IV. MÉTODO GRÁFICO

O método gráfico só permite resolver problemas de PL de pequena dimensão (duas ou três variáveis) não tendo pois qualquer interesse prático.

O método gráfico permite visualizar um conjunto de situações que facilitam a compreensão da técnica de cálculo do método do Simplex.

Considere-se o seguinte modelo de PL:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$ (função de lucro)

$$\begin{array}{llclcll} \text{sujeito a:} & 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 & \text{(madeira)} \\ & 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 & \text{(horas de trabalho)} \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

O modelo na forma-padrão Simplex é:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2$

$$\begin{array}{llclclclcl} \text{sujeito a:} & 30x_1 & + & 20x_2 & + & F_1 & + & 0F_2 & = & 300 \\ & 5x_1 & + & 10x_2 & + & 0F_1 & + & F_2 & = & 110 \\ & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2 \geq 0; F_1, F_2 \geq 0} \end{array}$$

em que F_1 e F_2 representam, respectivamente, a madeira e as horas de trabalho não utilizadas na produção (variáveis de folga).

1. Graficar as restrições

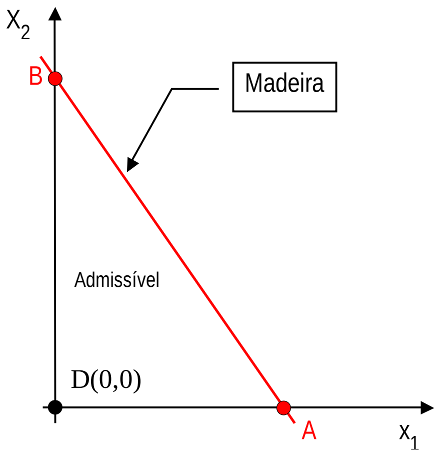
Considere-se a 1ª restrição $30x_1 + 20x_2 \leq 300$.

Relaxando a condição da desigualdade tem-se $30x_1 + 20x_2 = 300$ que sendo a equação de uma recta pode ser representada num sistema cartesiano calculando as coordenadas dos pontos A e B *em que a recta intersecta os eixos coordenados*.

No eixo das abcissas o ponto "A" tem ordenada nula ($x_2 = 0$) pelo que a equação se reduz a $30x_1 = 300$ ou seja $x_1 = 10$. O ponto "A" tem pois as coordenadas (10,0).

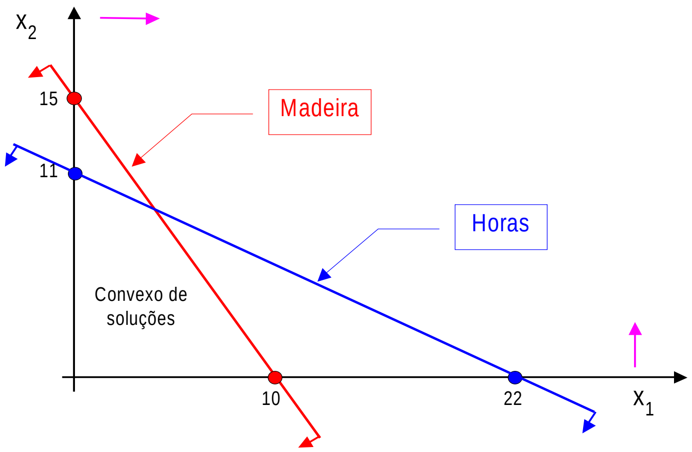
No eixo das ordenadas o ponto "B" tem abcissa nula ($x_1 = 0$) pelo que a equação se reduz a $20x_2 = 300$ ou seja $x_2 = 15$. O ponto "B" tem pois as coordenadas (0,15).

Na figura seguinte está graficada a recta definida pelos pontos “A” e “B”:



Veja-se a região admissível limitada pelos eixos coordenados (x_1 ,x_2 ≥ 0) e pela recta de restrição (observar o ponto D).

Considerando agora a 2ª restrição $5x_1 + 10x_2 \leq 110$ e as restrições lógicas $x_1,x_2 \geq 0$ tem-se:



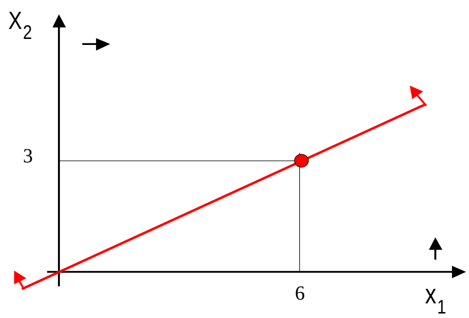
a. Caso Particular

Admita-se a necessidade de graficar a restrição $x_1 \leq 2x_2$

Neste caso a recta $x_1 - 2x_2 = 0$ passa na origem dos eixos (0,0). Outro ponto da recta pode calcular-se atribuindo um valor a x_1 (ou x_2) e resolvendo a equação em ordem a x_2 (x_1).

Considerando, por exemplo, $x_1 = 6$ tem-se $x_2 = 3$

A recta é traçada pelos pontos (0,0) e (6,3) como mostra a figura seguinte:



2. Variáveis de Folga

A 1ª restrição na forma-padrão do Simplex é $30x_1 + 20x_2 + F_1 = 300$.

A variável de folga F_1 representa o *desvio* entre a madeira consumida ($20x_1 + 30x_2$) e a madeira disponível (300). Para que F_1 seja **admissível** (viável; aceitável) é necessário que o *consumo* de madeira tenha um dos seguintes valores:

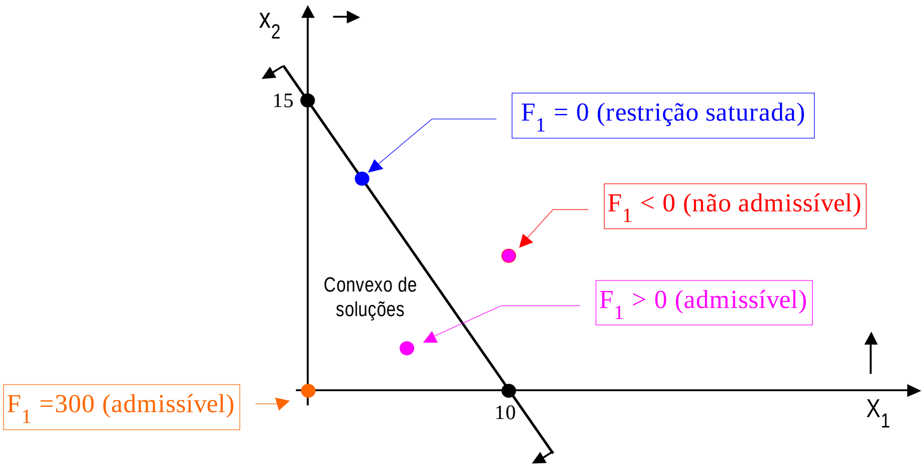
$30x_1 + 20x_2 = 0$ (não há consumo pelo que sobra $F_1 = 300$)

$30x_1 + 20x_2 < 300$ (consumo inferior à disponibilidade; sobra $F_1 = 300 - 30x_1 - 20x_2$)

$30x_1 + 20x_2 = 300$ (consumo igual à disponibilidade; não há sobra pelo que $F_1 = 0$; restrição saturada)

Se o consumo exceder a disponibilidade tem-se $30x_1 + 20x_2 > 300$; neste caso tem-se $F_1 < 0$ o que não é admissível.

Na figura seguinte apresentam-se as situações referidas:



3. Convexo de Soluções

Como foi referido no capítulo anterior, o convexo de soluções pode ser fechado, ilimitado ou vazio. Nas alíneas seguintes apresentam-se modelos de PL associados aos três tipos referidos.

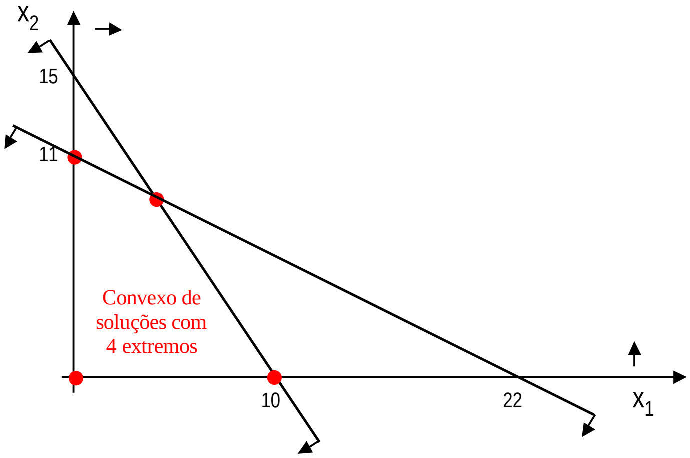
a. Convexo Fechado

Considere-se o modelo apresentado na secção anterior:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$

$$\text{s.a.:}\quad \begin{array}{rcrcl} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1\,,\,x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Veja-se na figura seguinte o convexo de soluções (fechado) e respectivos extremos:



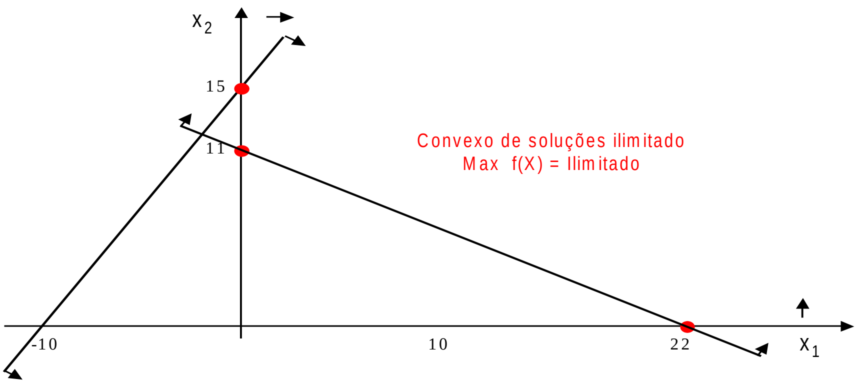
b. Convexo Ilimitado

Considere-se o modelo Max $f(X) = 4x_1 + 3x_2$

$$\text{s.a.:}\quad \begin{array}{rcrcl} -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \geq & 110 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Veja-se na figura seguinte o convexo de soluções ilimitado e Max f(X) ilimitado.

Notar que f(X) tem valor finito em 3 extremos do espaço de soluções.



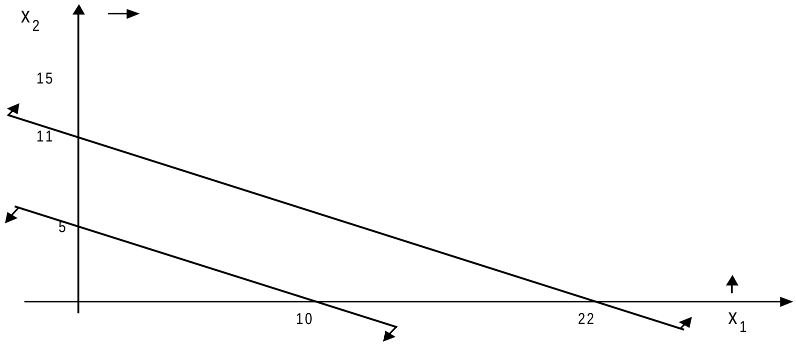
c. Convexo Vazio

Considere-se o modelo:

Max $f(X) = 4x_1 + 3x_2$

$$\text{s.a.:}\quad \begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 6x_2 & \leq & 30 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \geq & 110 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Veja-se na figura seguinte o convexo de soluções vazio:



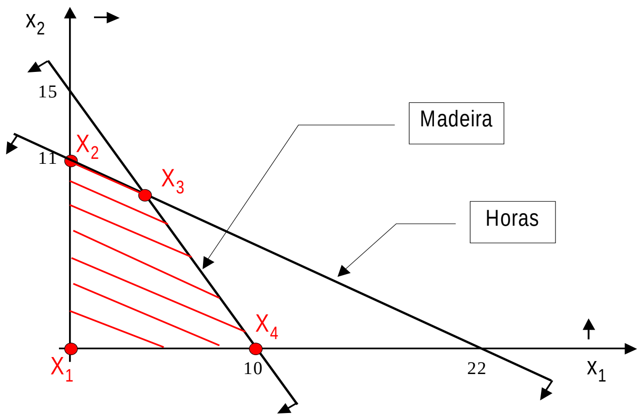
4. Extremos do Convexo de Soluções

Considere-se o modelo padrão proposto na introdução deste capítulo.

Atendendo às regiões do plano onde as variáveis de folga têm valores negativo (não admissível), nulo (restrição saturada) e positivo (recurso abundante) é possível determinar graficamente o vector X_j da solução associada a cada um dos extremos do convexo.

Conhecidas as coordenadas dos extremos é possível calcular o valor da função objectivo em cada um deles e por comparação determinar a solução óptima.

Na figura seguinte estão assinalados os extremos X_1 , X_2 , X_3 e X_4:



A solução X_1 é $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \\ 110 \end{bmatrix}$ porque situando-se o extremo na origem dos eixos tem abcissa e ordenada nulas. As variáveis de folga têm valor positivo dada a posição do ponto relativamente às rectas de restrição da madeira e das horas. Sendo o sistema de equações da forma-padrão:

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} 30x_1 & + & 20x_2 & + & F_1 & + & 0\,F_2 & = & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & + & 0\,F_1 & + & F_2 & = & 110 \end{array} \right.$$

determinam-se $F_1 = 300$ e $F_2 = 110$.

O valor da função objectivo é $f(X_1)= 6x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$

A solução X_2 é $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix}$ porque situando-se o extremo no eixo das ordenadas tem abcissa nula e ordenada 11 ou seja $x_1 = 0$ e $x_2 = 11$. A variável de folga F_2 é nula porque o extremo pertence à recta de restrição das horas de trabalho (verifica-se a igualdade $5x_1 + 10x_2 = 110$).

Sendo o sistema de equações da forma-padrão:

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} 30x_1 & + & 20x_2 & + & F_1 & + & 0\,F_2 & = & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & + & 0\,F_1 & + & F_2 & = & 110 \end{array} \right.$$

conhecendo os valores de x_1 , x_2 , x_4 determina-se $F_1 = 80$. Trata-se de um valor positivo dada a posição do extremo relativamente à recta de restrição da madeira.

O valor da função objectivo é $f(X_2)= 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2 = 88$

A solução X_3 é $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ em que as coordenadas x_1 e x_2 foram obtidas graficamente (a figura está à escala).

Estas coordenadas podem determinar-se analiticamente no sistema de equações das duas rectas:

$$\left| \begin{array}{ccccc} 30x_1 & + & 20x_2 & = & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & = & 110 \end{array} \right| \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = 4 \\ \Rightarrow x_2 = 9 \end{array}$$

As variáveis de folga F_1 e F_2 são nulas porque o extremo pertence às rectas de restrição da madeira e das horas de trabalho (restrições saturadas).

O valor da função objectivo é $f(X_3)= 6x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 96$.

A solução X_4 é $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix}$ porque situando-se este extremo no eixo das abcissas tem ordenada nula e abcissa 10 ou seja $x_1 = 10$ e $x_2 = 0$. A variável de folga F_1 é nula porque o extremo pertence à recta de restrição da madeira (verifica-se a igualdade $30x_1 + 20x_2 = 300$). No sistema de equações da forma-padrão conhecendo os valores de x_1 , x_2 , x_3 determina-se $F_2 = 60$.

O valor da função objectivo é $f(X_4)= 6x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 60$.

Sabendo-se que a solução óptima é um extremo do espaço de soluções admissíveis e comparando os valores da função objectivo nos quatro extremos conclui-se que a solução óptima é:

$$X^* = X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ com } \quad f(X^*) = 96 \; u.m.$$

Da leitura da solução óptima conclui-se:

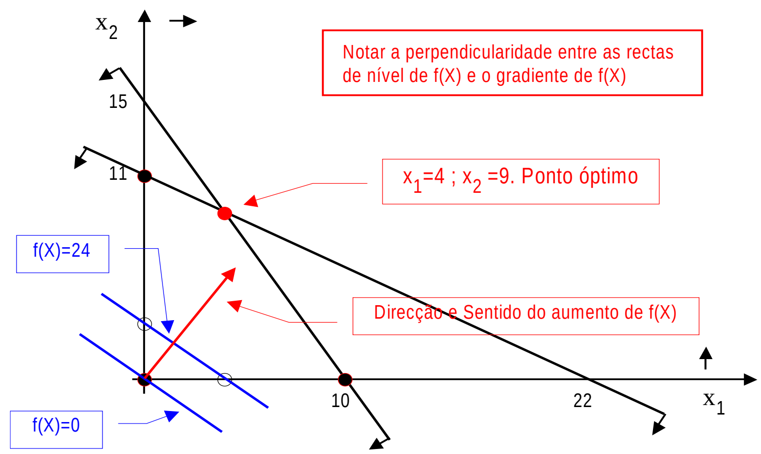
- plano óptimo de produção : $x_1 = 4$; $x_2 = 9$
- recursos: a madeira e as horas de trabalho são empregues na totalidade (não há sobras)
- lucro máximo = 96 u.m.

5. Solução Óptima

Na secção anterior detectou-se a solução óptima *após exame de todos os extremos do convexo* de soluções. Nesta secção procederemos à determinação gráfica do ponto óptimo de forma mais rápida aplicando o conceito de recta de nível de um plano.

A função objectivo é $f(X) = 6x_1 + 8x_2$. Considerando f(X)=24 (por exemplo) define-se a equação $6x_1 + 8x_2 = 24$ de uma recta de nível do plano que é lugar geométrico dos valores de f(X)=24. Esta recta intersecta o eixo das abcissas em x1=4 e o das ordenadas em x_2=3. Qualquer ponto desta recta tem coordenadas x_1 e x_2 a que corresponde f(X)=24.

Sabendo que em qualquer plano **todas as rectas de nível são paralelas entre si** é possível traçar na origem dos eixos a recta de nível onde f(X)=0. Deste modo fica a conhecer-se a posição relativa das rectas de nível "0" e "24" e assim ***conhece-se a direcção e sentido de aumento da função objectivo.*** Veja-se na figura seguinte as duas rectas de nível e a direcção e sentido de aumento de f(X):



Resta agora identificar a última das rectas de nível que se pode traçar contendo um extremo do convexo de soluções. Na figura conclui-se que o ponto de coordenadas x_1=4 , x_2=9 é o extremo óptimo.

Porque é único a Solução Óptima é Única.

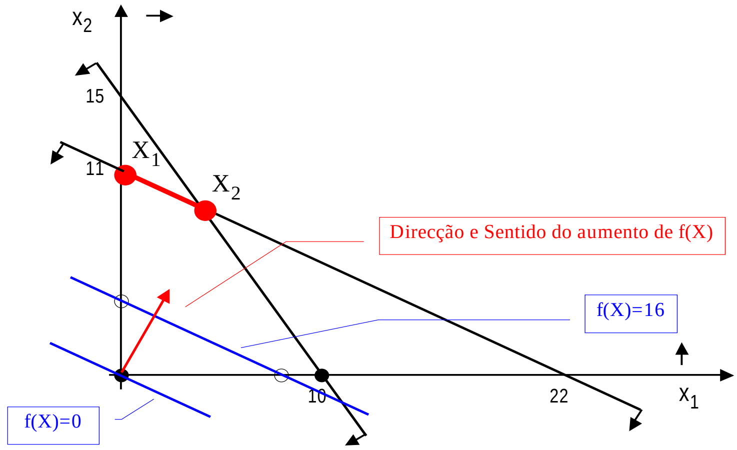
6. Solução Óptima Indeterminada

Uma solução óptima diz-se Indeterminada quando o máximo (ou mínimo) da função objectivo se verifica em mais do que um ponto do convexo de soluções. Considere-se o modelo de PL:

Max f(X) = $2x_1 + 4x_2$ (função de lucro)

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{lcll} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 30 \\ 0.5x_1 & + & 1x_2 & \leq 11 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

e determine-se geometricamente a solução óptima (ver a figura seguinte):



A "última" recta de nível coincide com a recta de restrição $0.5x_1 + x_2 = 11$.

Há dois extremos X_1 e X_2 onde a solução é óptima.

Os pontos $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ são soluções óptimas com valor f(X)= 44.

Veja-se agora que qualquer ponto do segmento $\overline{X_1 X_2}$ é também ponto óptimo.

Os pontos do segmento podem obter-se por combinação linear convexa pelo que a expressão geral das soluções óptimas é:

$$X^* = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \; com \; \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \; e \; \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \text{ onde } f(X^*) = 44 \Rightarrow Max.$$