III. Bases Teóricas do Método do Simplex

Em variados domínios de aplicação há modelos matemáticos com a seguinte estrutura:

- um conjunto de "n" variáveis x_1 , x_2 , ... , x_n
- um conjunto de "m" condições lineares (m<n) relacionando as variáveis por meio de desigualdades do tipo $a_{11}\, x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}\, x_n \leq b_1$
- uma função *linear* $f(X) = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + ... + c_n\, x_n$ da qual se pretende determinar o *Máximo ou Mínimo*
- a condição de *não negatividade das variáveis* $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ... , $x_n \geq o$

Este tipo de modelo, denominado *Modelo de Programação Linear*, pode ser generalizado relativamente ao sentido das desigualdades e ao domínio das variáveis.

O matemático americano George Dantzig, em 1947, estabeleceu uma forma sistemática de resolução do modelo de programação linear recorrendo à teoria das equações lineares, ao conceito de independência de vectores e à álgebra matricial. Neste capítulo são abordados os aspectos essenciais para compreender o Método do Simplex.

1. Modelo de Programação Linear

Admita-se uma empresa que pretende Optimizar o plano de produção dos bens A e B na situação seguinte:

Recursos críticos disponíveis:

Madeira	300 metros
Horas de trabalho	110 horas

Consumos unitários previstos:

Produto	Madeira (metros)	Horas de Trabalho (h)
A	30	5
B	20	10

Lucro unitário da venda (u.m.)

A	B
6	8

O Modelo Matemático para Optimizar a Produção de A e B é o seguinte:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcr} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1 , x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

em que:

- as *variáveis* x_1 e x_2 representam respectivamente os níveis de produção de A e B;
- as relações de tipo "≤" garantem que os consumos de madeira e horas de trabalho não ultrapassam as disponibilidades existentes;
- a função *linear* $f(x_1 , x_2)$ representa o lucro que se pretende maximizar;
- as variáveis só podem tomar valores não negativos;

2. Sistemas de Equações Lineares

Considere-se o sistema de "m" equações lineares com "n" variáveis (x_1 , x_2 , ... , x_n):

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \ldots & .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

em que a_{ij} e b_i são *valores reais* conhecidos e constituem respectivamente coeficientes das variáveis e termos independentes do sistema de equações.

O sistema de equações na forma matricial é : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$ (tipo AX = B.)

Nota: A matriz [A , B] denomina-se *matriz completa* do sistema.

O sistema de equações pode ser:

Incompatível

Característica de A < Característica de [A , B]

Compatível

Característica de A = Característica de [A , B]

Determinado (solução única)	Indeterminado (solução múltipla)
Característica de A = n (número de variáveis)	Característica de A < n (número de variáveis)

Admita-se " m<n " (número de equações inferior ao número de variáveis) o que não constitui hipótese restritiva pois que se a característica[1] da matriz A for "m_1 < m" ou o sistema é incompatível e não tem interesse para o estudo em curso ou é compatível e neste caso "m_1" será a característica a considerar.

Se a *característica* da matriz A for "m" então o sistema de equações é *Indeterminado* de grau "n-m".

De facto, supondo que a matriz não singular A_m de ordem "m" (que forçosamente existe) é constituída pelas primeiras m linhas e colunas da matriz A então há outra matiz A_{n-m} constituída também por "m" linhas mas com as "n-m" colunas restantes, ou seja:

$$\begin{bmatrix} A_m & A_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ X_{n-m} \end{bmatrix} = [B]$$

[1] A característica de uma matriz é o número máximo de linhas (colunas) que são linearmente independentes. É igual à ordem do determinante de maior ordem diferente de zero que é possível formar no quadro da matriz dada .

As coordenadas do vector $X_{n\text{-}m}$ são arbitrárias (sistema indeterminado de ordem "n-m"); considerando-as nulas o sistema anterior fica:

$$\begin{bmatrix} A_m & A_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ 0 \end{bmatrix} = [B] \text{ e portanto } [A_m][X_m] = [B]$$

A solução deste último sistema é $X_m = A_m^{-1} B$.

As variáveis pertencentes ao vector X_m denominam-se Variáveis Básicas (VB).

As restantes variáveis, pertencentes ao vector $X_{n\text{-}m}$ (que são consideradas nulas), são denominadas Variáveis Não Básicas (VNB).

Dado que no sistema AX=B a matriz A tem "n" vectores, o sistema tem, no máximo, C_m^n soluções denominadas Soluções Básicas.

Exemplo

Considere-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 17 \end{cases}$$

Na forma AX=B o sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix}$.

O número máximo de soluções deste sistema é $C_m^n = C_2^3 = 3$, correspondentes a 3 Bases de um espaço vectorial de dimensão m=2.

Para cada base tem-se um sistema do tipo $[A_m][X_m] = [B]$ cuja solução é $X_m = A_m^{-1} B$ com $X_{n\text{-}m} = 0$:

Sistema nº 1 (VB: x_1 e x_2)	Sistema nº 2 (VB: x_1 e x_3)	Sistema nº 3 (VB: x_2 e x_3)
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 = 17 \\ x_3 = 0\ (VNB) \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_3 = 9 \\ x_1 + 4x_3 = 17 \\ x_2 = 0\ (VNB) \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 4x_3 = 17 \\ x_1 = 0\ (VNB) \end{cases}$

Na forma matricial tem-se:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix}$ $x_3 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix}$ $x_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix}$ $x_1 = 0$

Recorrendo à inversão da matriz dos coeficientes das Variáveis Básicas, obtêm-se as soluções básicas:

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -8 \end{bmatrix}$ $x_3 = 0$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$ $x_2 = 0$	$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/7 \\ 25/7 \end{bmatrix}$ $x_1 = 0$

Nota: No sistema de equações lineares com "m" equações, "n" variáveis e a matriz A_{mxn} dos coeficientes das variáveis com característica "k" podem ter-se as seguintes situações:

$m \leq n$ (nº de equações não excede nº de variáveis)			
Situação	Determinado	Indeterminado	Grau da Indeterminação
$k = m = n$	⊕		
$k = m \leq n$		⊕	n - m
$k < m \leq n$		⊕	n - k (m-k) eq. redundantes

$m > n$ (nº de equações superior ao nº de variáveis)			
Situação	Determinado	Indeterminado	Grau da Indeterminação
$k = n$	⊕ (m - n) eq. redundantes		
$k < n$		⊕	n - k (m-k) eq. redundantes

3. Combinação Linear Convexa

Considerem-se em R^n (espaço a "n" dimensões) os pontos:

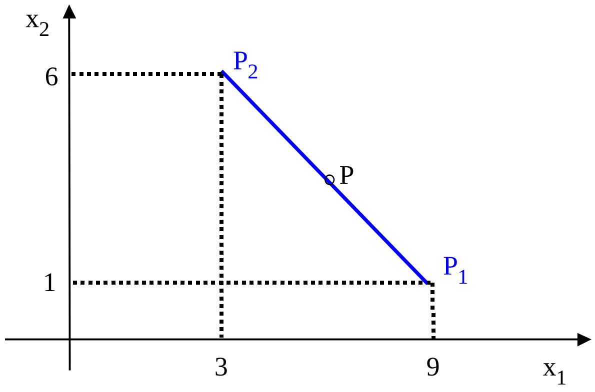
$$X_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Deste conjunto admitam-se "k" pontos X_1 , X_2 … , X_k e calcule-se um ponto X tal que:

$$X = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i X_i \;\; com \;\; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \;\; e \;\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Este ponto X denomina-se Combinação Linear Convexa dos pontos X_1 , X_2 , … , X_k tratando-se de um conceito fundamental do Método do Simplex (a combinação linear diz-se Convexa Estrita para $0 < \lambda < 1$).

Veja-se em R^2 o significado geométrico do conceito:



Considerando os pontos P_1 e P_2 de coordenadas $X_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} e \ X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, respectivamente, as coordenadas de qualquer ponto P pertencente ao segmento P_1P_2, podem definir-se pela equação:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \ \text{ com } \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_1 , \lambda_2 \geq 0$$

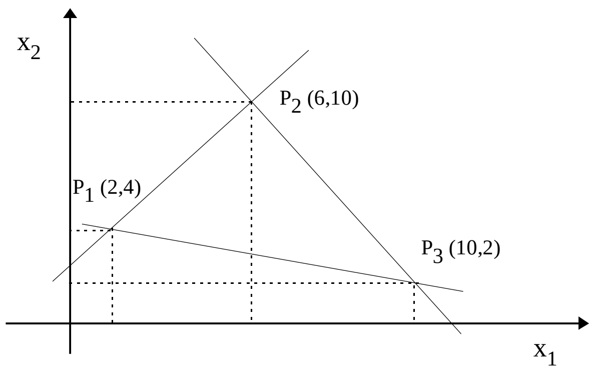
Para $\lambda_1 = {}^1/_3$ e $\lambda_2 = {}^2/_3$ as coordenadas de P são:

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Se em R^2 se considerarem 3 pontos não colineares P_1 , P_2 , P_3 qualquer ponto do plano pode ser expresso combinando linearmente P_1 , P_2 e P_3 :

$$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \ = \ \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (com \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1)$$

Se estabelecermos que a soma dos escalares λ_1, λ_2, e λ_3 é igual à unidade então P é combinação linear convexa dos 3 pontos e pertence ao triângulo por eles definido como mostra a figura seguinte:



No quadro seguinte apresentam-se várias combinações de valores de λ_1, λ_2, e λ_3 para definir as coordenadas de um ponto P que é combinação linear convexa dos pontos P_1 , P_2 , P_3 :

λ_1	λ_2	λ_3	Coordenadas do ponto P	Posição Relativa do Ponto P
0	0	1	(10,2)	Coincidente com P_3
1	0	0	(2,3)	Coincidente com P_1
0	1	0	(6,10)	Coincidente com P_2
0.2	0.8	0	(5.2,8.8)	Segmento P_1P_2 *
0.7	0	0.3	(4.4,3.4)	Segmento P_1P_3 *
0	0.4	0.6	(8.4,5.2)	Segmento P_2P_3 *
0.3	0.2	0.5	(6.8,4.2)	Interior do triângulo *

As equações das rectas definidas por cada par de pontos são

- $^{-3}/_2\ x_1 + x_2 = 1$; recta definida por P_1 e P_2
- $2x_1 + x_2 = 22$; recta definida por P_2 e P_3
- $x_1 + 4x_2 = 18$; recta definida por P_1 e P_3

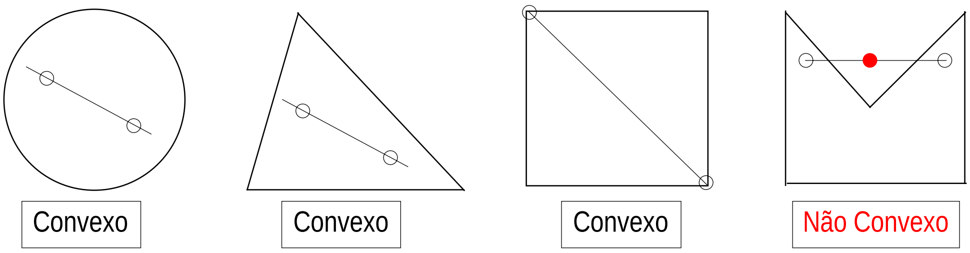
pelo que um ponto P situado nos lados do triângulo ou no seu interior tem coordenadas que devem satisfazer simultaneamente as seguintes condições (restrições):

- $-3/2\ x_1 + x_2 \leq 1$
- $2x_1 + x_2 \leq 22$
- $x_1 + 4x_2 \geq 18$

a. Conjunto Convexo

Um conjunto n-dimensional (no sentido de espaço n-dimensional) diz-se Convexo se pertence ao conjunto qualquer ponto de um segmento de recta definido por quaisquer dois pontos do conjunto.

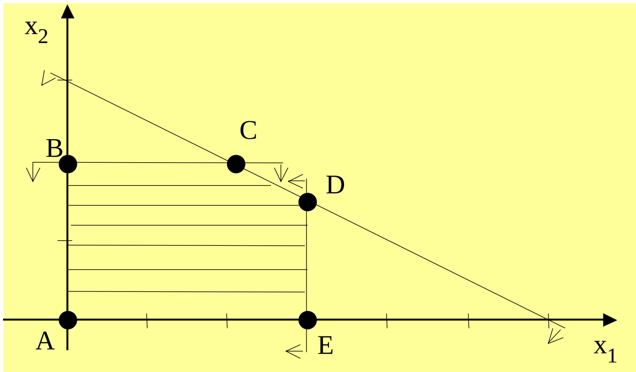
Atendendo ao conceito de Combinação Linear Convexa, exposto na secção anterior, num conjunto convexo toda a combinação linear convexa de qualquer par de pontos do conjunto é ponto do conjunto (veja-se a interpretação geométrica em R2 apresentada nas figuras seguintes):



b. Pontos Extremos de um Conjunto Convexo

Um ponto de um conjunto convexo diz-se Extremo ou Vértice do conjunto *se não é possível defini-lo como combinação linear convexa estrita*.

Considere-se o conjunto definido pelas relações $x_1 \leq 3$; $x_2 \leq 2$; $x_1 + 2x_2 \leq 6$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$:



Qualquer ponto da zona tracejada satisfaz **todas** as relações propostas (solução admissível) pelo que pertence ao conjunto.

O conjunto das soluções é Convexo.

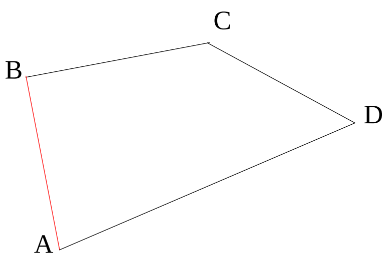
Os pontos A, B, C, D, E são Extremos.

c. Poliedro Convexo Mínimo

Dado um conjunto de "n" pontos, o conjunto convexo mínimo contendo aqueles pontos diz-se Poliedro Convexo Mínimo (no texto será simplesmente referido como Convexo).

Denomina-se **Aresta do Convexo** o segmento de recta cujos extremos são extremos do convexo.

Os extremos de uma Aresta do Convexo dizem-se Extremos Adjacentes.



O segmento de recta AB é uma Aresta do Convexo. Os pontos A e B são Adjacentes.

4. Forma Padrão do Modelo de Programação Linear

Para aplicar o Método do Simplex na resolução de modelos de Programação Linear é necessário que estes sejam reduzidos a uma forma particular denominada Forma Padrão do Simplex a seguir definida:

MAX (ou Min) f(X) = CX	"C" é a matriz-linha dos coeficientes das variáveis na função objectivo; "X" é o vector coluna das variáveis do modelo na forma-padrão.
AX = B	Um sistema de equações organizado a partir das restrições técnicas.
$B \geq 0$	"B" é o vector coluna dos termos independentes das restrições técnicas (segundos membros). Os termos independentes das equações são não negativos.
$X \geq 0$	As variáveis do modelo-padrão são não negativas.

Para reduzir um modelo de PL à forma-padrão actua-se do seguinte modo:

a. Restrição Técnica do tipo "≤" (emprego da variável de Folga)

A redução da restrição à forma de igualdade faz-se pela *introdução de uma variável auxiliar não negativa* com coeficiente unitário (variável de folga).	Exemplo A restrição $x_1 + x_2 \leq 5$ fica na forma-padrão: $x_1 + x_2 + F_1 = 5$ com $F_1 \geq 0$ (F_1 é a *variável de folga*)

b. Restrição técnica do tipo "≥" (emprego da variável Excedentária)

A redução da restrição à forma de igualdade faz-se pela *introdução de uma variável auxiliar não negativa* com coeficiente "-1" (variável excedentária).	Exemplo A restrição $2x_1+3x_2 \geq 10$ fica na forma-padrão: $2x_1 + 3x_2 - E_1 = 10$ com $E_1 \geq 0$ (E_1 é a *variável de excedentária)*

c. Termo Independente Negativo

A redução da restrição à forma padrão é feita multiplicando os dois membros por "-1" e trocando o sinal da desigualdade.	Exemplo A restrição $5x_1 + x_2 \geq - 20$ toma a forma: $-5x_1 - x_2 \leq 20$

d. Variável Não Positiva (emprego da variável simétrica)

Uma variável não positiva é substituída no modelo por uma variável auxiliar simétrica (*não negativa*).	Exemplo Max f(X) = $x_1 + 3x_2$ s.a. $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ $x_1 + 4x_2 \leq 8$ $x_1 \leq 0$; $x_2 \geq 0$ Considera-se $x_1 = -x_1^{'}\ com\ x_1^{'} \geq 0$ e substitui-se no modelo ficando este: $Max\ f(X) = -x_1^{'} + 3x_2$ $-3x_1^{'} + 2x_2 \leq 12$ $-x_1^{'} + 4x_2 \leq 8$ $x_1^{'}, x_2 \geq 0$

e. Variável Livre (sem restrição de sinal) (emprego de uma diferença de variáveis não negativas)

Uma variável livre é **substituída no modelo pela diferença de duas variáveis auxiliares não negativas.** No exemplo, após atingido o ponto óptimo, o valor de x_2 é a "<u>diferença</u>" entre os valores óptimos das variáveis auxiliares de substituição. Dado que estas **são sempre complementares e não negativas** a "<u>diferença</u>" é negativa ou nula ou positiva garantindo-se pois a liberdade de o ponto óptimo ser pesquisado não atendendo ao sinal de x_2.	Exemplo Max f(X) = $3x_1 + 5x_2$ s.a. $x_1 + 6x_2 \leq 12$ $x_1 + 2x_2 \leq 8$ $x_1 \geq 0$; x_2 livre Considera-se $x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}\ com\ x_2^{'}, x_2^{''} \geq 0$ e substitui-se no modelo ficando este: Max f(X) = $3x_1 + 5(x_2^{'} - x_2^{''})$ s.a. $x_1 + 6(x_2^{'} - x_2^{''}) \leq 12$ $x_1 + 2(x_2^{'} - x_2^{''}) \leq 8$ $x_1, x_2^{'}, x_2^{''} \geq 0$

Se no modelo de PL figura <u>mais do que uma variável livre</u> é possível efectuar o seu tratamento simultâneo recorrendo a uma única variável auxiliar dado que <u>*qualquer vector pode ser expresso pela diferença entre 2 vectores não negativos*</u> como mostra o exemplo seguinte para o vector $\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix}-9\\1\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\10\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9\\9\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\10\\4\end{bmatrix}-w\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad (com\ w=9)$$

Atendendo ao exposto as variáveis livres "x_j" podem ser substituídas pela diferença

$$\boxed{(x'_j - w)\ com\ x'_j, w \geq 0.}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}&Max\ \ f(X)=10x_1+2x_2+2x_3\\&s.a.\\&3x_1+4x_2\leq 10\\&2x_1+x_3\leq 12\\&x_1,x_2\ livres; x_3\geq 0\end{aligned}$$

Considera-se $\begin{cases}x_1 = x_1' - w\\ x_2 = x_2' - w\end{cases}$. Substituindo obtém-se:

$$\boxed{\begin{aligned}&Max\ \ f(X)=10(x_1'-w)+2(x_2'-w)+2x_3\\&s.a.\\&3(x_1'-w)+4(x_2'-w)\leq 10\\&2(x_1'-w)+x_3\leq 12\\&x_1',x_2',x_3,w\geq 0\end{aligned}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned}&Max\ \ f(X)=10x_1'+2x_2'+2x_3-12w\\&s.a.\\&3x_1'+4x_2'-7w\leq 10\\&2x_1'+x_3-2w\leq 12\\&x_1',x_2',x_3,w\geq 0\end{aligned}}$$

Actuando deste modo, independentemente do número de variáveis livres, é aumentada apenas uma variável (w) ao número total de variáveis do modelo para aplicar o método Simplex.

f. Variável com Limite Inferior

O tempo de cálculo da solução óptima de um modelo de PL aumenta muito mais com o número de restrições técnicas do que com o número de variáveis.

Se no modelo há variáveis com limite inferior ($x_j \geq k$), o cálculo do óptimo obriga a considerar estas restrições técnicas o que pode evitar-se substituindo a variável x_j por $(x'_j + k)\ com\ x'_j \geq 0.$

Exemplo

Max f(X) = $3x_1 + 5x_2$

s.a. $3x_1 + 4x_2 \leq 24$

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 2$

$x_2 \geq -3$

Pode reduzir-se o número de restrições técnicas considerando:

$$x_1 = x_1' + 2\ ;\ x_2 = x_2' - 3$$

Substituindo fica:

Atenção	$Max\ f(X) = 3(x_1' + 2) + 5(x_2' - 3)$
Esta técnica dificulta a interpretação económica do modelo pelo que o software do autor não a utiliza (exceptua-se o caso da programação linear inteira onde não há interpretação económica).	s.a. $3(x_1' + 2) + 4(x_2' - 3) \leq 24$ $2(x_1' + 2) + (x_2' - 3) \leq 8$ $x_1', x_2' \geq 0$ (feita a translação dos eixos coordenados)

g. Maximização / Minimização da Função-Objectivo

O método do Simplex permite o cálculo do extremo condicionado da função linear (máximo ou mínimo). Para calcular o Mínimo de uma função objectivo, pode maximizar-se a função simétrica ou seja considerar a relação Min f(X) = - MAX [- f(X)].

Nota: O software do autor optimiza directamente a função objectivo tal como é feito neste manual.

h. Exemplo de redução de um modelo de PL à forma padrão do Simplex

Modelo de PL:

$$\text{Max } f(X) = x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

s.a.

$$\begin{array}{ccccccc} -2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & \geq & -12 \\ x_1 & + & 2x2 & - & x_3 & \geq & 6 \\ & & & & x_1 & \text{livre} & \\ & & & & x_2 & \geq & 2 \\ & & & & x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

Para reduzir o modelo à forma-padrão do Simplex é necessário:

- transformar em igualdades as 1ª e 2ª restrições técnicas;
- multiplicar por "-1" a primeira restrição que tem termo independente negativo;
- substituir as variáveis x_1 e x_3 por variáveis não negativas;
- pode substituir-se a variável x_2 (variável com limite inferior) para reduzir o número de equações no sistema-padrão (o que se fará para exemplificação).

Forma Original	Forma Padrão
x_1 livre	A variável x_1 substitui-se peça diferença de duas variáveis não negativas $x_1 = x_1' - x_1''$
$x_2 \geq 2$	A variável x_2 substitui-se do seguinte modo $x_2 = x_2' + 2$.
$x_3 \leq 0$	A variável x_3 substitui-se por uma variável simétrica $x_3 = -x_3'$.

$-2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq -12$	Positivar o 2º membro multiplicando por "-1" $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 12$.

	Adicionar ao 1º membro a variável de folga F_1 $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + F_1 = 12$ Substituir as variáveis x_1 , x_2 , x_3 $2x_1' - 2x_1'' + 3x_2' + 4x_3' + F_1 = 6$
$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6$	Subtrair ao 1º membro a Variável excedentária E_2 $x_1 + 2x_2 - x_3 - E_2 = 6$ Substituir as variáveis x_1, x_2, x_3 $x_1' - x_1'' + 2x_2' + x_3' - E_2 = 2$
$f(X)= x_1 + 2x_2 - 3x_3$	Substituir as variáveis x_1, x_2, x_3 $f(X) = x_1' - x_1'' + 2x_2' + 3x_3' + 0F_1 + 0E_2 + 4$
	Condição de não negatividade: $x_1', x_1'', x_2', x_3', F_1, E_2 \geq 0$

Modelo na forma padrão do Simplex :

MAX $f(X) = x_1' - x_1'' + 2x_2' + 3x_3' + 0F_1 + 0E_2 + 4$

s.a.

$$2x_1' - 2x_1'' + 3x_2' + 4x_3' + F_1 = 6$$

$$x_1' - x_1'' + 2x_2' + x_3' - E_2 = 2$$

$$x_1', x_1'', x_2', x_3', F_1, E_2 \geq 0$$

5. Soluções do modelo de PL

Considere-se o modelo de PL na forma-padrão:

	Forma Matricial
Max $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$	MAX $f(X) = CX$
s.a. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$ … $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$	$AX = B$
$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \quad (m \leq n)$	$X \geq 0$

SOLUÇÃO: conjunto de valores das variáveis que satisfazem o sistema de equações técnicas

SOLUÇÃO ADMISSÍVEL: solução em que todas as variáveis *satisfazem a condição de não negatividade*, ou seja é uma solução que satisfaz todas as restrições (técnicas e lógicas)

SOLUÇÃO BÁSICA ADMISSÍVEL (SBA): é a solução admissível de uma base

SOLUÇÃO BÁSICA ADMISSÍVEL (SBA)	
	Degenerada Se uma ou mais variáveis básica são nulas
	Não degenerada Se todas as variáveis básicas são positivas
	Óptima Se nela a função objectivo atinge o máximo

6. Análise do Sistema de Equações AX=B com $X \geq 0$

   a. O conjunto de soluções admissíveis do sistema é um conjunto Convexo

Demonstração

Se X_1 e X_2 são soluções admissíveis do sistema então $AX_1 = AX_2 = B$.

Considere-se a solução X obtida por combinação linear convexa de X_1 e X_2

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \qquad \text{com } \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_1 , \lambda_2 \geq 0$$

Temos então:

$$\begin{aligned}
AX &= B \\
AX &= A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) \\
AX &= \lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2 \\
AX &= \lambda_1 B + \lambda_2 B \\
AX &= B(\lambda_1 + \lambda_2) \\
AX &= B
\end{aligned}$$

o que prova que X também é uma solução admissível ($X \geq 0$) pertencente ao convexo de soluções.

   b. As soluções básicas admissíveis são Extremos do Convexo

Demonstração

Admita-se que o Convexo de soluções do sistema AX=B é fechado[1] e X uma SBA ($X \geq 0$).

No vector X há "n-m" coordenadas nulas. Supondo que o sistema foi resolvido em ordem às primeiras "m" equações então o vector X é :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \\ x_{m+1} = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{bmatrix} \qquad \text{com } (x_1 , \dots , x_m \geq 0)$$

[1] O convexo das soluções admissíveis pode ser Vazio, Ilimitado ou Fechado; considera-se esta última hipótese dado que o método Simplex permite detectar as outras duas.

A solução do sistema para X pode escrever-se:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_mP_m + 0.\ P_{m+1} + \dots + 0.\ P_n = B$$

em que P_1 , P_2 , ... , P_n são vectores-coluna dos coeficientes das variáveis nas equações do sistema e B é o vector dos termos independentes.

Como as últimas "n-m" coordenadas são nulas então a solução resume-se a :

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_mP_m = B$$

Se X não for extremo do convexo pode obter-se por combinação linear convexa dos pontos U e V do convexo (U ≠ V) *ou seja*

$$X = \lambda_1U + \lambda_2V \text{ com } \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_1 , \lambda_2 \geq 0$$

Para obter X por combinação linear de U e V é necessário que nestes vectores as últimas "n-m" coordenadas sejam nulas, para que o sejam no vector X (o escalar λ não pode ter valor nulo), pelo que em U e V as soluções satisfazem:

$$u_1P_1 + u_2P_2 + \dots + u_mP_m = B \text{ no caso da solução U}$$

$$v_1P_1 + v_2P_2 + \dots + v_mP_m = B \text{ no caso da solução V}$$

Nas três soluções o conjunto de vectores dos coeficientes das variáveis é o mesmo.

Designando-o por P, então temos PX = PU = PV = B o que conduz ao absurdo de U e V serem iguais o que contradiz o pressuposto de serem distintos. Esta contradição obriga a negar a possibilidade de X poder ser obtido por combinação linear convexa de pontos do convexo e daí concluir que X é extremo do convexo de soluções.

c. Os Extremos do Convexo são soluções básicas admissíveis

Demonstração

Admita-se que $X=\begin{bmatrix} X_m \\ X_{n-m} \end{bmatrix}$ é um extremo do convexo de soluções.

Então:

$$A_mX_m + A_{n-m}X_{n-m} = B \text{ ou seja } X_m = A_m^{-1}(B - A_{n-m}X_{n-m}) \text{ com } X_{n-m} = 0$$

Sendo $X_m \geq 0$ então X é admissível.

Se admitirmos que $X_{n-m} \neq 0$ ou seja $X_{n-m} \geq 0$ então é possível definir dois pontos X_1 e X_2 tais que:

$$X_1 = A_m^{-1}\left[B - A_{n-m}(X_{n-m} + \delta)\right]$$

$$X_2 = A_m^{-1}\left[B - A_{n-m}(X_{n-m} - \delta)\right]$$

em que $\delta \geq 0$ é um vector-coluna com "n-m" elementos que garantem a não negatividade das coordenadas de X_1 e X_2.

Estabelecendo X como combinação linear convexa de X_1 e X_2 tem-se:

$$X = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 \text{ com } \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_1 , \lambda_2 \geq 0$$

Para $\lambda={}^1/_2$ tem-se X = $^1/_2X_1$ + $^1/_2X_2$ = $A_m^{-1}(B - A_{n-m}X_{n-m})$ o que evidencia que se $X_{n\text{-}m} \geq 0$ então X não é extremo como se pretendia demonstrar.

Resulta assim que se X é extremo do convexo de soluções é forçosamente SBA.

SUMÁRIO DA ANÁLISE DO SISTEMA AX = B

- O número máximo de soluções é C_m^n (n = nº de variáveis ; m = nº de equações do sistema)
- Uma SBA não degenerada está associada a um único extremo
- A um extremo podem estar associadas mais do que uma SBA degenerada (ver exemplo na secção seguinte)

d. Exemplo

Considerem-se as seguintes restrições de um modelo de PL:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Na forma-padrão do Simplex tem-se o sistema de equações:

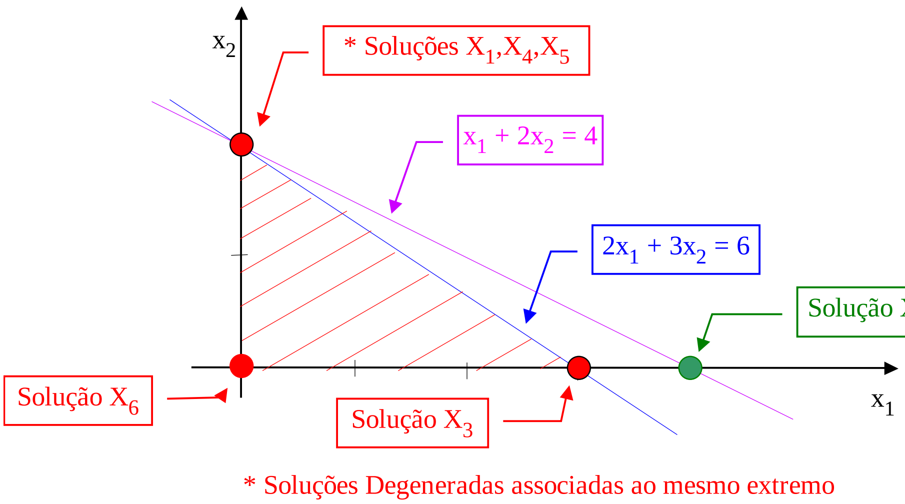
$$\left|\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & F_1 & + & 0x_4 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & F_2 & = & 4 \\ & & & & & & x_{1,}\ x_2, F_1, F_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Considerando P_1, P_2, P_3, P_4 os vectores-coluna dos coeficientes das variáveis x_1, x_2, F_1, F_2 o sistema na forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A característica da matriz de coeficientes é igual a 2 pelo que o sistema é indeterminado de ordem “n-m” = 4 – 2 = 2.

O número máximo de soluções do sistema de equações é $C_2^4 = 6$ como se vê na figura seguinte:



O convexo de soluções (espaço de soluções) do modelo de PL está assinalado a tracejado.

Das soluções do sistema de equações X_1 , … , X_6 só a solução X_2 **não é admissível** porque não pertence ao convexo.

O cálculo das soluções do sistema, a seguir apresentado, é efectuado resolvendo-o “em ordem a duas variáveis” e considerando nulas as restantes variáveis.

<table>
<tr><th colspan="2">Solução nº 1</th></tr>
<tr>
<td>Vectores básicos P_1 e P_2
(variáveis básicas (VB) são x_1 e x_2)
Sistema de equações em ordem a x_1e x_2:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ F_1 = F_2 = 0 \end{cases}$$</td>
<td>Solução do sistema
$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_31 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(Degenerada: VB x_2 é nula)</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Solução nº 2</th></tr>
<tr>
<td>Vectores básicos P_1 e P_3
(VB : x_1 e F_1)
Sistema de equações em ordem a x_1 e F_1
$$\begin{cases} 2x_1 + F_1 = 6 \\ x_1 + 0F_1 = 4 \\ x_2 = F_2 = 0 \end{cases}$$</td>
<td>Solução do sistema
$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(Não Admissível : VB x_3 é negativa)</td>
</tr>
</table>

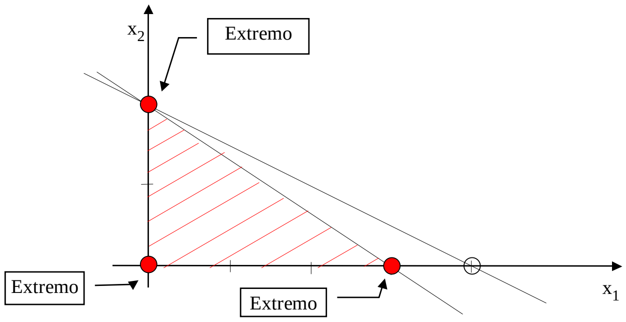
<table>
<tr><th colspan="2">Solução nº 3</th></tr>
<tr>
<td>Vectores básicos P_1 e P_4
(VB : x_1 e F_2)
Sistema de equações em ordem a x_1 e F_2:
$$\begin{cases} 2x_1 + 0F_2 = 6 \\ x_1 + F_2 = 4 \\ x_2 = F_1 = 0 \end{cases}$$</td>
<td>Solução do sistema
$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
(Não Degenerada : VB positivas)</td>
</tr>
</table>

Solução nº 4	
Vectores básicos P_2 e P_3 (VB : x_2 e F_1) Sistema de equações em ordem a x_2 e F_2: $\begin{cases} 3x_2 + F_1 = 6 \\ 2x_2 + 0F_1 = 4 \\ x_1 = F_2 = 0 \end{cases}$	Solução do sistema $X_4 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (Degenerada: VB F_1 é nula) Esta solução é igual à nº 1 (mesmo ponto)

Solução nº 5	
Vectores básicos P_2 e P_4 (VB: x_2 e F_2) Sistema de equações em ordem a x_2 e F_2: $\begin{cases} 3x_2 + 0F_2 = 6 \\ 2x_2 + F_2 = 4 \\ x_1 = F_1 = 0 \end{cases}$	Solução do sistema $X_5 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (Degenerada: VB F_2 é nula) Esta solução é igual à nº 1 (mesmo ponto)

Solução nº 6	
Vectores básicos P_3 e P_4 (VB: F_1 e F_2) Sistema de equações em ordem a F_1 e F_2 : $\begin{cases} F_1 + 0F_2 = 6 \\ 0F_1 + F_2 = 4 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$	Solução do sistema $X_6 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ (Não Degenerada: VB são positivas)

e. Há Solução Óptima <u>em pelo menos um dos extremos</u> do convexo de soluções admissíveis



Demonstração

Admita-se a forma-padrão do modelo de PL Max f(X) = CX sujeito a AX=B com $X \geq 0$.

Admita-se, como hipótese, que o máximo da função objectivo é atingido no ponto X_0 que não é extremo.

Se X_1 , X_2 , ... , X_k forem pontos extremos do convexo de soluções do modelo então X_0 pode obter-se por combinação linear <u>estrita</u> daqueles extremos:

$$X_0 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_k X_k \qquad (0 < \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k\,j} < 1 \,;\, \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1)$$

No ponto associado a X_0 o valor da função é:

$$f(X_0) = CX_0 = \lambda_1 CX_1 + \lambda_2 CX_2 + \ldots + \lambda_k CX_k$$

em que CX_1, CX_2 , ... , CX_k representam o valor da função em cada um dos extremos considerados. Admitindo que os valores de CX_1, CX_2 , ... , CX_k são diferentes e que o maior é deles é $CX_p = M$ então:

$$f(X_0) < \lambda_1 M + \lambda_2 M + \ldots + \lambda_k M \quad \Leftrightarrow \quad f(X_0) < M\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)$$

$$f(X_0) < M \quad \Leftrightarrow \quad f(X_0) < CX_p$$

o que permite concluir que o máximo da função não é atingido em X_0 mas sim no <u>extremo</u> X_p sendo falsa a hipótese proposta. Naturalmente, se o máximo (ou mínimo) da função objectivo for atingido em mais do que um extremo então também o será em qualquer ponto que seja combinação linear convexa desses extremos (solução óptima diz-se Indeterminada).

De facto, admitindo que tais extremos são X_a , X_b e X_c da sua combinação linear convexa obtém-se:

$$X = \lambda_a X_a + \lambda_b X_b + \lambda_c X_c \quad (0 \leq \lambda_a , \lambda_b , \lambda_c \leq 1 \,;\, \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 1)$$

onde o valor da função objectivo é

$$f(X) = CX = \lambda_a CX_a + \lambda_b CX_b + \lambda_c CX_c = \lambda_a M + \lambda_b M + \lambda_c M = M\,(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c) = M$$

o que permite concluir que:

A pesquisa da solução óptima do modelo de PL deve ser feita <u>exclusivamente</u> nos extremos do convexo de soluções.
Se o máximo (ou mínimo) da função é atingido num único extremo a solução diz-se Única.
Se o máximo (ou mínimo) da função é atingido em mais do que um extremo a solução diz-se Indeterminada (múltiplas soluções).

Normalmente só parte das soluções do sistema de equações técnicas do modelo de PL são soluções admissíveis.

Como a pesquisa do óptimo deve ser feita exclusivamente nos extremos do convexo de soluções reduz-se o tempo de cálculo conhecendo:

- quando a solução num dado extremo é ou não é óptima;
- se a solução num dado extremo não é óptima, qual o próximo extremo que deve ser analisado;

Esta redução do tempo de cálculo é garantida pelo método do Simplex através de:

- uma regra de paragem para o cálculo se o óptimo já foi atingido;
- uma regra para mudança de extremo que garante a melhoria do valor da função objectivo (ou , pelo menos, a manutenção do valor em alguns casos de soluções degeneradas);

Nas alíneas seguintes procede-se à dedução destas regras por ser essencial conhecer o seu fundamento teórico. Tratar-se-á em primeiro lugar a mudança de extremo por facilitar a posterior dedução do critério de optimalidade.

f. Mudança de Extremo

Admita-se para um dado modelo de PL o extremo X_0 do convexo de soluções admissíveis. As coordenadas deste extremo correspondem a uma solução do sistema de equações do modelo utilizando um conjunto de vectores P_1 , P_2 , ... , P_m :

$$X_0 = \begin{bmatrix} X_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad com \quad X_m = A_m^{-1} B \quad e \quad A_m = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_m \end{bmatrix}$$

Admitindo que X_m é uma solução **não degenerada** (o que não constitui hipótese restritiva para a finalidade deste estudo) para mudar do extremo X_0 para outro extremo X_s basta substituir um dos vectores básicos P_1 , P_2 ... P_m pelo vector P_s passando a dispor-se de uma nova matriz (base) que designaremos por $\overline{A_m^{-1}}$.

A nova solução X_s é $X_s = \begin{bmatrix} \overline{X_m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad com \quad \overline{X_m} = \overline{A_m^{-1}} B$

O vector P_s pode ser expresso por combinação linear dos vectores de A_m = [P_1 , P_2 , P_m] :

$$P_s = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_m P_m$$

Na forma matricial tem-se:

$$P_s = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_m].\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = A_m.\alpha \quad com \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

A relação $P_s = A_m .\alpha$ pode tomar a forma $A_m.\theta.\alpha = \theta.P_s \quad com \quad \theta \in R$.

Partindo das duas relações propostas:

$$A_m X_m = B$$

$$A_m.\theta.\alpha = \theta.P_s$$

e subtraindo ordenadamente obtém-se:

$$A_m X_m - A_m.\theta.\alpha = B - \theta.P_s \Leftrightarrow A_m(X_m - \theta.\alpha) = B - \theta.P_s \Leftrightarrow A_m(X_m - \theta.\alpha) + \theta.P_s = B$$

Sendo $X_m = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$ então $(X_m - \theta.\alpha) = \begin{bmatrix} x_1 - \theta\alpha_1 \\ x_2 - \theta\alpha_2 \\ \dots \\ x_m - \theta\alpha_m \end{bmatrix}$

em que $x_1 , x_2 , \dots , x_m > 0$ dado que se admitiu que X_m é solução não degenerada.

A <u>nova solução</u> X_s será:

$$X_s = \begin{bmatrix} x_1 - \theta\alpha_1 \\ x_2 - \theta\alpha_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_m - \theta\alpha_m \\ x_s = \theta \end{bmatrix}$$

em que $x_s = \theta = \frac{x_j}{\alpha_j}$ é a nova variável básica e $x_j - \theta\alpha_j = x_j - \frac{x_j}{\alpha_j}\alpha_j = 0$ é a variável da solução corrente que passa a ser variável não básica (porque se anula). As restantes "m-1" variáveis de X_m mantêm-se como variáveis básicas.

Qual o valor adequado para "θ" ?

Se se pretender que a nova solução X_s seja admissível e não degenerada é necessário que todas as coordenadas sejam positivas ou seja:

$X_s = \begin{bmatrix} x_1 - \theta\alpha_1 > 0 \\ x_2 - \theta\alpha_2 > 0 \\ \dots > 0 \\ x_m - \theta\alpha_m > 0 \\ x_s = \theta > 0 \end{bmatrix}$. Em ordem ao escalar "θ" tem-se: $\begin{bmatrix} \theta < \frac{x_1}{\alpha_1} \\ \theta < \frac{x_2}{\alpha_2} \\ \dots \\ \theta < \frac{x_m}{\alpha_m} \end{bmatrix}$ pelo que analisando as coordenadas do vector X_s conclui-se que "θ" deve ser o menor valor positivo dos quocientes

$\frac{x_k}{\alpha_k}(k=1,2,...,m)$ ou seja $\theta = \min\left\{\frac{x_k}{\alpha_k},\ k=1,2,...,m\cdots \wedge\ \alpha_k > 0\right\}$.

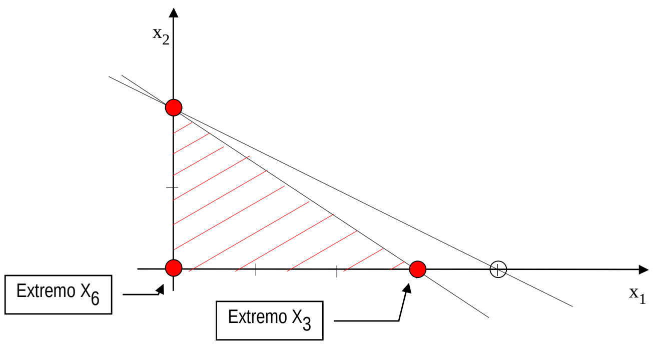
Com efeito, na **nova solução** as coordenadas serão:

- $se\ \alpha_k < 0 \Rightarrow x_k - \theta\alpha_k > 0$;
- $se\ \alpha_k = 0 \Rightarrow x_k - \theta\alpha_k = x_k$ (a coordenada não se altera sendo positiva dado termos admitido $X_m > 0$) ;

Nota: os valores de "$\theta\alpha_k$" **nunca serão superiores** a qualquer das coordenadas de X_m dada a forma como foi calculado o escalar "θ" o que garante que na nova solução todas as variáveis básicas serão não negativas.

Atendendo a que a mudança de extremo é feita por troca de dois vectores (vector P_s que entra para a base por troca com um dos "m" vectores da base corrente) conclui-se que no método do Simplex <u>*a mudança de extremo é sempre feita para um extremo adjacente do extremo corrente*</u>.

De facto, admita-se, no modelo antes apresentado, que os vectores básicos são P_3 e P_4 associados ao extremo corrente $X_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$.



Para mudar para o extremo adjacente X_3 em que os vectores básicos são P_1 e P_4, é necessário substituir na base o vector P_3 pelo vector P_1.

Este vector P_1 pode ser expresso por:

$$P_1 = \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4$$

Substituindo os valores conhecidos obtêm-se os valores de α_3 e α_4 :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_3 = 2 \text{ e } \alpha_4 = 1 \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

No extremo X_6 tem-se :

$$X_m = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ pelo que } (X_m - \theta\alpha) = \begin{bmatrix} 6-\theta\alpha_3 \\ 4-\theta\alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2\theta \\ 4-\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Para que a nova solução X_3 seja admissível e não degenerada é necessário anular uma das variáveis básicas e garantir que a outra se mantém positiva.

Ora $6-2\theta=0$ implica $\theta=3$ enquanto $4-\theta=0$ implica $\theta=4$. Destes dois valores adopta-se $\theta=3$ (mínimo não negativo) pois garante $6-2\theta=0$ e $4-\theta>0$.

Com $\theta=3$ tem-se a solução $X_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ onde x_1 = $\theta=3$ é o valor da variável associada ao novo vector básico P_1.

Nos extremos do convexo as soluções são básicas e admissíveis pelo que o seu cálculo tem que ter estas características em consideração. Se a **nova variável básica tem o valor de** "$\theta_{\min}$" então este **só pode ter valor não negativo** dada a condição geral de não negatividade das variáveis do modelo-padrão do método Simplex.

Sendo o valor "θ" obtido na solução corrente escolhendo o mínimo dos quocientes $\frac{x_k}{\alpha_k}$ $(k=1,2,...,m)$ então estes **só são calculados se o divisor** "α_k" **for positivo** pois todas as variáveis x_k são não negativas por se tratar de soluções admissíveis.

(1) Casos Particulares do valor de "θ"

(a) Mínimo de "θ" igual para mais do que um x_k

Neste caso, na nova solução haverá pelo menos uma VB nula (solução será degenerada).

(b) Mínimo de "θ" igual a zero

Esta situação **só pode ocorrer** quando a **solução corrente é degenerada** (um ou mais x_k = 0). **A nova solução será igualmente degenerada**.

Nota: se no quociente associado ao $\theta_{\min}$ = 0 o escalar "α_k" for negativo, pode seleccionar-se para $\theta_{\min}$ o menor dos quocientes positivos pois a variável que entra para a base será não negativa e a variável x_k que é nula, na solução corrente, passará a ser positiva na nova solução ($x_k - \theta\alpha_k > 0$ porque x_k = 0; $\theta > 0$; $\alpha_k < 0$).

(c) Todos os quocientes $\frac{x_k}{\alpha_k}(k=1,2,...,m)$ são negativos **(não há $\theta \geq 0$)**

Esta situação ocorre quando todos os valores "α_k" são negativos o que impossibilita que qualquer das variáveis básicas x_k se anule para sair da base pois todos os valores "$x_k - \theta\alpha_k$" serão positivos. Mesmo que haja um valor "α_k" nulo a variável associada x_k mantém o seu valor e manter-se-á na base.

Resulta assim que **se só existem "$\alpha_k \leq 0$" não é possível efectuar a mudança de extremo** sendo de concluir que a solução é **ILIMITADA** porque o convexo é **Ilimitado** (notar que em convexo Ilimitado pode existir solução óptima finita)

g. Escolha do vector (variável) para a nova base / Critério de Optimalidade

Na alínea anterior foi analisada a forma como se procede para efectuar a mudança de um extremo do convexo para um extremo adjacente. Para garantir que desta mudança de base resulta a melhoria do valor da função objectivo (ou pelo menos a manutenção do valor corrente) é necessário proceder à escolha adequada do vector (variável) a considerar na nova base.

Admita-se que a solução corrente é $X_0 = \begin{bmatrix} X_m \\ 0 \end{bmatrix}$ com $X_m = A_m^{-1}B$.

Sendo o objectivo maximizar a função $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ no ponto X_0 o seu valor é:

$$f(X_0) = f(X_m) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m = C_m X_m$$

Se escolhermos o vector P_s para entrar na base a nova solução básica é $X_s = \begin{bmatrix} X_m - \theta\alpha \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix}$.

O novo valor da função objectivo é:

$$f(X_s) = CX_s = C.\begin{bmatrix} X_m - \theta\alpha \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix} = C_m\left[X_m - \theta\alpha\right] + c_s.\theta = C_m X_m - C_m\theta\alpha + c_s\theta =$$

$$= f(X_0) - C_m\theta\alpha + c_s\theta = \boxed{f(X_0) - \theta(C_m\alpha - c_s)}$$

Do cálculo efectuado conclui-se que um vector P_s só deve ser escolhido para entrada na base se $\boxed{-\theta(C_m\alpha - c_s) \geq 0}$ ou seja $\boxed{(C_m\alpha - c_s) < 0}$ (admitindo que X_m não é degenerada então "$\theta > 0$").

Esta condição permite estabelecer duas importantes conclusões para Maximizar a função f(X):

- dos vectores não básicos deve seleccionar-se para entrada na base aquele que apresenta $\boxed{(C_m\alpha - c_s) < 0}$ com maior valor absoluto.

- se para qualquer vector não básico se verificar $\boxed{(C_m\alpha - c_s) \geq 0}$ então pode concluir-se que a solução corrente é a solução óptima do modelo de PL.

7. Exemplo de Aplicação

Considere-se o modelo de PL:

Max f(X) = $6x_1 + 8x_2$

s.a. $30x_1 + 20x_2 \leq 300$

$5x_1 + 10x_2 \leq 110$

$x_1 , x_2 \geq 0$

O modelo na forma-padrão do método do Simplex é a seguinte:

Max f(X) = $6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2$

s.a.

$30x_1 + 20x_2 + F_1 + 0F_2 = 300$

$5x_1 + 10x_2 + 0F_1 + F_2 = 110$

$x_1 , x_2 , F_1 , F_2 \geq 0$

Na forma matricial o sistema de equações é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 30 & 20 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix}$$

Solução nº 1

Admitindo P_3 e P_4 como vectores básicos tem-se o sistema:

$$A_m X_m = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P_3 & P_4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix}$$

A solução é $X_1 = \begin{bmatrix} X_m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \\ 110 \end{bmatrix}$.

O valor de f(X) é f(X_1) = $6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2 = 0$

É necessário agora estudar isoladamente a entrada para a base dos vectores não básicos P_1 e P_2 para conhecer o impacto no valor corrente da função.

Estudo da entrada, para a base, do vector não básico P_1

$$P_1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \end{bmatrix} = \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\theta = Min\left\{ \frac{x_3}{\alpha_3}, \frac{x_4}{\alpha_4} \wedge \alpha_3, \alpha_4 > 0 \right\} = \left\{ \frac{300}{30}, \frac{110}{5} \right\} = 10 \Leftrightarrow x_1 = 10$$

$$C_m \alpha - c_1 = [c_3 \quad c_4]\alpha - c_1 = [0 \quad 0]\begin{bmatrix} 30 \\ 5 \end{bmatrix} - 6 = -6 < 0 .$$

A entrada de P_1 para a base <u>aumenta</u> <u>o valor corrente de f(X)</u> (então a solução X_1 não é óptima).

Estudo da entrada, para a base, do vector não básico P_2

(variável x_2 tem coeficiente $c_2 = 8$)

$$P_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\theta = Min\left\{ \frac{x_3}{\alpha_3}, \frac{x_4}{\alpha_4} \wedge \alpha_3, \alpha_4 > 0 \right\} = \left\{ \frac{300}{20}, \frac{110}{10} \right\} = 11 \Leftrightarrow x_2 = 11$$

$$C_m \alpha - c_2 = [c_3 \quad c_4]\alpha - c_2 = [0 \quad 0]\begin{bmatrix} 30 \\ 5 \end{bmatrix} - 8 = -8 < 0 .$$

A entrada de P_2 para a base <u>aumenta o valor corrente de f(X)</u>.

1 ª CONCLUSÃO

A entrada para a base do vector P_1 ou P_2 aumenta o valor corrente de f(X) concluindo-se que a solução X_1 não é óptima. É necessário mudar de extremo.

Dos vectores não básicos <u>selecciona-se para entrada na base</u> o vector P_2 onde $\boxed{(C_m \alpha - c_s) < 0}$ tem maior valor absoluto (8).

Do estudo deste vector tem-se $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$ e $\theta = 11 = x_2$.

Solução nº 2

$$X_2 = \begin{bmatrix} X_m - \theta\alpha \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tendo $[X_m - \theta\alpha] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - 11.\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 220 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Tem-se $x_4 = 0$ pelo que P_4 passa a vector não básico e a nova solução é $X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Com os vectores básicos P_2 , P_3 o valor de f(X) é $f(X_2) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2 = \underline{88}$

É necessário agora estudar isoladamente a entrada para a base dos vectores não básicos P_1 e P_4 para conhecer o impacto no valor corrente da função.

Estudo da entrada, para a base, do vector não básico P_1

(variável x_1 tem coeficiente $c_1 = 6$)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \end{bmatrix} = \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = \alpha_2 \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\theta = Min\left\{ \frac{x_2}{\alpha_2}, \frac{x_3}{\alpha_3} \wedge \alpha_2, \alpha_3 > 0 \right\} = \left\{ \frac{11}{0.5}, \frac{80}{20} \right\} = 4 \Leftrightarrow x_1 = 4$$

$$C_m\alpha - c_1 = [c_2 \quad c_3]\alpha - c_1 = [8 \quad 0]\begin{bmatrix} 0.5 \\ 20 \end{bmatrix} - 6 = -2 < 0.$$

A entrada de P_1 para a base <u>aumenta</u> <u>o valor corrente de f(X)</u> (conclui-se que a solução X_2 não é óptima).

Estudo da entrada, para a base, do vector não básico P_4

(variável x_4 tem coeficiente $c_4 = 0$)

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = \alpha_2 \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\theta = Min\left\{ \frac{x_2}{\alpha_2}, \frac{x_3}{\alpha_3} \wedge \alpha_2, \alpha_3 > 0 \right\} = \left\{ \frac{11}{0.1} \right\} = 110 = x_4 \quad \text{(não há divisão por } \alpha_3 < 0 \text{)}$$

$$C_m\alpha - c_4 = [c_2 \quad c_3]\alpha - c_4 = [8 \quad 0]\begin{bmatrix} 0.1 \\ -2 \end{bmatrix} - 0 = 0.8 > 0.$$

A entrada de P_4 para a base <u>não aumenta o valor corrente de f(X)</u>.

2ª CONCLUSÃO

A entrada para a base do vector P_1 aumenta o valor corrente de f(X) concluindo-se que a solução X_2 **não é óptima**. É necessário mudar de extremo.

Dos vectores não básicos <u>selecciona-se para entrada na base</u> o vector P_1 onde $\boxed{(C_m\alpha - c_s) < 0}$ tem maior valor absoluto (2).

Solução nº 3

Do estudo deste vector tem-se $\alpha = \begin{bmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5\\ 20\end{bmatrix}$ e $\theta = 4$.

$$X_3 = \begin{bmatrix} X_m - \theta\alpha \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que $[X_m - \theta\alpha] = \begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix} - 4.\begin{bmatrix}0.5\\ 20\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\ 80\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\ 80\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\ 0\end{bmatrix}$.

Tem-se $x_3 = 0$ pelo que P_3 passa a vector não básico e a nova solução é $X_3 = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ F_1\\ F_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 9\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$.

Com os vectores básicos P_1 , P_2 o valor de f(X) é $f(X_3) = 6x_1 + 8x_2 + 0F_1 + 0F_2 = \underline{96}$

É necessário agora estudar isoladamente a entrada para a base dos vectores não básicos P_3 e P_4 para conhecer o impacto no valor corrente da função.

Estudo da entrada, para a base, do vector não básico P_3 (variável x_3 tem coeficiente $c_3 = 0$)

$$P_3 = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = \alpha_1\begin{bmatrix}30\\ 5\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}20\\ 10\end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.05\\ -0.025\end{bmatrix}$$

$$\theta = Min\left\{\frac{x_1}{\alpha_1}, \frac{x_2}{\alpha_2} \wedge \alpha_1, \alpha_2 > 0\right\} = \left\{\frac{4}{0.05}\right\} = 80 \text{ (não há divisão por } \alpha_2 < 0 \text{)}$$

.

A entrada de P_3 para a base <u>não aumenta o valor corrente de f(X)</u>.

Estudo da entrada, para a base, do vector não básico P_4

(variável x_4 tem coeficiente $c_4 = 0$)

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

$$\theta = Min\left\{ \frac{x_1}{\alpha_1}, \frac{x_2}{\alpha_2} \wedge \alpha_1, \alpha_2 > 0 \right\} = \left\{ \frac{9}{0.15} \right\} = 60$$ (não há divisão por $\alpha_1 < 0$)

$$C_m \alpha - c_4 = [c_1 \quad c_2]\alpha - c_4 = [6 \quad 8]. \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.15 \end{bmatrix} - 0 = 0.6 > 0 .$$

A entrada de P_4 para a base <u>não aumenta o valor corrente de f(X)</u>.

3ª CONCLUSÃO

A solução $X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é a solução óptima.

<u>O máximo de f(X) é f(X_3) = 96</u>