equivalente[1] ao anterior é o seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente
F_1	20	0	1	-2	80
x_2	$^1/_2$	1	0	$^1/_{10}$	11

Agora por <u>leitura directa</u> obtém-se a nova solução básica $F_1 = 80$; $x_2 = 11$.

> O algoritmo do Simplex aplica este método para efectuar o cálculo do sistema de equações para as sucessivas bases até atingir a solução óptima.

Pode agora ver, no quadro anterior, onde está a matriz inversa da base.

No 1º quadro a solução foi obtida para as variáveis F_1 e F_2 pois os seus vectores constituíam uma matriz Identidade. Para cada nova base que organizar a matriz inversa da base está nas colunas de F_1 e F_2.

[1] Sistemas equivalentes têm as mesmas soluções.

Neste caso temos $\begin{bmatrix} F_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 11 \end{bmatrix}$

Vejamos "passo a passo" como efectuar a mudança de base apresentada recorrendo aos quadros típicos do método do Simplex:

1º Passo: Preparação

- na coluna "VB" registar a nova VB (x_2) (neste manual a nova VB fica sempre na 1ª linha)
- na coluna de x_2 registar o seu vector para a matriz Identidade
- na coluna "VB" ligar a variável que sai da base (F_2) à nova VB (x_2) (ficando identificada a equação a dividir por 10)
- registar as restantes variáveis básicas (F_1)

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente	Obs.
F_1	30	20	1	0	300	Quadro da
F_2	5	10	0	1	110	Base Inicial
x_2		1				Quadro para a
F_1		0				Nova Base

2º Passo: Cálculo da equação onde a nova VB (x_2) deve ter coeficiente igual a "1"

Dividir a equação da variável que sai da base (F_2) por "10" e registar na linha de x_2:

Dividir por 10

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente	
F_1	30	20	1	0	300	
F_2	5	10	0	1	110	
x_2	1/2	1	0	1/10	11	Equação "Pivot"
F_1		0				

3º Passo: Cálculo da ou das equações onde a nova VB x_2 deve ter coeficiente igual a "0"

- Multiplicar a equação "Pivot" por "-20" (simétrico do coeficiente de x_2 na equação a transformar) e adicionar a esta o produto obtido:

x_2	1/2	1	0	1/10	11	Equação "Pivot"
Pivot multiplicada por -20	-10	- 20	0	- 2	- 220	

- Somar este resultado à "antiga" equação onde x_2 tem coeficiente "20":

Pivot Multiplicada por -20	-10	- 20	0	- 2	- 220
Equação "Antiga"	30	20	1	0	300
Soma das duas equações	20	0	1	- 2	80

- registar a "nova" equação resultante da soma na linha da VB F_1:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente	
F_1	30	20	1	0	300	
F_2	5	10	0	1	110	
x_2	1/2	1	0	1/10	11	Equação "Pivot"
F_1	$(-20)(^1/_2)$ + 30		$(-20)(0)$ + 1	$(-20)(^1/_{10})$ + 0	$(-20)(11)$ + 300	
	20	0	1	-2	80	

Por leitura directa tem-se a <u>nova solução</u> para as VB x_2 e F_1 :

VB : $x_2 = 11$; $F_1 = 80$

VNB : $x_1 = x_4 = 0$

3. Auto Teste

(Executar os exercícios seguintes; não continuar enquanto não “dominar” a técnica de cálculo)

a. No quadro seguinte identificar as variáveis básicas e registá-las na coluna “VB”

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM
	3	1	0	0	1	8
	1/ 4	1/ 4	1	0	0	3/ 2
	1/ 4	1/ 4	0	1	0	3/ 2

b. Escrever o vector solução associado à base do quadro anterior

c. Mudar de base trocando a variável básica F_3 pela variável x_1 (preencher o quadro seguinte)

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM
x_1	1					
	0					
	0					

d. Preencher os quadros seguintes efectuando as mudanças de base indicadas:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM	Observações
F_1	1	3	2	1	0	0	32	Sai da base: F_2
F_2	4	1	3	0	1	0	40	Entra para a base: x_1
F_3	1	1	1	0	0	1	12	
								Entra para a base: x_2
								Sai da base: F_3

4. Solução do Auto Teste

a. Em cada uma das equações do sistema há uma variável com coeficiente unitário e com coeficiente nulo nas restantes equações (o conjunto é uma matriz Identidade).

Escolhem-se para VB F_3 , F_1 e F_2 por esta ordem.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM
F_3			0	0	1	8
F_1			1	0	0	3/ 2
F_2			0	1	0	3/ 2

b. O sistema de equações tem 5 variáveis das quais três estão na base e duas estão fora da base (são nulas).

No quadro faz-se a leitura directa do valor das variáveis básicas $F_3 = 8$, $F_1 = 3/2$ e $F_2 = 3/2$.

O vector X (solução) é portanto:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

c. Assinalar o vector de x_1 a transformar linearmente. Ligar a VB que sai da base à nova VB:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM
F_3	3	1	0	0	1	8
F_1	1/ 4	1/ 4	1	0	0	3/ 2
F_2	1/ 4	1/ 4	0	1	0	3/ 2

Registar, na nova base, o vector de x_1 (para a matriz Identidade):

x_1	1	
F_1	0	
F_2	0	

Notar que se pretende que o vector dos coeficientes de x_1 passe a ser $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Calcular a equação "Pivot" (dividir por "3" a equação da VB F_3 que sai da base):

x_1	1	1/3	0	0	1/3	8/3
F_1	0					
F_2	0					

Calcular a "nova" equação onde F_1 é VB multiplicando a "Pivot" por "-1/4" e somando o resultado à "antiga" equação de F_1:

x_1	1	1/3	0	0	1/3	8/3
F_1	0	1/6	1	0	-1/12	5/6
F_2	0					

Calcular a "nova" equação onde F_2 é VB multiplicando a "Pivot" por "-1/4" e somando o resultado à "antiga" equação de F_2:

x_1	1	1/3	0	0	1/3	8/3
F_1	0	1/6	1	0	-1/12	5/6
F_2	0	1/6	0	1	-1/12	5/6

A nova solução básica admissível é:

VB : $x_1 = 8/3$; $F_1 = 5/6$; $F_2 = 5/6$

VNB : $x_2 = F_3 = 0$

d.

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM	Observações
F_1	1	3	2	1	0	0	32	Sai da base: F_2
F_2	4	1	3	0	1	0	40	Entra para a base: x_1
F_3	1	1	1	0	0	1	12	
x_1	1	1/ 4	3/ 4	0	1/ 4	0	10	Entra para a base: x_2
F_1	0	11/ 4	5/ 4	1	- 1/ 4	0	22	Sai da base: F_3
F_3	0	3/ 4	1/ 4	0	- 1/ 4	1	2	
x_2	0	1	1/ 3	0	- 1/ 3	4/ 3	8/ 3	
x_1	1	0	2/ 3	0	1/ 3	- 1/ 3	28/ 3	
F_1	0	0	1/ 3	1	2/ 3	- 11/ 3	44/ 3	

5. Método do Simplex (maximização da função objectivo)

Considere-se o seguinte modelo de PL:

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcr} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1 , x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Na forma-padrão do Simplex tem-se:

$$f(X) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2$$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} 30x_1 & + & 20x_2 & + & F_1 & & & = & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & & & + & F_2 & = & 110 \end{array}$$

$$x_1 , x_2 , F_1 , F_2 \geq 0$$

O quadro Simplex associado à forma-padrão é o seguinte:

Variáveis de decisão

Variáveis auxiliares

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	30	20	1	0	300
F_2	5	10	0	1	110
f	-6	-8	0	0	0

Variáveis básicas

Termos independentes

Primeiros membros das equações técnicas

Equação da função

No quadro existem as **seguintes 9 zonas**:

- superior esquerda onde se escreve "VB" para identificar a coluna das variáveis básicas em ordem às quais se resolve o sistema de equações técnicas;
- superior central onde se registam as variáveis do modelo, da forma-padrão, para identificar as colunas de registo dos seus coeficientes (técnicos e da função-objectivo);
- superior direita onde se escreve "VSM" (Valor do Segundo Membro) para identificar a *"solução";*
- média esquerda onde se *registam* as variáveis básicas na linha da equação onde têm coeficiente unitário;
- média central onde se *registam* os coeficientes das variáveis nas equações técnicas;
- média direita onde se *registam* os termos independentes das equações técnicas;

- inferior esquerda onde se escreve "f" ou "f(X)" identificando a linha de registo da equação da função;
- inferior central onde se *registam* os coeficientes simétricos das variáveis na equação da função (para que no 2º membro fique apenas o valor da função);
- inferior direita onde se *regista* o valor da função para a solução básica corrente.

Importante: $f(X) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2$ *é registada na forma* $f(X) - 6x_1 - 8x_2 - 0F_1 - 0F_2 = 0$

Para calcular a primeira solução escolheu-se o par de variáveis básicas F_1 e F_2 porque os vectores dos seus coeficientes nas equações técnicas constituem uma Matriz Identidade.

A solução corrente (1ª solução) obtém-se por leitura directa:

- variáveis básicas : $F_1 = 300$; $F_2 = 110$;
- variáveis não básicas: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$;
- valor da função $f(X) = 0$

A simplicidade da leitura da solução é consequência de:

- a matriz da base ser uma Matriz Identidade
- as VB terem coeficiente nulo na equação da função

Face a esta solução é necessário verificar se o óptimo já foi ou não atingido e neste último caso proceder à mudança de base.

a. Estudo da Optimalidade da solução básica corrente / Selecção da nova VB

No quadro tem-se a equação da função na forma "$f(X) - 6x_1 - 8x_2 - 0F_1 - 0F_2 = 0$" o que corresponde a $f(X) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2$.

Se nesta equação for simulado que:

- a variável não básica x_1 passa do valor actual "0" para "1" (variação marginal) o valor da função aumenta 6 unidades (se a função aumenta então ainda não atingiu o máximo...)
- a variável não básica x_2 passa do valor actual "0" para "1" (variação marginal) o valor da função aumenta 8 unidades (se a função aumenta então ainda não atingiu o máximo...)

Como se concluiu que a função ainda não atingiu o máximo então:

$\Rightarrow$ a solução corrente não é óptima pois o valor da função é passível de aumento;

$\Rightarrow$ o aumento do valor da função pode obter-se com a **entrada para a base de** x_1 **ou** x_2 (variáveis não básicas *seleccionáveis* para a base);

$\Rightarrow$ a entrada para a base da variável x_2 é aquela a que está associado o maior incremento no valor da função pelo que *deve ser escolhida para entrada na base* (nova VB);

Estas conclusões conduzem à seguinte regra geral do método do Simplex:

Maximização de f(X) Critério de Optimalidade e Escolha da Nova VB
"Se na equação da função (quadro Simplex) há variáveis com coeficiente negativo então a solução corrente não maximiza f(X((não é óptima). *A variável que, na linha de f(X), tem coeficiente negativo com maior valor absoluto deve ser seleccionada para entrada na nova base.* *Se houver empate decide-se arbitrariamente ".*
"Se na equação da função (quadro Simplex) todas as variáveis da forma padrão têm coeficiente não negativo (≥ 0) então a solução corrente é óptima"

Examinando o quadro Inicial :

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	30	20	1	0	300
F_2	5	10	0	1	110
f(X)	-6	-8	0	0	0

Coeficiente negativo com maior valor absoluto
Função aumenta à taxa 8 em ordem a x_2
Escolher x_2 para a nova base.

- a solução corrente não é óptima porque existem, na equação da função, coeficientes negativos;
- deve entrar para a base a variável x_2 por ser a que apresenta, na equação da função, o coeficiente negativo com maior valor absoluto ;

Nota: *Analise-se, em paralelo, o exemplo de aplicação do capítulo III.* Veja-se que para um vector não básico P_s o valor de $C_m\alpha - c_s$ não é mais do que o coeficiente corrente de x_s na equação da função no quadro do Simplex.

b. Escolha da VB que deve sair da base corrente

Dispõe-se do quadro do Simplex:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	30	20	1	0	300
F_2	5	10	0	1	110
f(X)	-6	- 8	0	0	0

e está decidido que x_2 é a nova VB. Nestas circunstâncias a variável x_1 mantém-se fora da base pelo que continuará a ter valor nulo.

Assim sendo a situação a analisar é a seguinte (extracto do quadro):

$$\begin{cases} 20x_2 + 1F_1 = 300 \\ 10x_2 + 1F_2 = 110 \end{cases}$$

A entrada de x_2 para a base deve ser feita por troca com F_1 ou F_2 ?

Na 1ª equação para anular F_1 é necessário $x_2 = 300/20 = 15$.

Na 2ª equação para anular F_2 é necessário $x_2 = 110/10 = 11$.

Para $x_2 = 15$ sai F_1 da base; para $x_2 = 11$ sai F_2 da base.

Como decidir ?

A mudança de base implica manter a admissibilidade da nova solução (todas as variáveis do sistema com valores não negativos).

Se substituirmos $x_2 = 15$ no sistema de equações, fica $F_1 = 0$ mas fica F_2 com valor negativo que não é admissível. Veja-se que em $10x_2 + F_2 = 110$ se $x_2= 15$ implica $F_2 = -40$!

Conclui-se que não pode efectuar-se a mudança de base, entrando x_2 e saindo F_1:

$$\begin{cases} 20(15) + 1(0) = 300 \\ 10(15) + 1(-40) = 110 \end{cases}$$

Se substituirmos $x_2 = 11$ no sistema de equações, fica $F_2 = 0$ mas fica $F_1 = 80$ o que é admissível.

Efectua-se portanto a mudança de base, entrando x_2 e saindo F_2:

$$\begin{cases} 20(11) \quad +1(80) \quad\quad\quad = 300 \\ 10(11) \quad\quad\quad + 1(0) \quad = 110 \end{cases}$$

Repetindo a análise de outro modo estabeleçam-se em cada equação os quocientes:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	"Ratio"
F_1		20			300	300/20 = 15
F_2		10			110	110/10 = 11
f(X)		-8				

Estes quocientes ("ratios") representam (como foi dito) os valores possíveis para a variável x_2 quando se anulam as variáveis F_1 ou F_2 respectivamente.

Na 1ª solução do exemplo de aplicação do capítulo anterior o estudo do vector não básico P_2 conduziu a

$$\theta = Min\left\{\frac{x_3}{\alpha_3}, \frac{x_4}{\alpha_4} \wedge \alpha_3, \alpha_4 > 0\right\} = \left\{\frac{300}{20}, \frac{110}{10}\right\} = 11 = x_2 .$$

Comparando resultados vê-se que os quocientes agora calculados não são mais do que outro modo de calcular o valor de "$\theta_{\min} = 11$".

Importa agora "agilizar" este conhecimento para fixar como proceder no quadro do Simplex estabelecendo a <u>Regra Para Seleccionar A Variável que Deve Sair da Base</u>:

Escolha da Variável que Sai da Base (Nova VNB)
"*Dividem-se os termos independentes das equações técnicas pelas componentes <u>não negativas</u> do vector da variável seleccionada para VB.* *Sai da base a VB associada à equação onde se obtém o menor dos quocientes (que é seguramente não negativo pois é o valor da nova VB).* *<u>Em caso de "empate" a decisão é arbitrária</u>".*

Retomando o quadro corrente onde se assinalaram os coeficientes da nova VB x_2 tem-se:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	"Ratio"
F_1		20			300	300/20 = 15
F_2		10			110	110/10 = 11 (mínimo não negativo)
f(X)		-8				Sai F_2

Identificada a "troca" de variáveis que é necessário efectuar calcula-se a nova solução aplicando a técnica da transformação linear já apresentada.

É contudo necessário manter as VB com coeficiente nulo na equação da função objectivo para que o valor corrente desta possa ser lido directamente na coluna-solução.

No quadro seguinte apresenta-se o resultado do cálculo da mudança de base:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	"Ratio"
F_1	30	20	1	0	300	$^{300}/_{20} = 15$
F_2	5	10	0	1	110	$^{110}/_{10} = 11$
f	-6	-8	0	0	0	
x_2	$^{5}/_{10} = {^1}/_{2}$	$^{10}/_{10} = 1$	$^{0}/_{10} = 0$	$^{1}/_{10} = {^1}/_{10}$	$^{110}/_{10} = 11$	Eq. "Pivot"
F_1	$-(20)\ ({^1}/_{2}) + 30$ = 20	-(20) (1) + 20 = 0	-(20) (0) + 1 = 1	$-(20)\ ({^1}/_{10}) + 0$ = -2	-(20) (11) + 300 = 80	
f(X)	$-(-8)\ ({^1}/_{2}) - 6$ = -2	-(-8) (1) - 8 = 0	-(-8) (0) + 0 = 0	$-(-8)\ ({^1}/_{10}) + 0$ $= {^4}/_{5}$	-(-8) (11) + 0 = 88	

Por leitura directa no quadro tem-se a nova solução $x_2 = 11$; $F_1 = 80$; f(X) = 88.

Esta solução **não é óptima** pois na equação da função o coeficiente de x_1 é negativo. Por ser único conclui-se que a variável x_1 deve entrar para a base.

Para decidir qual das actuais VB (x_2 =11 e F_1 = 80) deve sair da base calculam-se nas duas equações técnicas os quocientes entre os valores das VB e os coeficientes <u>não negativos</u> da variável x_1:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	"Ratio"
x_2	$^1/_2$				11	$^{11}/_{1/2}$ = 22
F_1	20				80	$^{80}/_{20}$ = 4 (mínimo)

A menor "ratio" finita e não negativa é "4" pelo que F_1 sai da base (na nova base tem-se x_1= 4)

Na nova base figurarão as variáveis x_1 (nova VB com valor 4) e x_2 (que permanece na base).

Repetindo o procedimento indicado obtém-se:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
x_2	$^1/_2$	1	0	$^1/_{10}$	11	$^{11}/^1/_2$ = 22
F_1	20	0	1	-2	80	$^{80}/_{20}$ =4
f(X)	-2	0	0	$^4/_5$	88	
x_1	$^{20}/_{20}$ = 1	$^0/_{20}$ = 0	$^1/_{20}$	$^{-2}/_{20}$ = $^{-1}/_{10}$	$^{80}/_{20}$ = 4	Eq. "Pivot"
x_2	$^{-1}/_2$ (1) + $^1/_2$ = 0	$^{-1}/_2$ (0) + 1 = 1	$^{-1}/_2$ ($^1/_{20}$) + 0 =$^{-1}/_{40}$	$^{-1}/_2$ ($^{-1}/_{10}$) +$^1/_{10}$ = $^3/_{20}$	$^{-1}/_2$ (4) +11 = 9	
f(X)	2 (1) - 2 = 0	2 (0) + 0 = 0	2 ($^1/_{20}$) + 0 = 1/10	2 ($^{-1}/_{10}$) + $^4/_5$ = 3/5	2 (4) + 88 = 96	

Esta solução é óptima pois na equação da função todas as variáveis da forma-padrão, têm coeficiente não negativo.

Por leitura directa no quadro tem-se a solução óptima:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad Max\ f(X^*) = 96$$

Este último quadro do Simplex é denominado Quadro Óptimo.

RESUMO DO MÉTODO DO SIMPLEX (ALGORITMO)

(Maximização da função objectivo)

1. Solução Inicial

   Escolher para VB as variáveis auxiliares cujos vectores constituem uma matriz Identidade

2. Escolher a Nova VB

   Identificar as variáveis não básicas que na equação da função têm coeficiente negativo. Destas variáveis seleccionar para entrada na base aquela cujo coeficiente tem maior valor absoluto.

   Se houver mais do que uma variável nas mesmas condições escolher arbitrariamente.

   Se todas as variáveis têm coeficiente não negativo então a solução corrente é óptima

3. Escolher a Nova VNB

   Nas equações técnicas calcular os quocientes ("ratios") entre os valores da solução corrente (coluna VSM) e os coeficientes não negativos da nova VB (ignorar quocientes com denominador nulo ou negativo).

   A VB corrente em cuja linha se verifica o menor destes quocientes é aquela que deve sair da base.

   Se este mínimo se verificar em mais do que uma das VB correntes, escolher arbitrariamente uma delas para nova VNB.

4. Calcular o novo quadro do Simplex

   Efectuar transformações lineares para que o vector dos coeficientes da nova VB juntamente com os das VB que permanecem na base constitua uma matriz Identidade.

   Todas as VB devem ter coeficiente nulo na equação da função.

5. Voltar ao Passo 2

6. Aspectos práticos na construção do quadro do Simplex

- no cálculo de um novo quadro, os coeficientes nas equações técnicas da nova VB e das VB que permanecem na base devem constituir uma matriz Identidade. Por isso os vectores destas variáveis podem ser registados sem necessidade de cálculo.
- no cálculo de um novo quadro, os coeficientes na equação da função da nova VB e das VB que continuam na base devem ser nulos podendo ser registados sem necessidade de cálculo.
- se a nova VB tem coeficiente nulo numa equação técnica, esta equação não sofre alteração podendo ser registada no novo quadro sem necessidade de cálculo.

7. Técnica das Variáveis Artificiais

Considere-se o seguinte modelo de PL:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcl} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ x_1 & & & \geq & 6 \\ & & x_2 & \geq & 4 \\ & & x_1 , x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Na forma padrão do Simplex tem-se:

$$f(X) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2 + 0E_3 + 0E_4$$

$$\text{sujeito a:}\quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 30x_1 & + & 20x_2 & + & F_1 & & & & & & & = & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & & & + & F_2 & & & & & = & 110 \\ x_1 & & & & & & & - & E_3 & & & = & 6 \\ & & x_2 & & & & & & & - & E_4 & = & 4 \end{array} \right.$$

$$x_1 , x_2 , F_1, F_2, E_3 , E_4 \geq 0$$

Havendo 4 restrições não há um conjunto de 4 variáveis cujos vectores constituam uma matriz Identidade!

De facto se a primeira base for constituída com os vectores das variáveis de equilíbrio (folgas e excedentárias) a solução $F_1 = 300$, $F_2 = 110$, $E_3 = -6$, $E_4 = -8$ não é admissível pois as variáveis excedentárias E_3 e E_4 têm valor negativo violando as restrições lógicas.

Esta situação resulta de as 3ª e 4ª restrições serem do tipo "$\geq$" pelo que a conversão em igualdade obriga ao uso de variáveis excedentárias que têm coeficiente "-1".

Admita-se agora o mesmo modelo mas com a 3ª restrição $x_1 + x_2 = 12$. Esta restrição já é uma igualdade pelo que, em regra, não permite formar uma matriz Identidade para constituir a base inicial.

Situações deste tipo são ultrapassadas aumentando a forma padrão das restrições de tipo "=" e "$\geq$" com variáveis não negativas denominadas **Variáveis Artificiais** [1] .

Notar que estas variáveis não pertencem à forma padrão do Simplex[2].

---

[1] Denominação decorrente do artifício de cálculo utilizado. Notar que se indexaram as variáveis à equação a que pertencem.

[2] As variáveis auxiliares de folga e excedentárias pertencem à forma-padrão sendo utilizadas para formar um sistema de equações técnicas a que possa ser aplicado o método Simplex. As variáveis auxiliares artificiais são usadas para modificar a forma-padrão quando nesta não existe uma matriz Identidade para constituir a base inicial explorável pelo método Simplex.

Para o modelo proposto ter-se-á:

$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 + F_1 = 300 \\ 5x_1 + 10x_2 + F_2 = 110 \\ x_1 - E_3 + A_3 = 6 \\ x_2 - E_4 + A_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, F_1, F_2, E_3, E_4, A_3, A_4 \geq 0$$

As variáveis artificiais alteram as equações padrão

"$x_1 - E_3 = 6$" e "$x_2 - E_4 = 4$"

para

$x_1 - E_3 \leq 6$ e $x_2 - E_4 \leq 4$

violando as igualdades originais (de facto as variáveis artificiais comportam-se como variáveis de folga…)

Esta violação das identidades da forma-padrão só não tem lugar se e só as variáveis artificiais A_3 e A_4 forem nulas.

Importa assim estudar um processo iterativo que, através de mudanças de base, permitam identificar uma base admissível do sistema de equações da forma padrão do Simplex (o que acontece quando as variáveis artificiais utilizadas tenham valor nulo).

Nas secções seguintes apresentam-se dois métodos (Método do “big “M” e o Método dos Dois Passos (ou Duas Fases) para calcular a solução óptima (se existe).

8. Método do “big M"

Admita-se a <u>Maximização</u> de $f(X) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ numa situação em que uma ou mais restrições incluem variáveis artificiais.

Para garantir que estas variáveis se anulam na solução final, este método introdu-las na função com coeficiente " - M " em que "M" tem um valor muito elevado relativamente aos restantes coeficientes da função.

Deste modo enquanto qualquer das variáveis artificiais não se anular a função não atingirá o máximo (note que $M \rightarrow +\infty$; se qualquer variável artificial tem valor positivo então $f(X) \rightarrow -\infty$ e não há máximo).

Retomando o modelo proposto no número anterior tem-se para cálculo:

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2 + 0E_3 + 0E_4 - MA_3 - MA_4$$

sujeito a:

$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 + F_1 = 300 \\ 5x_1 + 10x_2 + F_2 = 110 \\ x_1 - E_3 + A_3 = 6 \\ x_2 - E_4 + A_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, F_1, F_2, E_3, E_4, A_3, A_4 \geq 0$$

Nos quadros seguintes apresenta-se o cálculo da solução óptima aplicando o algoritmo do Simplex.

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	Termo Independente
F_1	30	20	0	0	1	0	0	0	300
F_2	5	10	0	0	0	1	0	0	110
A_3	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
A_4	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
f(X)	-6	-8	0	0	0	0	M	M	0

Nota: Veja a matriz Identidade da base. Note que, na primeira linha, as variáveis excedentárias foram colocadas imediatamente a seguir às variáveis de decisão para que a matriz identidade fique à direita. Este procedimento será o adoptado neste manual.

Foi dito que as VB devem ter ,sempre, coeficiente nulo na equação da função.

As VB A_3 e A_4 não satisfazem esta regra pelo que se lê erradamente f(X) = 0.

De facto sendo $A_3 = 6$ e $A_4 = 4$ o valor de $f(X) = 6x_1 + 8x_2 - MA_1 - MA_2$ é “-10M” e não zero como está no quadro, neste momento.

É necessário anular os coeficientes de A_3 e A_4 na equação da função o que se faz multiplicando por "-M" as 3ª e 4ª equações (onde A_3 e A_4 são VB) e adicionando as equações resultantes à equação da função.

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	Termo Independente
F_1	30	20	0	0	1	0	0	0	300
F_2	5	10	0	0	0	1	0	0	110
A_3	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
A_4	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
f(X)	-6	-8	0	0	0	0	M	M	0

Multiplicando a 3ª equação por "-M" obtém-se:

A_3	-M	0	M	0	0	0	-M	0	-6M

Multiplicando a 4ª equação por "-M" obtém-se:

A_4	0	-M	0	M	0	0	0	-M	-4M

Somando estas equações à equação da função fica:

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	Termo Independente
F_1	30	20	0	0	1	0	0	0	300
F_2	5	10	0	0	0	1	0	0	110
A_3	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
A_4	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
~~f(X)~~	~~-6~~	~~-8~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~M~~	~~M~~	~~0~~
f(X)	-6-M	-8-M	M	M	0	0	0	0	-10M

Aprecia-se agora a optimalidade desta solução básica admissível, concluindo-se que a mesma não é óptima porque há coeficientes negativos na equação da função.

Há pois que mudar de base escolhendo-se para nova VB a variável x_2 por ser a que tem, na equação corrente de f(X), coeficiente negativo com maior valor absoluto.

Efectuando as "ratios" finitas e não negativas "300/20=15" , "110/10=11", "4/1=4" conclui-se que deve sair da base a variável A_4 (menor "ratio" finita e não negativa).

O novo quadro do Simplex é o seguinte:

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	Termo Independente	Obs.
x_2	0	1	0	-1	0	0	0	1	4	Entra x_1
F_1	30	0	1	20	1	0	0	-20	220	Sai A_3
F_2	5	0	0	10	0	1	0	-10	70	
A_3	1	0	-1	0	0	0	1	0	6	
f(X)	-6-M	0	M	-8	0	0	0	8+M	32-6M	

Esta nova solução não é óptima pois há coeficientes negativos na equação da função.

Entra para a base a variável x_1 por ter o coeficiente negativo de maior valor absoluto.

Sai a variável A_3 por ser na sua linha que se regista a menor “ratio” finita e não negativa ($^6/_1 = 6$).

O novo quadro é o seguinte:

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	Termo Independente	Obs.
x_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	6	Entra E_4
x_2	0	1	0	-1	0	0	0	1	4	Sai F_1
F_1	0	0	30	20	1	0	-30	-20	40	
F_2	0	0	5	10	0	1	-5	-10	40	
f(X)	0	0	-6	-8	0	0	6+M	8+M	68	

A solução não é óptima pois há coeficientes negativos na equação da função.

Entra para a base a variável E_4 por ter o coeficiente negativo de maior valor absoluto.

Sai a variável F_1 por ser na sua linha que se regista a menor “ratio” finita e não negativa ($^{40}/_{20} = 2$).

O novo quadro é o seguinte:

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	Termo Independente	Obs.
E_4	0	0	$^3/_2$	1	$^1/_{20}$	0	$^{-3}/_2$	-1	2	$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
x_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	6	
x_2	0	1	$^3/_2$	0	$^1/_{20}$	0	$^{-3}/_2$	0	6	
F_2	0	0	-10	0	$^{-1}/_2$	1	10	0	20	
f(X)	0	0	6	0	$^2/_5$	0	-6+M	M	84	$Max\ f(X^*) = 84$

Esta solução é óptima pois todos os coeficientes na equação da função são não negativos.

<u>Verificação</u> da solução no sistema de equações da forma padrão:

$30x_1 + 20x_2 + F_1 = 300$	$\Leftrightarrow$	$30(6) + 20(6) + 0 = 300$	$\Leftrightarrow$	$300 = 300$	Ok
$5x_1 + 10x_2 + F_2 = 100$	$\Leftrightarrow$	$5(6) + 10(6) + 20 = 110$	$\Leftrightarrow$	$110 = 110$	Ok
$x_1 - E_3 = 6$	$\Leftrightarrow$	$6 - 0 = 6$	$\Leftrightarrow$	$6 = 6$	Ok
$x_2 - E_4 = 4$	$\Leftrightarrow$	$6 - 2 = 4$	$\Leftrightarrow$	$4 = 4$	Ok

$$f(X) = 6x_1 + 8x_2 = 6(6) + 8(6) = 36 + 48 = 84$$

Nota: Para Minimizar some a f(X) “k” parcelas do tipo “ + MA_k” para as “k” variáveis artificiais que utilizar.

9. Método dos Dois Passos (ou Duas Fases)

É um método alternativo ao método do "big M" já exposto.

O método compreende duas fases (passos) distintas:

1ª Fase : Minimiza-se uma função artificial (igual à soma das variáveis artificiais utilizadas) sujeita às restrições originais.

Dada a condição de não negatividade das variáveis, *o mínimo da função artificial só será nulo quando todas as variáveis artificiais forem nulas (objectivo do método)*. Neste caso pode concluir-se que o problema tem solução devendo executar-se o 2º Passo do método.

Se o mínimo da função artificial for diferente de zero então não é possível anular as variáveis artificiais devendo concluir-se que o problema não tem solução.

2ª Fase : Optimiza-se a função objectivo a partir da base obtida no final do 1º Passo

(tem interesse manter as colunas das variáveis artificiais quando se pretende interpretar economicamente o modelo, efectuar pós-optimização ou analisar a sensibilidade do modelo; contudo dado que os vectores das variáveis excedentárias e artificiais são simétricos pode sempre abandonar-se, no 2º Passo, o cálculo dos vectores das variáveis artificiais).

Considere-se o problema proposto no método do "big M":

1º Passo: Minimizar a Função Artificial $f(A) = A_3 + A_4$ sujeito a:

$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 + F_1 = 300 \\ 5x_1 + 10x_2 + F_2 = 110 \\ x_1 - E_3 + A_3 = 6 \\ x_2 - E_4 + A_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 , x_2 , F_1 , F_2 , E_3 , E_4 , A_3, A_4 \geq 0$$

A Minimização de uma função pode efectuar-se de dois modos:

- *ou alterando o critério de optimalidade do método do Simplex considerando que o óptimo é atingido quando na equação da função todos os coeficientes das variáveis forem não positivos (≤ 0);*
- *ou maximizando a função simétrica;*

No manual adopta-se sempre o 1º processo.

No quadro do Simplex será registado: $f(A) - A_3 - A_4 = 0$

Quadro Inicial do Simplex

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	VSM
F_1	30	20	0	0	1	0	0	0	300
F_2	5	10	0	0	0	1	0	0	110
A_3	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
A_4	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
f(A)	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0

As VB devem ter ,sempre, coeficiente nulo na equação da função.

As VB A_3 e A_4 não satisfazem esta regra pelo que se lê f(A) = 0 o que está errado.

De facto sendo $A_3 = 6$ e $A_4 = 4$ então em $f(A) = A_3 + A_4 = 10$.

É necessário anular os coeficientes de A_3 e A_4 na equação da função o que se faz multiplicando por "1" as 3ª e 4ª equações (onde A_1 e A_2 são VB) e adicionando as equações resultantes à equação da função. Trata-se pois de uma soma directa.

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	VSM
F_1	30	20	0	0	1	0	0	0	300
F_2	5	10	0	0	0	1	0	0	110
A_3	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
A_4	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
f(A)	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
f(A)	1	1	-1	-1	0	0	0	0	10

A solução não é óptima pois há **coeficientes positivos** na equação da função (notar que se está a minimizar directamente no quadro Simplex pelo que as regras são simétricas das apresentadas para a maximização da função objectivo).

Entra para a base a variável x_1 ou x_2 (igual coeficiente positivo de maior valor pelo que a escolha é arbitrária).

Escolhendo x_1 para entrar na base, sai desta a variável A_3 por ser na sua linha que se verifica a menor “ratio” finita e não negativa) ($^6/_1 = 6$).

O novo quadro é o seguinte:

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	VSM
F_1	30	20	0	0	1	0	0	0	300
F_2	5	10	0	0	0	1	0	0	110
A_3	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
A_4	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
~~f (A)~~							~~-1~~	~~-1~~	~~0~~
f (A)	1	1	-1	-1	0	0	0	0	10
x_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
F_1	0	20	30	0	1	0	-30	0	120
F_2	0	10	5	0	0	1	-5	0	80
A_4	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
f (A)	0	1	0	-1	0	0	-1	0	4

A solução não é óptima pois há coeficientes positivos na equação da função.

Entra para a base a variável x_2 por ter o coeficiente positivo de maior valor.

Sai a variável A_4 por ser na sua linha que se verifica a menor "ratio" finita e não negativa ($^4/_1 = 4$).

Notar que ficarão VNB as duas variáveis artificiais (valor nulo). Assim sendo conclui-se já que o valor mínimo da função artificial será nulo o que indica que o problema tem solução.

O novo quadro é o seguinte:

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	VSM
x_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
F_1	0	20	30	0	1	0	-30	0	120
F_2	0	10	5	0	0	1	-5	0	80
A_4	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
f (A)	0	1	0	-1	0	0	-1	0	4
x_2	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
F_1	0	0	30	20	1	0	-30	-20	40
F_2	0	0	5	10	0	1	-5	-10	40
x_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
f (A)	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0

A solução é óptima pois todos os coeficientes na equação da função são não positivos (≤ 0).

Foi atingido o mínimo da função artificial que é nulo (porque as variáveis artificiais são nulas).

Notar que a base com os vectores das VB x_1 , x_2 , F_1, F_2 é admissível (é a 1ª base admissível do sistema de equações da forma-padrão do Simplex e só nestas condições o 1º passo está terminado).

As coordenadas $x_1 = 6$, $x_2 = 4$ são as de um extremo do espaço de soluções admissíveis.

Falta saber se, neste extremo, a função objectivo $f(X) = 6x_1 + 8x_2$ atinge ou não o valor máximo.

Eis a razão porque é necessário efectuar o 2º Passo (2ª fase) do método.

2º Passo: Optimização da função objectivo: Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2 + 0E_3 + 0E_4$

Quadro Inicial : base óptima corrente (último quadro do 1º Passo) e a função f(X):

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	VSM
F_1	0	0	30	20	1	0	-30	-20	40
F_2	0	0	5	10	0	1	-5	-10	40
x_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
x_2	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
~~f (A)~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~-1~~	~~-1~~	~~0~~
f(X)	-6	-8	0	0	0	0	0	0	0

As VB devem ter, sempre, coeficiente nulo na equação da função.

Como as VB x_1 e x_2 não satisfazem esta regra lê-se erradamente f(X) = 0 pois sendo $x_1 = 6$ e $x_2 = 4$ então $f(X) = 6x_1 + 8x_2 = 68$.

É necessário multiplicar por "6" a equação da linha de x_1, por "8" a equação da linha de x_2 e adicionar as equações obtidas à equação da função:

Linha de x_1 multiplicada por "6":

x_1	6	0	-6	0	0	0	6	0	36

Linha de x_2 multiplicada por "8":

x_2	0	8	0	-8	0	0	0	8	32

Linha de f(X):

f(X)	-6	-8	0	0	0	0	0	0	0

Soma das 3 equações (equação de f(X) com coeficiente nulo nas VB x_1 e x_2):

f(X)	0	0	-6	-8	0	0	6	8	68

O quadro Simplex fica então:

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	VSM
F_1	0	0	30	20	1	0	-30	-20	40
F_2	0	0	5	10	0	1	-5	-10	40
x_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
x_2	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
f (A)	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
f(X)	-6	-8	0	0	0	0	0	0	0
f(X)	0	0	-6	-8	0	0	6	8	68

Atendendo a que se está a Maximizar f(X) a solução não é óptima pois há coeficientes negativos na equação da função.

Entra para a base a variável E_4 por ter, na equação de f(X), o coeficiente negativo de maior valor absoluto.

Sai a variável F_1 por ser na sua linha que se regista a menor "ratio" finita e não negativa ($^{40}/_{20}$ = 2).

O novo quadro é o seguinte:

VB	x_1	x_2	E_3	E_4	F_1	F_2	A_3	A_4	VSM
F_1	0	0	30	20	1	0	-30	-20	40
F_2	0	0	5	10	0	1	-5	-10	40
x_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
x_2	0	1	0	-1	0	0	0	1	4
f (A)	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
f (X)	-6	-8							0
f (X)	0	0	-6	-8	0	0	6	8	68
E_4	0	0	3/2	1	1/20	0	-3/2	-1	2
F_2	0	0	-10	0	-1/2	1	10	0	20
x_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	6
x_2	0	1	3/2	0	1/20	0	-3/2	0	6
f (X)	0	0	6	0	2/5	0	-6	0	84

A solução é óptima pois todos os coeficientes na equação da função são não negativos (*notar que <u>não são considerados os coeficientes das variáveis artificiais pois estas não figuram na forma-padrão do modelo</u>*).

$$\textit{Solução óptima}: X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad Max\ f(X^*) = 84$$

Pode acontecer que se atinja o Mínimo de f(A) nulo com uma ou mais variáveis artificiais básicas de valor nulo (solução degenerada).

Neste caso deve efectuar-se mudanças de base para trocar todas as VB artificiais por VNB do modelo na forma padrão e assim garantir uma base admissível para iniciar o 2º Passo.

O exemplo seguinte mostra esta situação:

	x_1	x_2		
Max f(X)	1	1		
Restrição 1	3	1	=	1
Restrição 2	1	4	≥	4

Efectuando o 1º Passo obtém-se:

VB	x_1	x_2	E_2	A_1	A_2	VSM	Obs.
A_1	3	1	0	1	0	1	Anular coef. das VB
A_2	1	4	-1	0	1	4	Entra x_2
~~f(A)~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~-1~~	~~-1~~	~~0~~	Sai A_1
f(A)	4	5	-1	0	0	5	
x_2	3	1	0	1	0	1	Solução óptima
A_2	-11	0	-1	-4	1	0	Min f(A) = 0
f(A)	-11	0	-1	-5	0	0	A_2 = 0 é VB !

O valor mínimo de f(A) é nulo o que permite concluir que o problema proposto tem solução.

A última base não é admissível para o sistema de equações da forma-padrão do Simplex onde não existe a variável A_2. É necessário retirar A_2 da base por troca com uma das VNB do modelo com a qual se possa estabelecer "ratio ". Como, neste caso, se pode dividir "0" por "-11" ou por "-1" escolhe-se arbitrariamente x_1 ou E_2 para entrada na base.

Escolhendo x_1 para VB (troca com A_2) tem-se <u>base inicial para iniciar o 2º Passo e optimizar f(X)</u>:

VB	x_1	x_2	E_2	A_1	A_2	VSM	Obs.
x_2	0	1	-3/11	-1/11	3/11	1	Base para 2º Passo
x_1	1	0	1/11	4/11	-1/11	0	
~~f(A)~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~-1~~	~~-1~~	~~0~~	
f(X)	-1	-1	0	0	0	0	Anular,em f(X) coef. das VB
f(X)	0	0	-2/11	3/11	2/11	1	Entra E_2. Sai x_1
E_2	11	0	1	4	-1	0	
x_2	3	1	0	1	0	1	
f(X)	2	0	0	1	0	1	Óptimo

Nota: Veja que quando o mínimo da função artificial é nulo, com base sem variáveis artificiais, a equação da função artificial no final do 1º passo é sempre igual à inicial.

10. Auto Teste

a. Usando o método Simplex calcule o Máximo de f(X) do seguinte problema de PL:

	x_1	x_2	x_3		
f (X)=	150	180	160		
Restrição 1	4	10	6	$\leq$	50
Restrição 2	6	6	3	$\leq$	80
Restrição 3	1	1	1	$\leq$	8

b. Usando o método Simplex calcule o Máximo de f(X) do seguinte problema de PL:

	x_1	x_2	x_3		
f (X)=	2	1	2		
Restrição 1	2	1	2	=	1
Restrição 2	1	3	1	$\geq$	3
Restrição 3	4	5	1	$\geq$	5

(Acompanhe a resolução com o software do autor)

11. Solução do auto teste

a.

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	VSM	
F_1	4	10	6	1	0	0	50	
F_2	6	6	3	0	1	0	80	
F_3	1	1	1	0	0	1	8	
f (X)	-150	-180	-160	0	0	0	0	Maximizar
x_2	2/ 5	1	3/ 5	1/ 10	0	0	5	
F_2	18/ 5	0	- 3/ 5	- 3/ 5	1	0	50	
F_3	3/ 5	0	2/ 5	- 1/ 10	0	1	3	
f (X)	-78	0	-52	18	0	0	900	
x_1	1	0	2/ 3	- 1/ 6	0	5/ 3	5	
x_2	0	1	1/ 3	1/ 6	0	- 2/ 3	3	
F_2	0	0	-3	0	1	-6	32	
f (X)	0	0	0	5	0	130	1290	Óptimo

Solução Óptima

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Max\ f(X^*) = 1290$$

b.

VB	x_1	x_2	x_3	E_2	E_3	A_1	A_2	A_3	VSM	
A_1	2	1	2	0	0	1	0	0	1	
A_2	1	3	1	-1	0	0	1	0	3	
A_3	4	5	1	0	-1	0	0	1	5	
f (A)						-1	-1	-1	0	Minimizar
f (A)	7	9	4	-1	-1	0	0	0	9	
x_2	2	1	2	0	0	1	0	0	1	
A_2	-5	0	-5	-1	0	-3	1	0	0	Para VNB
A_3	-6	0	-9	0	-1	-5	0	1	0	
f (A)	-11	0	-14	-1	-1	-9	0	0	0	
x_1	1	0	1	1/ 5	0	3/ 5	- 1/ 5	0	0	
x_2	0	1	0	- 2/ 5	0	- 1/ 5	2/ 5	0	1	
A_3	0	0	-3	6/ 5	-1	- 7/ 5	- 6/ 5	1	0	Para VNB
f (A)	0	0	-3	6/ 5	-1	- 12/ 5	- 11/ 5	0	0	
x_3	0	0	1	- 2/ 5	1/ 3	7/ 15	2/ 5	- 1/ 3	0	
x_1	1	0	0	3/ 5	- 1/ 3	2/ 15	- 3/ 5	1/ 3	0	
x_2	0	1	0	- 2/ 5	0	- 1/ 5	2/ 5	0	1	
f (A)	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	Fim Passo 1
f (X)	-2	-1	-2						0	Maximizar
f (X)	0	0	0	0	0	1	0	0	1	Óptimo

A solução óptima é:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ;\ Max\ \ f(X^*) = 1$$

Notar que a função artificial atingiu o mínimo nulo em base com duas variáveis artificiais nulas.

Antes de iniciar o 2º Passo foi necessário substituir aquelas variáveis por VNB da forma-padrão para dispor de uma base admissível para iniciar a optimização da função objectivo do modelo.

12. Método Simplex - Situações Particulares

a. Problema sem Solução Admissível

Considere-se o problema de PL:

Max $f(X) = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{array}{llclcl} \text{sujeito a:} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & & & x_2 & \geq & 6 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Por simples análise conclui-se que o problema não tem solução pois com $x_2 \geq 6$ não é possível satisfazer a 1ª restrição técnica (notar que $x_1 \geq 0$).

Na prática, com modelos de maior dimensão, não é possível tirar conclusões com esta facilidade mas felizmente o método do Simplex permite verificar quando um modelo não tem solução.

Analisemos os quadros seguintes resultantes da aplicação do "método dos 2 Passos" em que:

- F_1 é variável de folga da primeira restrição técnica;
- E_2 e A_2 são respectivamente variáveis excedentária e artificial da 2ª restrição técnica;

VB	x_1	x_2	E_2	F_1	A_2	Termo Independente	Obs.
F_1	2	1	0	1	0	5	Anular o coeficiente de A_2
A_2	0	1	-1	0	1	6	Entra x_2
f(A)					-1	0	Sai A_2
f(A)	0	1	-1	0	0	6	
x_2	2	1	0	1	0	5	
A_2	-2	0	-1	-1	1	1	
f(A)	-2	0	-1	-1	0	1	Min f(A) = 1

Todos os coeficientes na equação da função são não positivos pelo que foi atingido o mínimo da função artificial. Como este é diferente de zero conclui-se que não há solução básica admissível para o sistema de equações da forma padrão do Simplex ou seja o problema não tem solução.

b. Problema com Solução Ilimitada

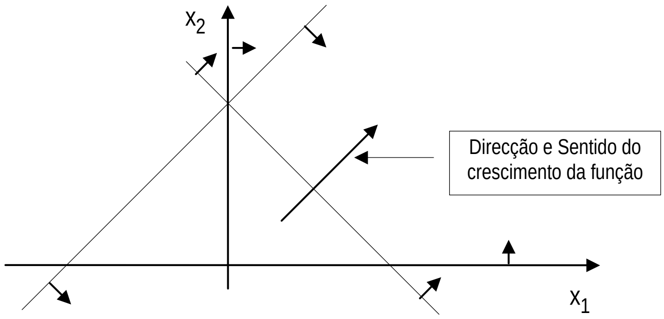
Um problema tem solução ilimitada quando o máximo (mínimo) de uma função objectivo pode aumentar (diminuir) indefinidamente. O método do Simplex permite também detectar esta situação.

Considere-se o modelo de PL:

Max $f(X) = x_1 + x_2$

$$\begin{array}{llclcl} \text{sujeito a:} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Geometricamente é fácil concluir que não há limite superior para o valor de f(X):



Os quadros seguintes resultam da aplicação do método do "Método dos 2 Passos":

- F_1 é variável de folga da 1ª restrição técnica;
- E_2 e A_2 são respectivamente variáveis excedentária e artificial da 2ª restrição técnica;

VB	x_1	x_2	E_2	F_1	A_2	VSM	
F_1	-1	1	0	1	0	2	
A_2	1	1	-1	0	1	2	
f (A)					-1	0	Minimizar
f (A)	1	1	-1	0	0	2	
x_1	1	1	-1	0	1	2	
F_1	0	2	-1	1	1	4	
f (A)	0	0	0	0	-1	0	Óptimo.
f (X)	-1	-1				0	Maximizar
f (X)	0	0	-1	0	1	2	

A variável E_2 tem coeficiente negativo na equação da função pelo que é possível aumentar o valor da função com a entrada desta variável para a base. Contudo não é possível calcular uma "ratio" finita e não negativa para seleccionar a variável que deve sair da base corrente.

Nestas condições *conclui-se que o máximo da função é Ilimitado.*

Regra para reconhecer que a Função Objectivo é Ilimitada
Se o vector de uma variável, <u>seleccionável para entrada na base</u>, tem apenas coordenadas negativas e/ou nulas conclui-se que o valor da função é Ilimitado.

c. Solução Óptima Única do modelo Primal

Das duas versões de um modelo de PL (Primal e Dual) temos vindo a analisar apenas a primeira delas (em capítulo posterior apresenta-se a Dualidade em programação linear).

No quadro óptimo do Simplex é possível classificar a solução de cada um dos modelos.

Aborda-se agora exclusivamente o modelo Primal.

Considere-se o seguinte quadro óptimo do problema de Maximização antes apresentado:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

A solução óptima do Primal é **Única** porque as VNB F_1 e F_2 têm coeficiente não nulo na equação da função ou, de outro modo, só as VB têm coeficiente nulo na equação da função.

Regra para reconhecer que a Solução Óptima é Única (modelo Primal)
Quando, no óptimo, as VNB (decisão, folga ou excedentária) têm coeficiente não nulo na equação da função, a solução óptima do problema Primal é Única (só as VB têm coeficiente nulo na equação da função).

d. Solução Óptima Indeterminada (múltipla) do modelo Primal

Considere-se o problema de PL:

Max $f(X) = 5x_1 + 10x_2$

sujeito a:

$$\begin{array}{lcll} x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\ x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ x_1 , x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Analisemos os quadros seguintes resultantes da aplicação do método do Simplex :

- F_1 é variável de folga da primeira restrição técnica
- F_2 é variável de folga da 2ª restrição técnica

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente	Obs.
F_1	1	2	1	0	12	Entra x_2
F_2	1	1	0	1	10	Sai F_2
f(X)	-5	-10	0	0	0	
x_2	$^1/_2$	1	$^1/_2$	0	6	
F_2	$^1/_2$	0	$^{-1}/_2$	1	4	
f(X)	0	0	5	0	60	Óptimo

A solução **óptima** é $x_1 = 0$; $x_2 = 6$; $F_1 = 0$; $F_2 = 4$; Max f(X) = 60 ; esta solução **não é única** pois a VNB x_1 tem coeficiente nulo na equação da função.

Regra para reconhecer uma Solução Óptima Indeterminada (modelo Primal)
Quando a solução óptima não é degenerada (as VB são positivas) e há VNB com coeficiente nulo na equação da função, a solução óptima do problema Primal é sempre Indeterminada (múltipla).

Nesta situação é necessário calcular outra solução óptima com x_1 como VB.

Retomando o quadro óptimo corrente e mudando de base com a entrada de x_1 e a saída de F_2 temos:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	Termo Independente	Obs.
x_2	$^1/_2$	1	$^1/_2$	0	6	
F_2	$^1/_2$	0	$^{-1}/_2$	1	4	
f(X)	0	0	5	0	60	1º óptimo
x_1	1	0	-1	2	8	
x_2	0	1	1	-1	2	
f(X)	0	0	5	0	60	2º óptimo

São agora conhecidas duas soluções óptimas X_1^* e X_2^* :

$$X_1^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad X_2^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

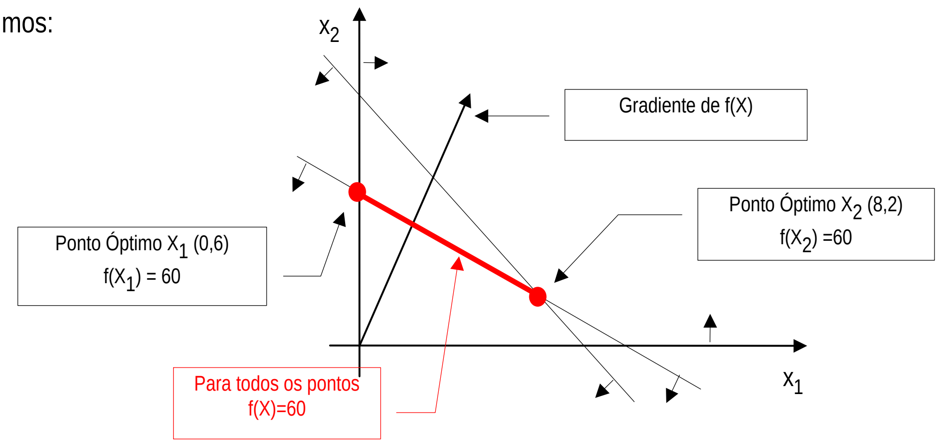
A expressão geral das soluções óptimas obtém-se por combinação linear convexa:

$$X^* = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad com\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \ \ e \ \ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

$$Max\, f(X^*) = 60$$

(Notar que para $\alpha_1 = 1$ tem-se $X^* = X_1^*$ e para $\alpha_1 = 0$ tem-se $X^* = X_2^*$)

A interpretação geométrica a seguir apresentada permite verificar o motivo da multiplicidade de pontos óptimos:



Quando a solução óptima é degenerada e há VNB com coeficiente nulo na equação da função, a solução óptima é Indeterminada se e só aquela(s) VNB puder(em) entrar para a base com valor não nulo (o que implica a saída da base de uma VB não nula).

Exemplo : Solução Óptima (degenerada) Indeterminada

Considere-se o problema de PL:

Max $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ & & x_1, x_2 & & & \geq & 0 \end{array}$$

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM	Obs
F_1	2	2	1	1	0	4	
F_2	0	2	1	0	1	4	
f(X)	-1	-2	-1	0	0	0	
x_2	1	1	1/ 2	1/ 2	0	2	
F_2	-2	0	0	-1	1	0	Degenerada
f(X)	1	0	0	1	0	4	Óptimo

A solução óptima é degenerada e a VNB x_3 tem coeficiente nulo na equação da função.

Pode esta variável entrar para a base com valor não nulo ? Pode desde que se efectue a troca com a variável x_2 (teremos x_3 =4). Sendo assim, conclui-se que a solução óptima não é única.

Fazendo a mudança de base referida obtém-se a solução óptima:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM	Obs
x_3	2	2	1	1	0	4	
F_2	-2	0	0	-1	1	0	Degenerada
f(X)	1	0	0	1	0	4	Óptimo

Considerando agora as duas soluções óptimas calculadas obtém-se, por combinação linear convexa, a expressão geral das soluções óptimas do problema:

$$X^* = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} com\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\ e\ \ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

$$Max\, f(X^*) = 4$$

Veja-se agora uma solução óptima degenerada mas Única.

Exemplo : Solução Óptima (degenerada) Única

Considere-se o problema de PL:

	x_1	x_2	x_3		
Max f(X)=	2	1	2		
Restrição 1	2	1	2	=	1
Restrição 2	1	3	1	≥	3
Restrição 3	4	5	1	≥	5

O quadro óptimo é o seguinte:

VB	x_1	x_2	x_3	E_2	E_3	A_1	A_2	A_3	VSM	
x_2	0	1	0	- 2/ 5	0	- 1/ 5	2/ 5	0	1	
x_1	1	0	0	3/ 5	- 1/ 3	2/ 15	- 3/ 5	1/ 3	0	
x_3	0	0	1	- 2/ 5	1/ 3	7/ 15	2/ 5	- 1/ 3	0	Degenerada
f(X)	0	0	0	0	0	1	0	0	1	Óptimo

A solução óptima é degenerada e as VNB E_2 e E_3 têm coeficiente nulo na equação da função.

Contudo nesta situação a menor ratio finita e não negativa é sempre nula quer se seleccione E_2 ou E_3 para uma nova base.

Sendo esta "ratio" o valor da nova VB, as restantes variáveis que continuam na base mantêm o seu valor pelo que o vector da solução óptima corrente não sofre qualquer alteração.

Estamos pois perante uma solução óptima Única.

Veja-se o resultado de seleccionar E_2 para entrar para a base por troca com a variável x_1 (ou x_3).

VB	x_1	x_2	x_3	E_2	E_3	A_1	A_2	A_3	VSM	
E_2	5/3	0	0	1	-5/9	2/9	-1	5/9	0	
x_2									1	
x_3									0	
f(X)									1	Óptimo

O vector solução é exactamente igual ao anterior $X^T = [\ x_1 , x_2 , x_3 , E_2 , E_3\ ] = [\ 0, 1, 0, 0, 0\ ]$:

Se escolhermos E_3 para entrar na base por troca com x_3 (ou x_1) sucede exactamente o mesmo:

VB	x_1	x_2	x_3	E_2	E_3	A_1	A_2	A_3	VSM	
E_3	0	0	3	-6/ 5	1	7/5	6/5	-1	0	
x_2									1	
x_1									0	
f(X)									1	Óptimo

e. Degeneração

Relembre-se a regra para escolher a variável que deve <u>sair da base</u> quando se muda de extremo:

Escolha da Nova VNB (variável que sai da base)
"Dividem-se os termos independentes das equações técnicas pelos componentes <u>não negativos</u> do vector da variável seleccionada para VB. Sai da base a VB em cuja linha se obtém a menor das "ratios" (valor da nova VB). <u>Em caso de "empate" a decisão é arbitrária</u>".

Admita-se a situação seguinte de Maximização.

A solução corrente não é óptima. Entra x_1 para a nova base:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Termo Independente	"Ratio"
x_2	2	1	0	0	-1	6	$^6/_2 = 3$
x_3	-1	0	1	0	2	10	Não há
x_4	5	0	0	1	-1	15	$^{15}/_5 = 3$
f(X)	-10	0	0	0	4	60	

A escolha da variável a sair da base pode recair em x_2 ou x_4 pois nas duas equações verifica-se a menor "ratio" finita e não negativa.

Escolhendo x_2 (por exemplo) tem-se:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Termo Independente	Obs.
x_1	1	$^1/_2$	0	0	$^{-1}/_2$	3	
x_3	0	$^1/_2$	1	0	$^3/_2$	13	
x_4	0	$^{-5}/_2$	0	1	$^3/_2$	0	(degeneração)
f(X)	0	5	0	0	-1	90	

Esta solução é **Degenerada** (VB x_4 nula) <u>porque na solução anterior a "ratio" mínima finita e não negativa se verificou em mais do que uma das equações técnicas</u>.

A solução corrente não é óptima. Entra para a base x_5 e sai x_4 da base.

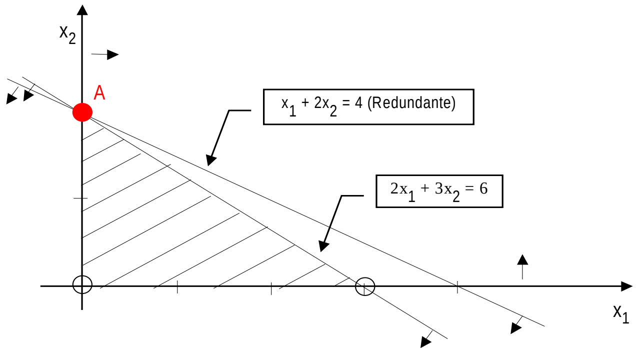
A nova solução básica é a seguinte:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Termo Independente	Obs.
x_5	0	$^{-5}/_3$	0	$^2/_3$	1	0	(degeneração)
x_1	1	$^{-1}/_3$	0	$^1/_3$	0	3	
x_3	0	3	1	-1	0	13	
f(X)	0	$^{10}/_3$	0	$^2/_3$	0	90	

Esta solução é também degenerada verificando-se que o **valor da função não sofreu alteração tal como o vector solução (não houve mudança de extremo!)**

Qual a razão do aparecimento de soluções degeneradas ? Podem provocar dificuldades na aplicação do método Simplex?

Normalmente, em problemas de pequena dimensão, a degeneração está associada à existência de redundância na definição do espaço de soluções como se vê na figura seguinte:



O ponto "A" pode ser definido por três bases diferentes nelas figurando sempre x_2=2 e a outra VB é nula (degeneração).

Se maximizarmos a função f(X) = $x_1 + 5x_2$, é no ponto "A" que a função atinge o máximo f(X)=10. Contudo o método do Simplex <u>considera não óptima</u> a base [P_1 P_2] com x_1=0 e x_2=2.

A Degeneração pode provocar a <u>entrada em ciclo</u>, ou seja, o método do Simplex não atinge a solução óptima repetindo interminavelmente a mesma sequência de iterações <u>sem alteração do valor da função objectivo</u>.

Na prática ocorrem soluções degeneradas mas a ocorrência de ciclo é muito pouco frequente [1] (Kotiah refere a ocorrência de ciclo num *modelo real de filas de espera* com 15 restrições e 20 variáveis).

e.1. Modelo Teórico com Ciclo

Há modelos teóricos para simular o fenómeno de entrada em ciclo (exemplo seguinte):

Max f(X) = $^3/_4\, x_1 - 20\, x_2 + {^1/_2}\, x_3 - 6x_4$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcrcrcl} {^1/_4}\,x_1 & - & 8x_2 & - & x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\ {^1/_2}\,x_1 & - & 12x_2 & - & {^1/_2}\,x_3 & + & 3x_4 & \leq & 0 \\ & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\ & & & & \multicolumn{3}{c}{x_1,\, x_2, x_3,\, x_4} & \geq & 0 \end{array}$$

[1] Ver Kotiah e Steinberg,"On the Possibility of Cycling with the Simplex Method", *Operations Research* (1978)

Utilizando o método do Simplex tem-se a seguinte sequência de soluções:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	F_1	F_2	F_3	VSM	Obs.
F_1	$^1/_4$	-8	-1	9	1	0	0	0	Entra x_1
F_2	$^1/_2$	-12	$^{-1}/_2$	3	0	1	0	0	Sai F_1
F_3	0	0	1	0	0	0	1	1	
f(X)	$^{-3}/_4$	20	$^{-1}/_2$	6	0	0	0	0	
x_1	1	-32	-4	36	4	0	0	0	Entra x_2
F_2	0	4	$^3/_2$	-15	-2	1	0	0	Sai F_2
F_3	0	0	1	0	0	0	1	1	
f(X)	0	-4	$^{-7}/_2$	33	3	0	0	0	
x_2	0	1	$^3/_8$	$^{-15}/_4$	$^{-1}/_2$	$^1/_4$	0	0	Entra x_3
x_1	1	0	8	-84	-12	8	0	0	Sai x_1
F_3	0	0	1	0	0	0	1	1	
f(X)	0	0	-2	18	1	1	0	0	
x_3	$^1/_8$	0	1	$^{-21}/_2$	$^{-3}/_2$	1	0	0	Entra x_4
x_2	$^{-3}/_{64}$	1	0	$^3/_{16}$	$^1/_{16}$	$^{-1}/_8$	0	0	Sai x_2
F_3	$^{-1}/_8$	0	0	$^{21}/_2$	$^3/_2$	-1	1	1	
f(X)	$^1/_4$	0	0	-3	-2	3	0	0	
x_4	$^{-1}/_4$	$^{16}/_3$	0	1	$^1/_3$	$^{-2}/_3$	0	0	Entra F_1
x_3	$^{-5}/_2$	56	1	0	2	-6	0	0	Sai x_3
F_3	$^5/_2$	-56	0	0	-2	6	1	1	
f(X)	$^{-1}/_2$	16	0	0	-1	1	0	0	
F_1	$^{-5}/_4$	28	$^1/_2$	0	1	-3	0	0	Entra F_2
x_4	$^{-1}/_6$	-4	$^{-1}/_6$	1	0	$^1/_3$	0	0	Sai x_4
F_3	0	0	1	0	0	0	1	1	
f(X)	$^{-7}/_4$	44	$^1/_2$	0	0	-2	0	0	

Entrando F_2 e saindo x_4 a nova base é igual à primeira; a sequência de bases repetir-se-á novamente (nunca houve saída do extremo $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$).

Há vários métodos para evitar situações de "ciclo". Referem-se, a título de exemplo, o método de Bland[2] (Smallest Index Rule), o Método da Perturbação de Charnes[3] e o Método Lexicográfico de Dantzig, Orden e Wolfe [4] .

[2] R.G.Bland, "New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method" *Matehematics of Operations Research* (1977)

[3] A. Charnes,"Optimality and Degeneracy in Linear Programming" *Econometrica* (1952)

[4] G. B. Dantzig, A. Orden and P. Wolfe, "The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Forma Under Linear Inequality Constraints", *Pacific Journal of Mathematics* (1955)

Apresenta-se a resolução do problema com o software do autor onde se evita a entrada em ciclo " perturbando os termos independentes inferiores a 10^{-15} quando não únicos":

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	F_1	F_2	F_3	Termo Independente
F_1	1/4	-8	-1	9	1	0	0	$0 + \varepsilon$
F_2	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	$0 + 2\varepsilon$
F_3	0	0	1	0	0	0	1	1
f(X)	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0	0
x_1	1	-32	-4	36	4	0	0	4ε
F_2	0	4	3/2	-15	-2	1	0	0
F_3	0	0	1	0	0	0	1	1
f(X)	0	-4	-7/2	33	3	0	0	0
x_2	0	1	3/8	-15/4	-1/2	1/4	0	0
x_1	1	0	8	-84	-12	8	0	4ε
F_3	0	0	1	0	0	0	1	1
f(X)	0	0	-2	18	1	1	0	0
x_3	0	8/3	1	-10	-4/3	2/3	0	0
x_1	1	-64/3	0	-4	-4/3	8/3	0	4ε
F_3	0	-8/3	0	10	4/3	-2/3	1	1
f(X)	0	16/3	0	-2	-5/3	7/3	0	0
x_4	0	-4/15	0	1	2/15	-1/15	1/10	1/10
x_3	0	0	1	0	0	0	1	1
x_1	1	-112/5	0	0	-4/5	12/5	2/5	2/5
f(X)	0	24/5	0	0	-7/5	11/5	1/5	1/5
F_1	0	-2	0	15/2	1	-1/2	3/4	3/4
x_3	0	0	1	0	0	0	1	1
x_1	1	-24	0	6	0	2	1	1
f(X)	0	2	0	21/2	0	3/2	5/4	5/4

No 1º quadro as duas primeiras equações têm termos independentes inferiores a 10^{-15} pelo que se adicionou "ε" (10^{-6}) no primeiro e "2ε" no segundo. Porque a "ratio" (4ε) é igual nas duas equações decidiu-se arbitrariamente a entrada de x_1 para a base.

Nos quadros seguintes o sistema de equações técnicas não mais apresentou mais do que um termo inferior a 10^{-15} pelo que não foi necessário repetir a "perturbação" referida.