II. Exemplos Típicos de Formulação Matemática do Modelo de PL

Nota: Os exemplos apresentados devem ser resolvidos recorrendo ao software do autor.

Faça sempre um "boneco" que ajude a fixar as variáveis de decisão e as restrições técnicas.

1. Utilização de Máquinas

Uma metalomecânica utiliza 3 máquinas (M1 , M2 , M3) na manufactura de 3 produtos (A, B e C).

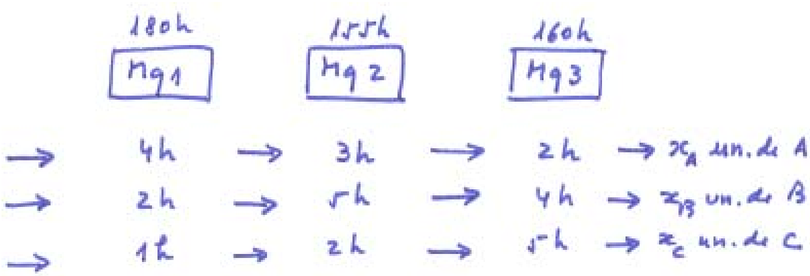
Uma unidade do produto A necessita 4 horas da máquina M_1 , 2 horas da máquina M_2 e 1 hora da máquina M_3. Para o produto B são necessárias, respectivamente 3, 5, 2 horas enquanto para o produto C são necessárias 2, 4, 5 horas.

O lucro de venda, por unidade, é de 35 u.m. para A, 45 u.m. para B e 40 u.m. para C.

Estando prevista a disponibilidade de 180 horas de M_1 , 155 horas de M_2 e 160 horas de M_3 de que modo se optimiza a produção?

Para formular o modelo de PL é de interesse organizar a informação disponível no quadro seguinte:

	Produto			Horas disponíveis
	A	B	C	
Máquina 1	4	3	2	180
Máquina 2	2	5	4	155
Máquina 3	1	2	5	160
Lucro (u.m.)	35	45	40	



É necessário decidir o nível de produção dos produtos A, B e C pelo que se consideram *3 Variáveis de Decisão* x_A , x_B e x_C .

Os valores para estes níveis de produção só são admissíveis se, além de *não negativos e inteiros* (x_A , x_B , $x_C \geq 0$ e Int.), forem possíveis no tempo disponível de cada uma das três máquinas pelo que as *Restrições Técnicas e Lógicas são as seguintes:*

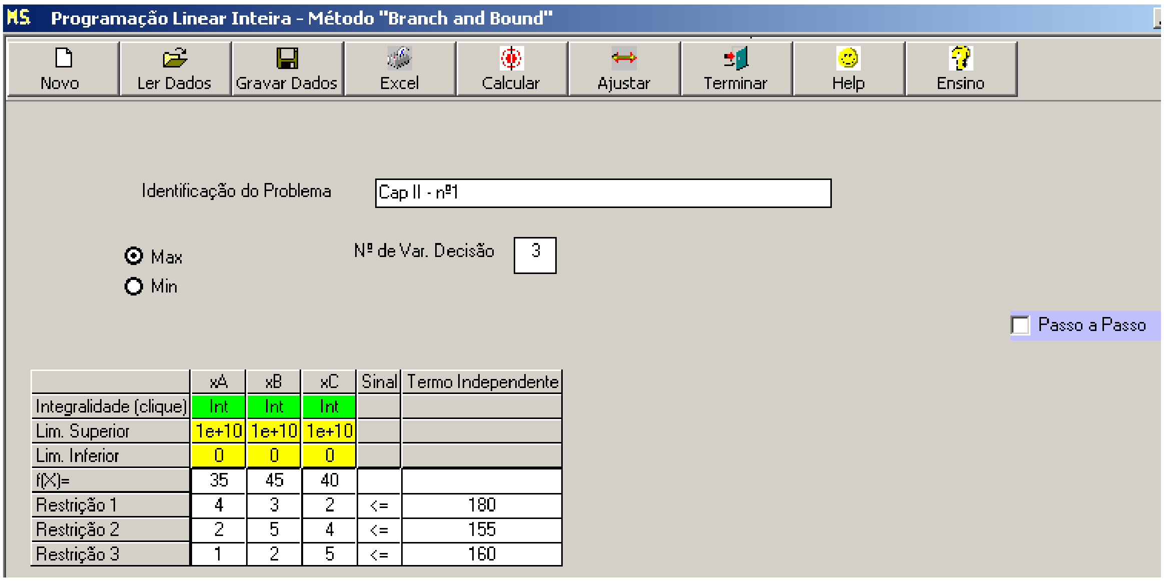
$$
\begin{array}{ccccccc}
4x_A & + & 3x_B & + & 2x_C & \leq & 180 \\
2x_A & + & 5x_B & + & 4x_C & \leq & 155 \\
x_A & + & 2x_B & + & 5x_C & \leq & 160
\end{array}
$$

$$x_A , x_B , x_C \geq 0 \text{ e Inteiro}$$

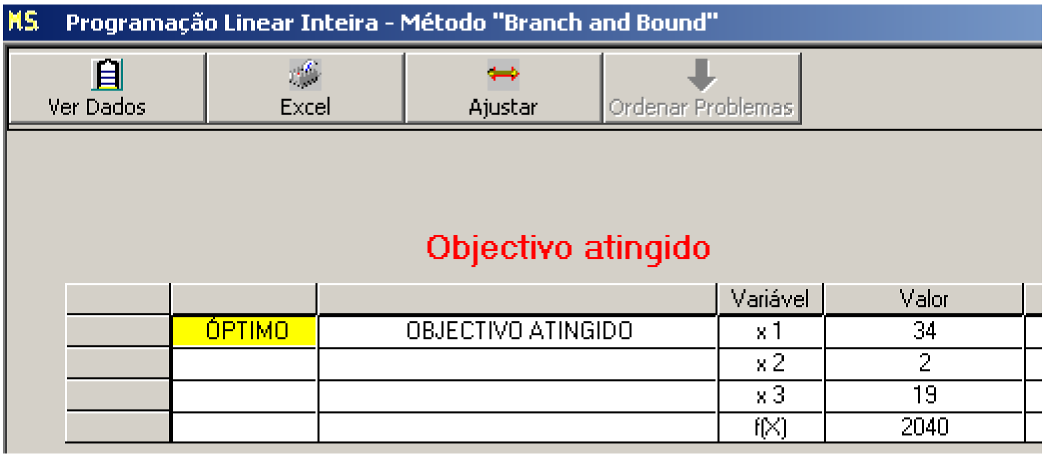
A decisão sobre os níveis de produção é efectuada à luz do critério da maximização do lucro total da venda pelo que, atendendo aos lucros unitários, se tem a *Função Objectivo para Maximizar*:

$$\text{Max } f(X) = 35x_A + 45x_B + 40x_C$$

Recorrendo ao software do autor a entrada de dados é a seguinte:



e a solução óptima é a seguinte:



Produzir 34 unidades de A, 2 unidades de B e 19 unidades de C.

Lucro total máximo = 2040 u.m.

2. Turnos de Produção

Uma fábrica têxtil labora em 3 turnos : 7 ás 15 horas ; 15 ás 23 horas ; 23 ás 7 horas.

Em cada turno necessita de modelistas, costureiras e embaladoras que auferem por hora de trabalho, respectivamente 23, 19 e 7.5 u.m.

As modelistas e costureiras auferem um adicional de 2 u.m./hora quando trabalham no último dos turnos indicados sendo o salário das embaladoras, neste turno, de 8.5 u.m./h.

As necessidades da produção exigem, em cada turno, 1 hora de modelista por cada 3 horas de costureira não podendo haver mais do que um total de 200 horas de embaladora em cada turno.

Pretende-se que o total de horas de trabalho de modelistas e costureiras seja no mínimo de 400 horas no turno da manhã, 376 horas no turno da tarde e 270 horas no turno da noite.

Devendo haver, no mínimo, 600 horas de trabalho em cada turno, como fixar o contributo de cada par categoria/turno em horas completas ?

É necessário decidir *o número de horas de trabalho, em cada turno, por cada tipo de trabalhador* pelo que se consideram as seguintes *Variáveis de Decisão*:

Horas de trabalho	1º turno	2º turno	3º turno
Modelistas	x_{11}	x_{12}	x_{13}
Costureiras	x_{21}	x_{22}	x_{23}
Embaladoras	x_{31}	x_{32}	X_{33}

Para estas variáveis só são admissíveis valores que, além de *não negativos e inteiros* ($x_{ij} \geq 0$ e Int. ; i, j =1, 2, 3), satisfaçam as seguintes condições:

a. Em cada turno, 1 hora de modelista por cada 3 horas de costureira; no primeiro turno as modelistas fazem x_{11} horas e as costureiras fazem x_{21} horas o que exige que para x_{11} = 1 hora o valor de x_{12} deve ser 3 horas.

A Restrição Técnica é então:

1º turno: $3x_{11} = x_{21}$ ou $3x_{11} - x_{21} = 0$

Para os turnos seguintes têm-se de forma similar as *Restrições Técnicas:*

2º turno: $3x_{12} = x_{22}$ ou $3x_{12} - x_{22} = 0$

3º turno: $3x_{13} = x_{23}$ $3x_{13} - x_{23} = 0$

b. Em cada turno, o número de horas das embaladoras não deve exceder 200 horas; estas operárias fazem, em cada turno, respectivamente x_{31} , x_{32} e x_{33} horas de trabalho pelo que se estabelecem as *Restrições Técnicas:*

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}\text{ turno:} & x_{31} \leq 200 \\ 2^{\circ}\text{ turno:} & x_{32} \leq 200 \\ 3^{\circ}\text{ turno:} & x_{33} \leq 200 \end{array}$$

c. O total de horas das modelistas e costureiras, em cada turno, não deve ser inferior a 400 horas no turno da manhã, 376 horas no turno da tarde e 270 horas no turno da noite; atendendo às variáveis de decisão estabelecidas têm-se as *Restrições Técnicas:*

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}\text{ turno:} & x_{11} + x_{21} \geq 400 \\ 2^{\circ}\text{turno:} & x_{12} + x_{22} \geq 376 \\ 3^{\circ}\text{ turno:} & x_{13} + x_{23} \geq 270 \end{array}$$

d. O total de horas de trabalho em cada turno não deve ser inferior a 600 horas; no primeiro turno, o total de horas de trabalho é igual à soma de x_{11} , x_{21} e x_{31} do que resulta a *Restrição Técnica:*

$$1^{\circ}\text{ turno:} \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 600$$

Para os turnos seguintes têm-se de forma similar as *Restrições Técnicas:*

$$\begin{array}{ll} 2^{\circ}\text{turno:} & x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 600 \\ 3^{\circ}\text{ turno:} & x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 600 \end{array}$$

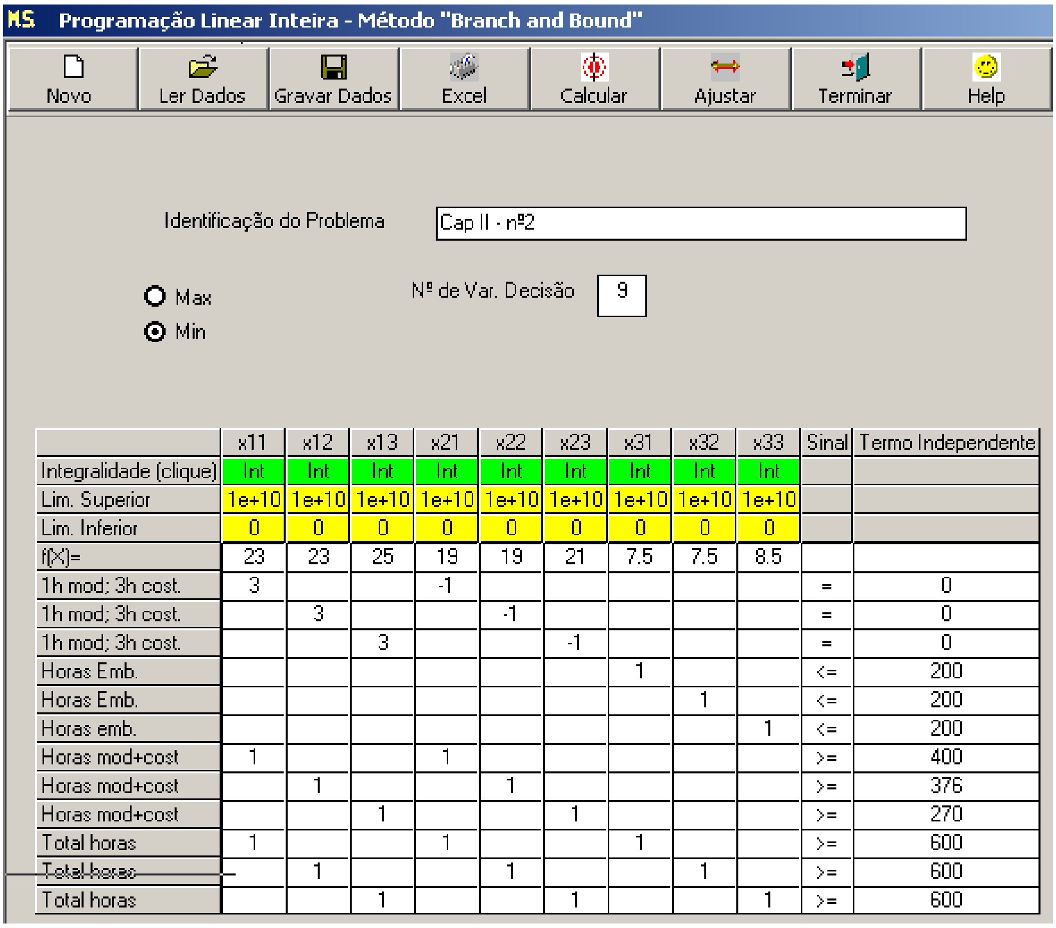
Como já foi referido, os valores das variáveis de decisão só são admissíveis se não negativos e inteiros pelo que as *Restrições Lógicas* são $x_{ij} \geq 0$ e Inteiro (i=1 a 3 ; j=1 a 3)

A decisão sobre o nível das horas de trabalho em cada turno de produção é efectuada à luz do critério da minimização do custo total pelo que, atendendo aos custos unitários da mão de obra, se tem a *Função Objectivo para Minimizar:*

$$\text{Min } f(X) = 23x_{11} + 23x_{12} + 25x_{13} + 19x_{21} + 19x_{22} + 21x_{23} + 7.5x_{31} + 7.5x_{32} + 8.5x_{33}$$

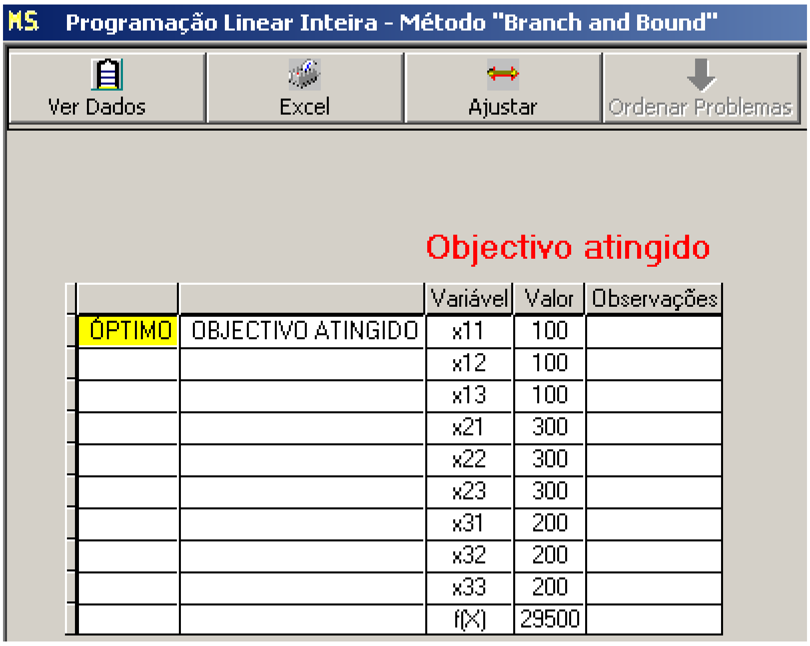
- *Nota: Os custos/hora da mão de obra são nos 1º e 2º turnos 23, 19 e 7.5 u.m. respectivamente para modelistas, costureiras e embaladoras. No 3º turno aqueles custos aumentam 2 u.m. para as duas primeiras categorias e de 1 u.m. para as embaladoras.*

Recorrendo ao software do autor a entrada de dados é a seguinte:



	x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33	Sinal	Termo Independente
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int		
Lim. Superior	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10		
Lim. Inferior	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
f(X)=	23	23	25	19	19	21	7.5	7.5	8.5		
1h mod; 3h cost.	3			-1						=	0
1h mod; 3h cost.		3			-1					=	0
1h mod; 3h cost.			3			-1				=	0
Horas Emb.							1			<=	200
Horas Emb.								1		<=	200
Horas emb.									1	<=	200
Horas mod+cost	1			1						>=	400
Horas mod+cost		1			1					>=	376
Horas mod+cost			1			1				>=	270
Total horas	1			1			1			>=	600
Total horas		1			1			1		>=	600
Total horas			1			1			1	>=	600

e a solução óptima é a seguinte:



		Variável	Valor	Observações
ÓPTIMO	OBJECTIVO ATINGIDO	x11	100	
		x12	100	
		x13	100	
		x21	300	
		x22	300	
		x23	300	
		x31	200	
		x32	200	
		x33	200	
		f(X)	29500	

Óptimo	1º turno	2º turno	3º turno	
Modelistas	100 h	100 h	100 h	Custo Total Mínimo 29500 u.m.
Costureiras	300 h	300 h	300 h	
Embaladoras	200 h	200 h	200 h	

3. Produção de Conjuntos de peças

Uma empresa produz 3 componentes (A, B, C) para máquinas de barbear.

A Secção 1 produz os componentes A e B e a Secção 2 produz apenas o componente C.

As actuais condições de produção são as seguintes:

	Produção / hora			
	A	B	C	Tempo disponível por semana (h)
Secção 1	8	5		100
Secção 2			14	30

A montagem de 1 máquina de barbear necessita de 1 componente A, 1 componente B e 1 componente C pelo que a produção deve ser equilibrada para garantir esta exigência.

Sendo de 10 u.m. o lucro unitário da venda da máquina de barbear como optimizar a produção ?

É necessário calcular o número de componentes a produzir em cada Secção pelo que as *Variáveis de Decisão* são:

	A	B	C
Secção 1:	x_{1A}	x_{1B}	não produz
Secção 2:	não produz	não produz	x_{2C}

Na secção 1, são feitas 8 peças A por hora de laboração pelo que para produzir uma unidade de A são necessárias $^1/_8$ horas. De forma similar tem-se $^1/_5$ horas para uma peça B e $^1/_{14}$ horas para uma peça C. Atendendo ao tempo semanal disponível em cada secção, têm-se as *Restrições Técnicas:*

$$\text{Secção 1:} \quad \tfrac{1}{8}x_{1A} + \tfrac{1}{5}x_{1B} \leq 100$$

$$\text{Secção 2:} \quad \tfrac{1}{14}x_{2C} \leq 30$$

O "conjunto" de montagem tem um componente de cada tipo; para equilibrar a produção é necessário que:

$$\text{Nº de comp. A = Nº de comp. B = Nº de comp. C:} \quad x_{1A} = x_{1B} = x_{2C}$$

As duas *Restrições Técnicas* a estabelecer traduzem a relação transitiva:

$$x_{1A} = x_{1B}$$

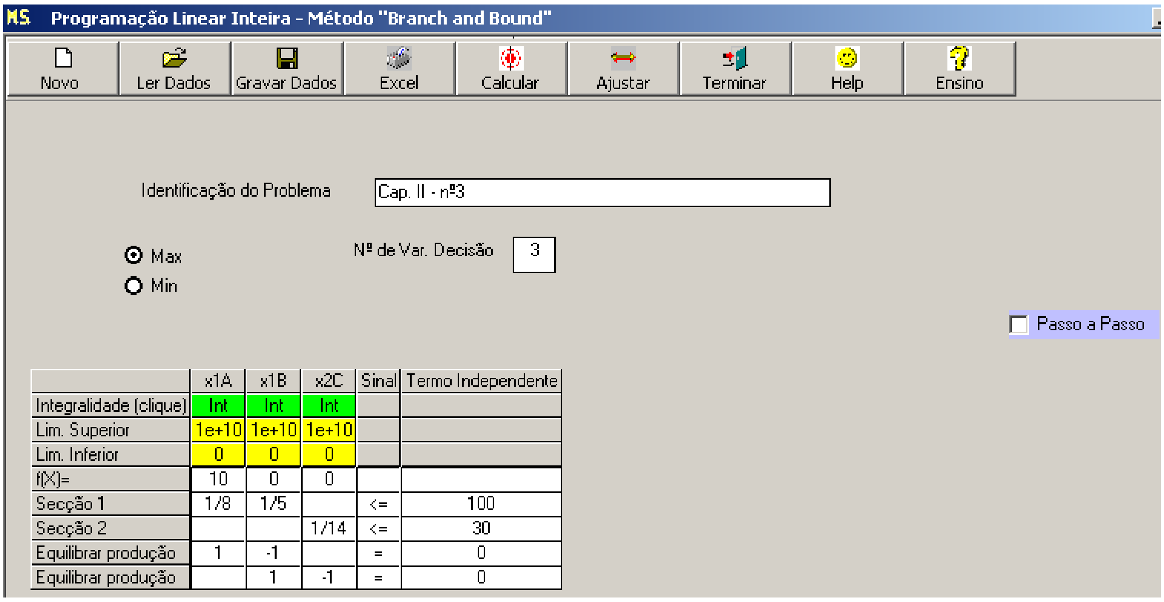
$$x_{1B} = x_{2C}$$

A decisão sobre o número de "conjuntos de peças" a produzir é efectuada à luz do critério da maximizar o lucro total da venda das máquinas de barbear. Como o número destas é igual ao número de componentes A (ou B ou C), atendendo ao lucro unitário da venda tem-se a *Função Objectivo para Maximizar:*

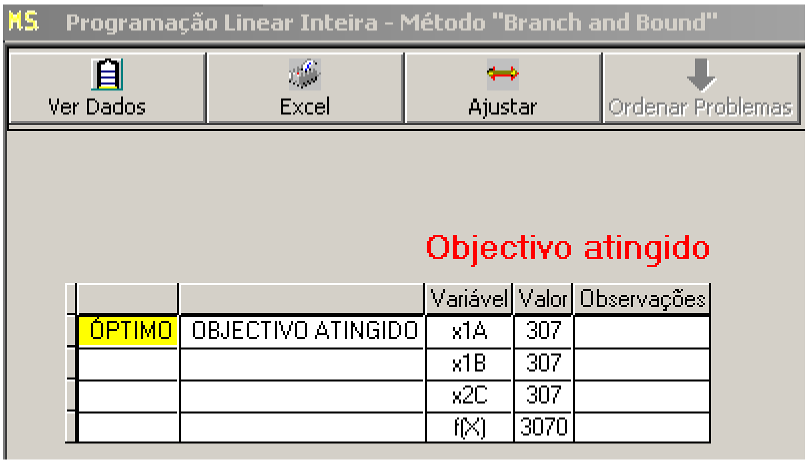
$$\text{Max } f(X) = 10x_{1A} \quad \text{ou} \quad \text{Max } f(X) = 10x_{1B} \quad \text{ou} \quad \text{Max } f(X) = 10x_{2C}$$

Os valores das variáveis de decisão (níveis de produção de A, B e C) só são admissíveis se não negativos e inteiros pelo que as *Restrições Lógicas* são $x_{1A}, x_{1B}, x_{2C} \geq 0$ e Inteiro

Recorrendo ao software do autor a entrada de dados é a seguinte:



e a solução óptima é a seguinte:



Produzir 307 unidades de A, 307 unidades de B e 307 unidades de C

Lucro total máximo = 3070 u.m.

4. Optimização de Necessidades de Pessoal

Uma empresa tem várias cervejarias em Lisboa que funcionam todos os dias da semana durante 8 horas consecutivas. Os seus empregados trabalham semanalmente, 5 dias consecutivos podendo a empresa fixar o 1º dia de serviço em qualquer dia da semana.

As necessidades mínimas de pessoal em cada dia da semana são as seguintes:

	Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
Nº mínimo de empregados	90	50	30	70	60	70	100

Como minimizar o total de empregados necessários à satisfação das necessidades referidas ?

É necessário calcular o número de empregados que, em cada dia, iniciam os seus 5 dias consecutivos de trabalho pelo que *as Variáveis de Decisão são*:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

Os x_1 empregados que iniciam os seus 5 dias no Domingo, mantêm-se até Quinta (são 5 dias consecutivos).

Estabelecendo idêntico raciocínio para os restantes dias da semana estabelece-se o seguinte quadro:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
x_1	x_1	x_1	x_1	x_1		
	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	
		x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4			x_4	x_4	x_4	x_4
x_5	x_5			x_5	x_5	x_5
x_6	x_6	x6			x_6	x_6
x_7	x_7	x_7	x_7			x_7

Sendo necessários, pelo menos, 90 empregados no Domingo então a soma das variáveis associadas a este dia deve ter, pelo menos, este valor o que conduz à *Restrição Técnica:*

$$\text{Dom:}\quad x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 90$$

De modo idêntico, tem-se para cada um dos dias restantes as *Restrições Técnicas:*

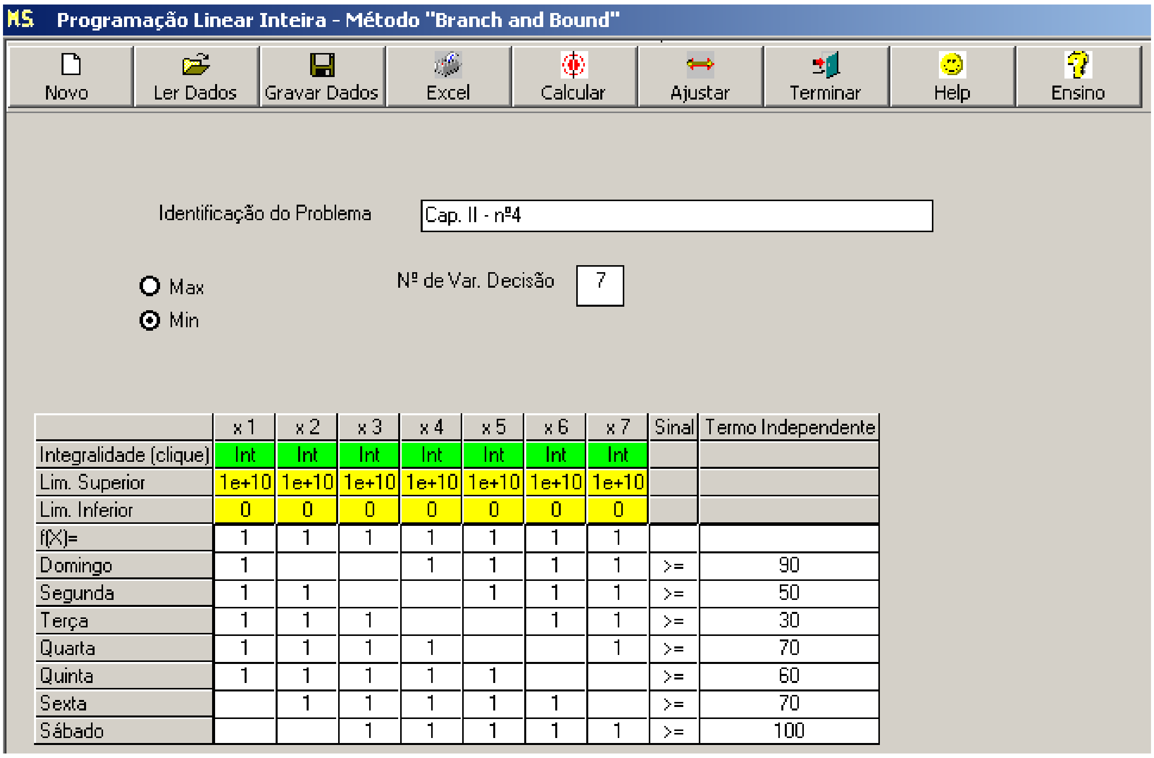
$$\begin{array}{lrcl}
\text{Seg:} & x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq & 50 \\
\text{Ter:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 & \geq & 30 \\
\text{Qua:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 & \geq & 70 \\
\text{Qui:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \geq & 60 \\
\text{Sex:} & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \geq & 70 \\
\text{Sáb:} & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq & 100
\end{array}$$

A decisão sobre o número de empregados a ter disponíveis semanalmente é efectuada à luz do critério de minimizar o seu total do que decorre a *Função Objectivo para Minimizar:*

$$\text{Min } f(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

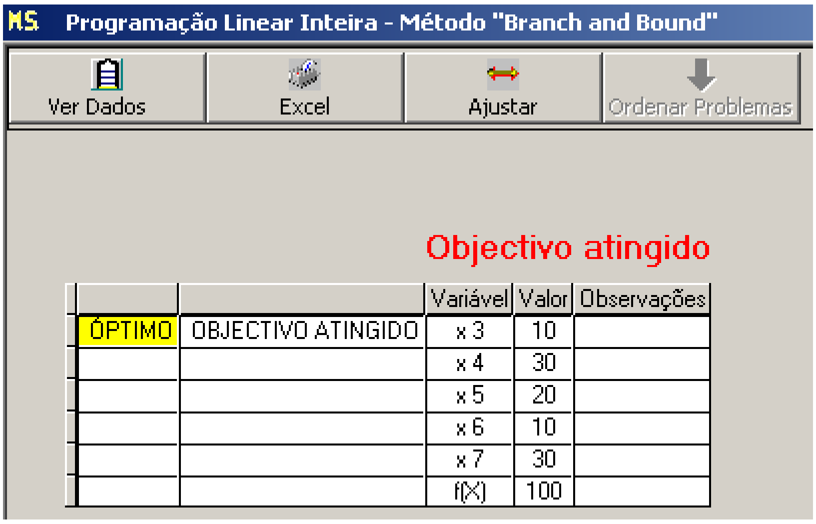
Os valores das variáveis de decisão só são admissíveis se não negativos e inteiros pelo que se estabelecem as *Restrições Lógicas* $x_j \geq 0$ e Int. (j = 1 a 7)

Recorrendo ao software do autor a entrada de dados é a seguinte:



	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7	Sinal	Termo Independente
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int		
Lim. Superior	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10	1e+10		
Lim. Inferior	0	0	0	0	0	0	0		
f(X)=	1	1	1	1	1	1	1		
Domingo	1			1	1	1	1	>=	90
Segunda	1	1			1	1	1	>=	50
Terça	1	1	1			1	1	>=	30
Quarta	1	1	1	1			1	>=	70
Quinta	1	1	1	1	1			>=	60
Sexta		1	1	1	1	1		>=	70
Sábado			1	1	1	1	1	>=	100

e uma solução óptima é a seguinte:



		Variável	Valor	Observações
ÓPTIMO	OBJECTIVO ATINGIDO	x 3	10	
		x 4	30	
		x 5	20	
		x 6	10	
		x 7	30	
		f(X)	100	

Ter: 10 empregados iniciam turno de 5 dias
Qua: 30 empregados iniciam turno de 5 dias
Qui: 20 empregados iniciam turno de 5 dias
Sex: 10 empregados iniciam turno de 5 dias
Sáb: 30 empregados iniciam turno de 5 dias

Empregados necessários = 100

O mapa de pessoal é o seguinte:

	Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
			10	10	10	10	10
	30			30	30	30	30
	20	20			20	20	20
	10	10	10			10	10
	30	30	30	30			30
Totais	90	60	50	70	60	70	100
Necessário	90	50	30	70	60	70	100
Excesso		10	20				

Há excesso de pessoal nas segunda e terça feiras. Se necessário, podem alisar-se estes excessos com restrições adicionais de “meta”.

5. Problema de Afectação

Uma empresa de construção civil necessita contratar 4 subempreitadas (S_1, S_2, S_3 e S_4).

As seis empresas concorrentes (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 e E_6) apresentaram as seguintes propostas (u.m.):

	S_1	S_2	S_3	S_4
E_1	12	18	21	23
E_2	16	13	22	25
E_3	14	13	20	28
E_4	11	16	17	21
E5	15	20	21	20
E_6	18	19	22	26

Garantindo que a qualquer dos concorrentes não é atribuída mais do que uma subempreitada como optimizar a contratação ?

Para cada empresa " i " , é necessário estabelecer se lhe é atribuída ou não uma das subempreitadas " j " .

À empresa E_1 , por exemplo, pode ser atribuída uma ou nenhuma das subempreitadas pelo que temos uma situação de "ou exclusivo". Esta situação pode programar-se matematicamente recorrendo a ***variáveis binárias***. Se a variável tem valor "1" a subempreitada é atribuída não o sendo se a variável tem valor "0".

A cada par (E_1 , subempreitada) associamos então uma variável como mostra o quadro seguinte:

	S_1	S_2	S_3	S_4
E_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}

Tendo em atenção o valor possível para estas variáveis é necessário reflectir sobre quais os valores que admitimos para a sua soma. Atendendo a que:

- o número de empresas é superior ao número de subempreitadas;
- uma empresa só pode aspirar, no máximo, a uma das subempreitadas;

então, na linha de cada uma das empresas, a soma das quatro variáveis só pode ser zero (não é atribuída subempreitada) ou 1 (é atribuída uma subempreitada).

Para a empresa E_1 a *Restrição técnica associada é:*

$$E_1: \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1$$

De modo idêntico estabelecem-se as seguintes *Restrições Técnicas* para as restantes empresas:

$$\begin{array}{llllllllll}
E_2: & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & + & x_{24} & \leq & 1 \\
E_3: & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & + & x_{34} & \leq & 1 \\
E_4: & x_{41} & + & x_{42} & + & x_{43} & + & x_{44} & \leq & 1 \\
E_5: & x_{51} & + & x_{52} & + & x_{53} & + & x_{54} & \leq & 1 \\
E_6: & x_{61} & + & x_{62} & + & x_{63} & + & x_{64} & \leq & 1
\end{array}$$

As restrições estabelecidas são insuficientes porque não impedem, como é necessário, que seja atribuída a mesma subempreitada a mais do que uma empresa.

Sendo obrigatório atribuir todas as subempreitadas, então S_1 é atribuída a uma das seis empresas concorrentes ou seja a soma das variáveis associadas a cada par (S_1 , empresa concorrente) deve ser igual a uma unidade o que conduz à *Restrição Técnica:*

$$S_1: \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1$$

De forma idêntica estabelecem-se as restantes *Restrições Técnicas:*

$$\begin{aligned} S_2: &\quad x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} = 1 \\ S_3: &\quad x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} = 1 \\ S_4: &\quad x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} = 1 \end{aligned}$$

A decisão sobre a afectação " empresa, subempreitada" e "subempreitada, empresa" é efectuada à luz do critério de minimizar o custo total das subempreitadas pelo que a *Função Objectivo para Minimizar é:*

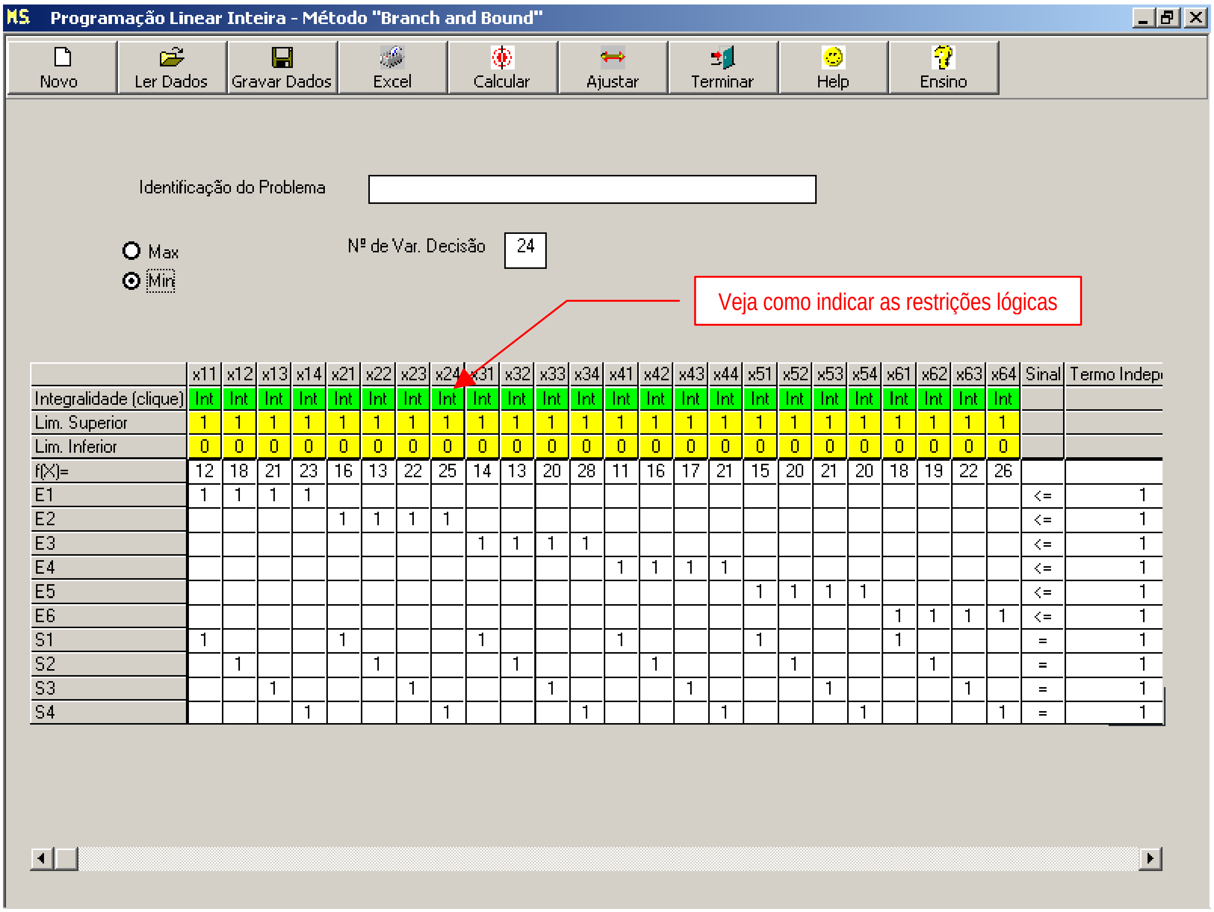
$$\begin{aligned} \text{Min } f(X) = {} & 12x_{11} + 18x_{12} + 21x_{13} + 23x_{14} + \\ & + 16x_{21} + 13x_{22} + 22x_{23} + 25x_{24} + \\ & + 14x_{31} + 13x_{32} + 20x_{33} + 28x_{34} + \\ & + 11x_{41} + 16x_{42} + 17x_{43} + 21x_{44} + \\ & + 15x_{51} + 20x_{52} + 21x_{53} + 20x_{54} + \\ & + 18x_{61} + 19x_{62} + 22x_{63} + 26x_{64} \end{aligned}$$

Os valores das variáveis de decisão só são admissíveis se iguais a 0 ou 1 pelo que as *Restrições Lógicas* são:

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \text{ (i=1 a 6 ; j=1 a 4)}$$

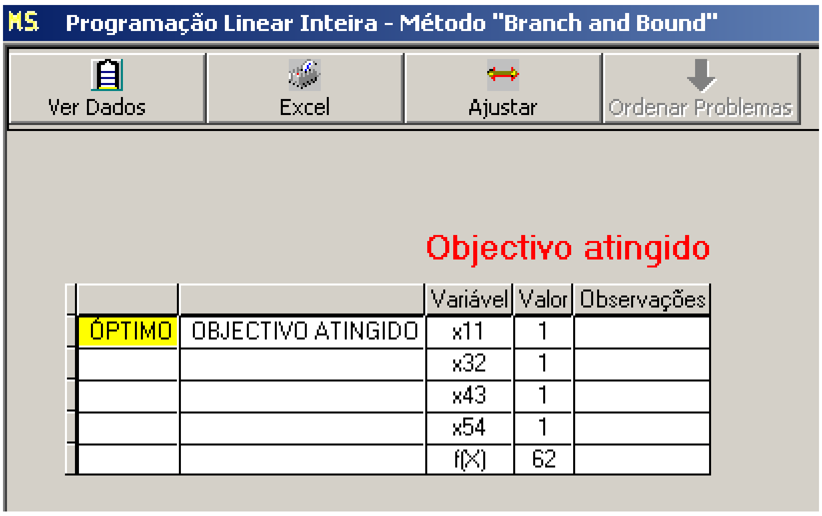
Nota: Na prática, dada a dimensão deste tipo de problemas, utiliza-se algoritmia específica na sua resolução (consultar o manual de "Afectação de Recursos" do professor Morais da Silva).

Recorrendo ao software do autor a entrada de dados é a seguinte:



	x11	x12	x13	x14	x21	x22	x23	x24	x31	x32	x33	x34	x41	x42	x43	x44	x51	x52	x53	x54	x61	x62	x63	x64	Sinal	Termo Indep
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int	Int		
Lim. Superior	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
Lim. Inferior	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
f(X)=	12	18	21	23	16	13	22	25	14	13	20	28	11	16	17	21	15	20	21	20	18	19	22	26		
E1	1	1	1	1																					<=	1
E2					1	1	1	1																	<=	1
E3									1	1	1	1													<=	1
E4													1	1	1	1									<=	1
E5																	1	1	1	1					<=	1
E6																					1	1	1	1	<=	1
S1	1				1				1				1				1				1				=	1
S2		1				1				1				1				1				1			=	1
S3			1				1				1				1				1				1		=	1
S4				1				1				1				1				1				1	=	1

e uma solução óptima é a seguinte:



		Variável	Valor	Observações
ÓPTIMO	OBJECTIVO ATINGIDO	x11	1	
		x32	1	
		x43	1	
		x54	1	
		f(X)	62	

Empresa 1: subempreitada 1

Empresa 3: subempreitada 2

Empresa 4: subempreitada 3

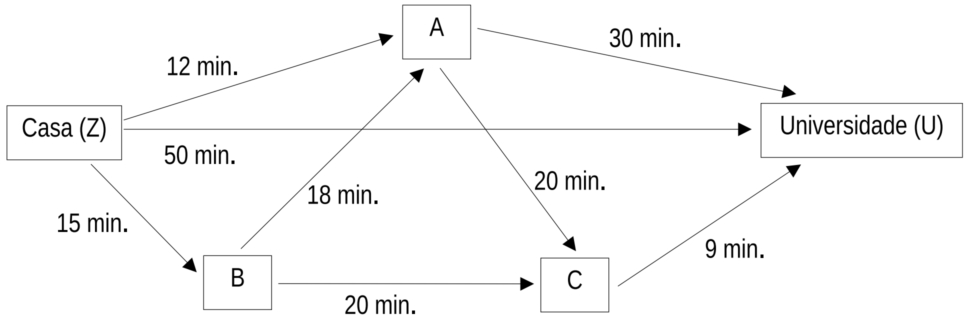
Empresa 5: subempreitada 4

Custo total mínimo = 62 u.m.

6. Problema de Encaminhamento

Um aluno pretende deslocar-se de sua casa para a universidade no menor tempo possível.

Do estudo dos transportes disponíveis recolheu a informação apresentada na figura seguinte:



Qual é o itinerário óptimo?

Quando o aluno está em casa, pode decidir deslocar-se para A ou B ou U. Se, por exemplo, se encontrar em B pode decidir deslocar-se para A ou C. Idêntico estudo pode fazer-se para qualquer dos pontos da rede pelo que se deve associar uma *Variável de Decisão* a cada uma das ligações existentes. ***Estas variáveis deverão ser do tipo binário*** ou seja quando a variável tem valor 1 a ligação é utilizada e quando a variável tem valor 0 a ligação não é utilizada.

Assim sendo, quando o aluno está em casa pode escolher deslocar-se para A ou B ou U (escolhas disjuntas) pelo que a *Restrição Técnica é:*

- $x_{ZA} + x_{ZB} + x_{ZU} = 1$

Assim "obriga-se" a que uma das variáveis tenha valor 1 e que consequentemente o aluno saia de casa e se desloque para A ($x_{ZA} = 1$; $x_{ZB} = x_{ZU} = 0$) ou B ($x_{ZB} =1$; $x_{ZA} = x_{ZU} = 0$) ou U ($x_{ZU} =1$; $x_{ZA} = x_{ZB} = 0$).

Vejamos agora o ponto A. O aluno só atinge A se usar a ligação ZA ou BA ou seja se $x_{ZA} + x_{BA} =1$; por outro lado, o aluno nunca atinge A no caso contrário ou seja se $x_{ZA} + x_{BA} = 0$. Na primeira destas situações (atinge A), porque ainda não atingiu a universidade o aluno terá que decidir seguir para U ou C o que implica $x_{AU} + x_{AC} = 1$ enquanto na segunda das situações $x_{AU} + x_{AC} = 0$. Resumindo, se o aluno atinge A deve prosseguir viagem não tendo que o fazer se nunca atingiu A pelo que neste ponto intermédio do deslocamento deve verificar-se a *Restrição Técnica*

- $x_{ZA} + x_{BA} = x_{AU} + x_{AC}$ que pode tomar a forma $(x_{ZA} + x_{BA}) - (x_{AU} + x_{AC}) = 0$,

concluindo-se que em qualquer ponto intermédio da rede são iguais as somas das entradas e saídas do vértice.

Como os pontos B e C são pontos intermédios tal como o ponto A, estabelecem-se idênticas *Restrições Técnicas:*

- $x_{ZB} = x_{BA} + x_{BC}$ que pode tomar a forma $x_{ZB} - (x_{BA} + x_{BC}) = 0$ (ponto B)
- $x_{AC} + x_{BC} = x_{CU}$ que pode tomar a forma $(x_{AC} + x_{BC}) - x_{CU} = 0$ (ponto C)

No ponto U (universidade) deve verificar-se a chegada do aluno pelo que este deve efectuar a ligação ZU ou AU ou CU o que implica a *Restrição Técnica:*

- $x_{ZU} + x_{AU} + x_{CU} = 1$

Em suma as *Restrições Técnicas são as seguintes:*

- $x_{ZA} + x_{ZB} + x_{ZU} = 1$
- $(x_{ZA} + x_{BA}) - (x_{AU} + x_{AC}) = 0$
- $x_{ZB} - (x_{BA} + x_{BC}) = 0$
- $(x_{AC} + x_{BC}) - x_{CU} = 0$
- $x_{ZU} + x_{AU} + x_{CU} = 1$

Dado que as variáveis de decisão só podem ter valor 0 ou 1, têm-se as *Restrições Lógicas:*

- $x_{ij} = 0$ ou 1 ($i = Z, A, B, C$; $j = A, B, C, U$; $i \neq j$)

O aluno decide à luz do itinerário mais rápido (menor tempo) de casa (ponto Z) até à universidade (ponto U) pelo que a *Função Objectivo a Minimizar é a seguinte:*

$$\text{Min } f(X) = 12x_{ZA} + 15x_{ZB} + 50x_{ZU} + 20x_{AC} + 30x_{AU} + 18x_{BA} + 20x_{BC} + 9x_{CU}$$

Notar que o número de Variáveis de Decisão é igual ao número de ligações (arcos neste caso) entre vértices da rede e que o número de restrições é igual ao número de vértices da rede.

E se as ligações não tiverem sentido obrigatório que modificações devem ser introduzidas no modelo proposto? Pense no assunto e consulte o manual do autor "Teoria dos Grafos - Encaminhamento".

Nota: Na prática, dada a dimensão deste tipo de problemas, utiliza-se algoritmia específica na sua resolução (consultar o manual do autor "Teoria dos Grafos").

7. Problema de Mistura

Uma empresa produz um adubo combinando 4 tipos de componentes (C_1 , C_2 , C_3 , C_4).

As disponibilidade e custo destes componentes são as seguintes:

Componente	Disponibilidade (kg)	Custo (por kg)
C_1	2200	28
C_2	1800	35
C_3	2000	52
C_4	2400	26

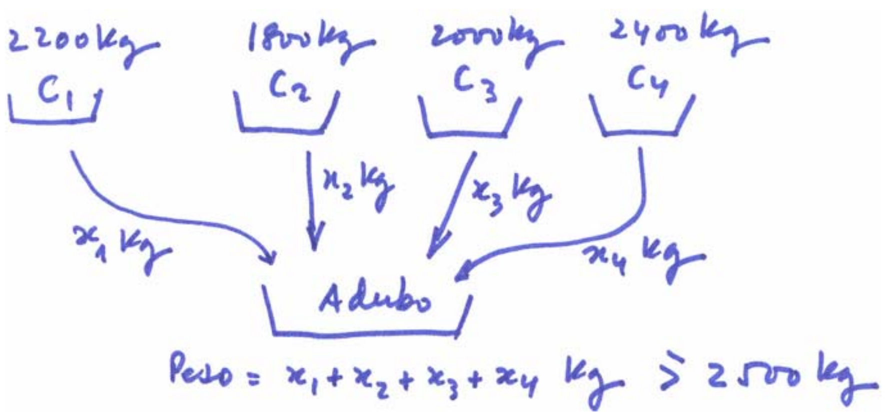
O adubo (mistura) deve ter as seguintes características:

- pelo menos 45% de C1 e não mais do que 60% deste componente
- pelo menos 10% de C_2
- pelo menos 10% de C_3
- não haver mais do que 25% de C_2 +C_3
- não exceder 50% de C_4

Devem ser produzidos, no mínimo, 2500 Kg de adubo.

A produção do adubo exige conhecer a quantidade de cada um dos componentes na mistura pelo que as *Variáveis de Decisão são:*

x_1 = kg do componente 1
x_2 = kg do componente 2
x_3 = kg do componente 3
x_4 = kg do componente 4



a. Atendendo às disponibilidades de cada componente para a mistura têm-se as *Restrições Técnicas:*

- $x_1 \leq 2200$ kg
- $x_2 \leq 1800$ kg
- $x_3 \leq 2000$ kg
- $x_4 \leq 2400$ kg

b. Na mistura de peso total ($x_1 + x_2 + x_3 + x_4$) deve haver pelo menos 45% do componente C_1 o que estabelece a *Restrição Técnica:*

- $x_1 \geq 0.45\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

Por outro lado, este componente, não deve exceder 60% do peso total da mistura pelo que se estabelece a *Restrição Técnica:*

- $x_1 \leq 0.60\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

c. Na mistura deve haver pelo menos 10% do componente C_2 o que estabelece a *Restrição Técnica:*

- $x_2 \geq 0.10\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

d. De igual modo para C_3 tem-se:

- $x_3 \geq 0.10\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

e. Não podendo haver mais do que 25% de $C_2 + C_3$ tem-se a *Restrição Técnica:*

- x2 + x3 ≤ 0.25 (x1 + x2 + x3 + x4)

f. Não podendo haver mais do que 50% de C_4 tem-se a *Restrição Técnica:*

- $x_4 \leq 0.50\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

g. Pretendendo-se pelo menos 2500 Kg de mistura estabelece-se a *Restrição Técnica:*

- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2500$

Em resumo as Restrições Técnicas do modelo são as seguintes:

$$
\begin{array}{lll}
x_1 & \geq\ 0.45\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) & \Rightarrow\ 0.55x_1 - 0.45x_2 - 0.45x_3 - 0.45x_4 \geq 0 \\
x_1 & \leq\ 0.60\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) & \Rightarrow\ 0.40x_1 - 0.60x_2 - 0.60x_3 - 0.60x_4 \leq 0 \\
x_2 & \geq\ 0.10\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) & \Rightarrow\ -0.10x_1 + 0.90x_2 - 0.10x_3 - 0.10x_4 \geq 0 \\
x_3 & \geq\ 0.10\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) & \Rightarrow\ -0.10x_1 - 0.10x_2 + 0.90x_3 - 0.10x_4 \geq 0 \\
x_4 & \leq\ 0.50\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) & \Rightarrow\ -0.50x_1 - 0.50x_2 - 0.50x_3 + 0.50x_4 \leq 0 \\
x_2 + x_3 & \leq\ 0.25\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) & \Rightarrow\ -0.25x_1 + 0.75x_2 + 0.75x_3 - 0.25x_4 \leq 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq\ 2500 & \Rightarrow\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2500
\end{array}
$$

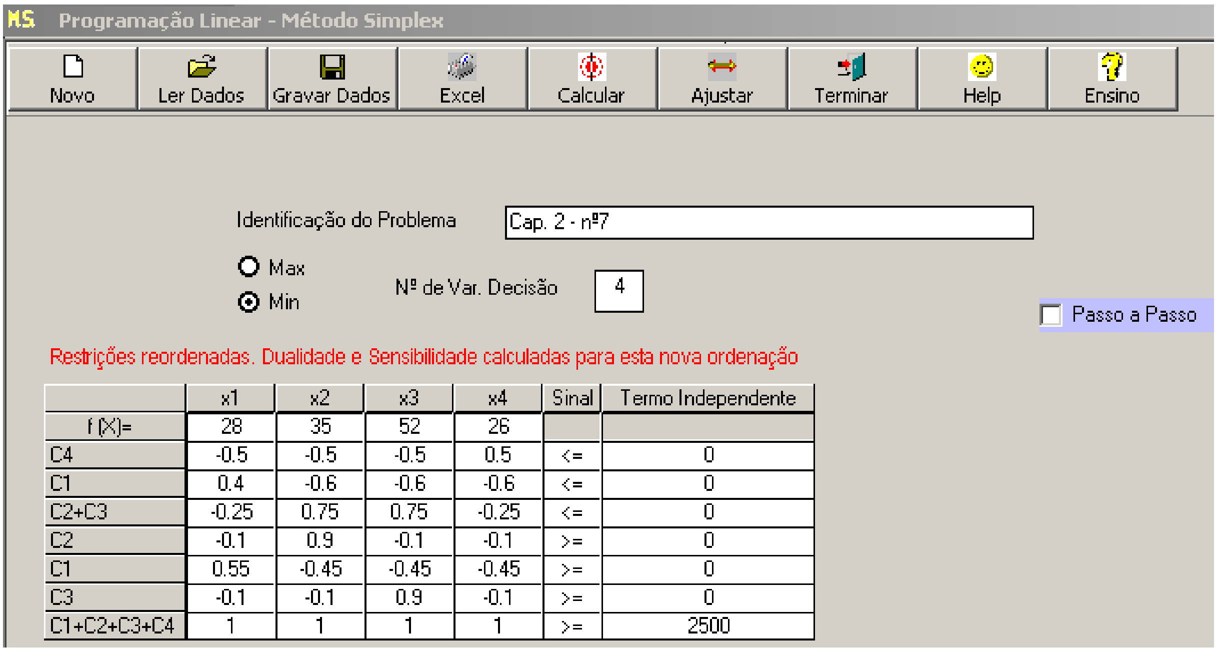
A decisão sobre a quantidade de cada componente a usar na mistura é feita à luz da minimização do custo total desta pelo que a *Função Objectivo a Minimizar é:*

$$\text{Min } f(X) = 28x_1 + 35x_2 + 52x_3 + 26x_4$$

As *Variáveis de Decisão* devem ter valor não negativo pelo que se estabelecem as *Restrições Lógicas:*

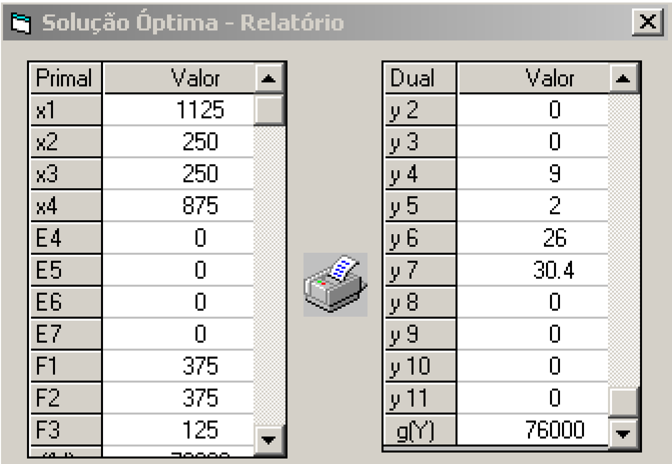
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

Recorrendo ao software do autor a entrada de dados é a seguinte:



	x1	x2	x3	x4	Sinal	Termo Independente
f (X)=	28	35	52	26		
C4	-0.5	-0.5	-0.5	0.5	<=	0
C1	0.4	-0.6	-0.6	-0.6	<=	0
C2+C3	-0.25	0.75	0.75	-0.25	<=	0
C2	-0.1	0.9	-0.1	-0.1	>=	0
C1	0.55	-0.45	-0.45	-0.45	>=	0
C3	-0.1	-0.1	0.9	-0.1	>=	0
C1+C2+C3+C4	1	1	1	1	>=	2500

e a solução óptima é a seguinte:



Primal	Valor
x1	1125
x2	250
x3	250
x4	875
E4	0
E5	0
E6	0
E7	0
F1	375
F2	375
F3	125

Dual	Valor
y 2	0
y 3	0
y 4	9
y 5	2
y 6	26
y 7	30.4
y 8	0
y 9	0
y 10	0
y 11	0
g(Y)	76000

Leitura

Misturar: 1125kg de C1; 250kg de C2; 250kg de C3; 875kg de C4

Adubo produzido = 1125 + 250 + 250 + 875 = 2500kg

Custo total mínimo = 76000 u.m.

Nota:

% de C1 = 1125/2500 = 45%

% de C2 = % de C3 = 250/2500 = 10%

% de C2 + C3 = 500/2500 = 20%

% de C4 = 875/2500 = 35%

8. Problema de Transporte

Uma empresa tem 3 armazéns com stock de 15, 15, 17 toneladas de batata, respectivamente necessitando de fornecer a cada um de 4 clientes respectivamente 14, 8, 12, 9 toneladas.

Os custos de transporte de uma tonelada de batata de cada armazém para cada um dos clientes são os seguintes:

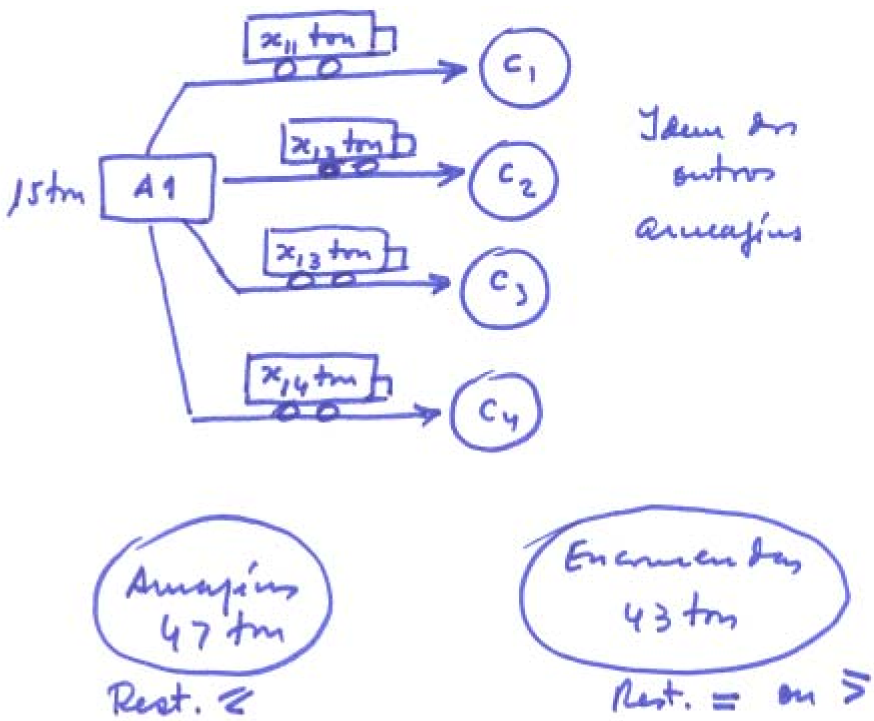
Matriz de custos (u.m.)

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4
Armazém 1	12	10	9	11
Armazém 2	10	14	13	12
Armazém 3	12	9	9	13

De que modo devem ser satisfeitas as encomendas dos clientes optimizando o custo total do transporte ?

Do 1º armazém pode decidir-se enviar batata (toneladas) para qualquer dos clientes em quantidades que podemos considerar sendo x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{14} . Idêntica decisão pode tomar-se par os restantes armazéns pelo que as *Variáveis de Decisão do modelo são:*

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4
Armazém 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
Armazém 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
Armazém 3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}



No total há 15+15+17 = 47 toneladas de batata nos 3 armazéns sendo os pedidos de 14+ 8+ 12+ 9 = 43 toneladas ou seja a <u>Oferta Total é superior à Procura Total</u>.

O 1º armazém não pode enviar mais do que as 15 toneladas do stock pelo que a *Restrição Técnica é:*

- $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 15$

De forma idêntica têm-se para os outros dois armazéns as *Restrições Técnicas:*

- $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 15$
- $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 17$

Atente-se agora que o 1º cliente pediu 14 toneladas e que há stock suficiente para satisfazer todas as encomendas. Então a encomenda do 1º cliente é satisfeita considerando a *Restrição Técnica:*

- $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 14$

Para os restantes clientes, idêntico raciocínio conduz às *Restrições Técnicas:*

- x12 + x22 + x32 = 8 (ou "≥" ; optimizar mínimo)
- $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 12$ (ou "≥" ; optimizar mínimo)
- $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 9$ (ou "≥" ; optimizar mínimo)

A decisão sobre o valor de cada uma das variáveis de decisão é feita à luz do menor custo total do transporte o que exige minimizar a *Função Objectivo*:

$$\text{Min } f(X) = 12x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 11x_{14} + 10x_{21} + 14x_{22} + 13x_{23} + 12x_{24} + 12x_{31} + 9x_{32} + 9x_{33} + 13x_{34}$$

As variáveis de decisão só podem ter valor não negativo e inteiro do que resultam as *Restrições Lógicas:*

$x_{ij} \geq 0$ e Int. (i = 1 a 3 ; j = 1 a 4)

9. Problema de Localização

Uma empresa seleccionou 5 cidades (A, B, C, D, E) para abrir sucursais dispondo de um estudo económico de que se apresenta o extracto seguinte:

	Custo da instalação (u.m.)
A	300
B	180
C	100
D	160
E	200

A um dos cenários do processo de decisão estão associados os seguintes condicionamentos:

- se forem instaladas sucursais em "A" <u>e</u> "B" não deve instalar-se sucursal na cidade "C"
- se forem instaladas sucursais em "D" <u>ou</u> "E" não deve instalar-se sucursal na cidade "B"
- no conjunto das cidades "B" , "C" e "D" <u>só uma delas deve ter</u> sucursal
- se for instalada sucursal em "E" deve instalar-se sucursal na cidade "A"
- devem ser instaladas pelo menos 3 sucursais

Como optimizar a decisão de investimento nas condições apresentadas para este cenário?

Este é um problema típico do recurso a variáveis binárias. De facto para qualquer um dos "j" dos locais referidos apenas se pode decidir instalar a sucursal (x_j =1) ou não instalar a sucursal (x_j = 0).

A 1ª condição é satisfeita garantindo " $x_a + x_b + x_c \leq 2$ " dado que as <u>situações admissíveis</u> são as seguintes:

A	B	C	$x_a + x_b + x_c$
Não	Não	Não	0
Não	Não	Sim	1
Não	Sim	Não	1
Não	Sim	Sim	2
Sim	Não	Não	1
Sim	Não	Sim	2
Sim	Sim	Não	2

A 2ª condição é satisfeita com duas restrições técnicas:

" $x_b + x_d \leq 1$ " (se $x_d = 1$ tal implica $x_b = 0$)

" $x_b + x_e \leq 1$ " (se $x_e = 1$ tal implica $x_b = 0$)

A 3ª condição é satisfeita com a restrição técnica " $x_b + x_c + x_d = 1$ "

A 4ª condição é satisfeita com a restrição técnica " $x_a \geq x_e$ " pois se x_e=1 obrigatoriamente x_a =1 mas se $x_e = 0$ a variável x_a pode tomar os valores 0 ou 1 (não instalar ou instalar).

A 5ª condição é satisfeita coma restrição técnica " $x_a + x_b + x_c + x_d + x_e \geq 3$ "

Porque uma solução admissível é tanto melhor quanto menor for o custo total associado, *<u>a função objectivo a minimizar</u>* é $f(X) = 300\, x_a + 180\, x_b + 100\, x_c + 160\, x_d + 200\, x_e$.

10. Problema de Produção interdependente

Uma fábrica produz, semanalmente, os bens P1 , P2 e P3.

A empresa recebe semanalmente 10 ton de matéria prima nº1 (MP1) e 20 ton de matéria prima nº2 (MP2) que paga a 500 u.m./ton e 300 u.m./ton respectivamente.

Os consumos unitários de matéria prima e os preços de venda dos produtos são os seguintes:

	MP1 (kg)	MP2 (kg)	Preço de Venda (u.m.)
P_1	200	100	180
P_2	350	150	250
P_3	100	250	150

Do estudo do histórico de vendas resulta a necessidade de satisfazer os aspectos seguintes:

- a produção total deve ser, no mínimo, 40 unidades
- a produção de P_2 tem duas alternativas : 10 ou 20 unidades
- a produção de P_1 deve ser, no mínimo, 10 unidades se a produção de P_3 for pelo menos 40 unidades

O modelo de PL que permite calcular a produção óptima utiliza as Variáveis de Decisão x_1 , x_2 e x_3 representando o nível de produção (unidades) de P1, P2 e P3.

O objectivo (ou critério de apreciação das soluções admissíveis) é a Maximização do lucro pelo que é necessário calcular previamente os lucros unitários da venda:

	Custo da MP1 (0.5 u.m./kg)	Custo da MP2 (0.3 u.m./kg)	Custo total (u.m./unidade)	Preço de Venda (u.m./unidade)	Lucro de Venda (u.m./unidade)
P_1	200(0.5) =100	100(0.3)= 30	130	180	50
P_2	350(0.5)=175	150(0.3)=45	220	250	30
P_3	100(0.5)=50	250(0.3)=75	125	150	25

Função objectivo a maximizar: $f(X) = 50x_1 + 30x_2 + 25x_3$.

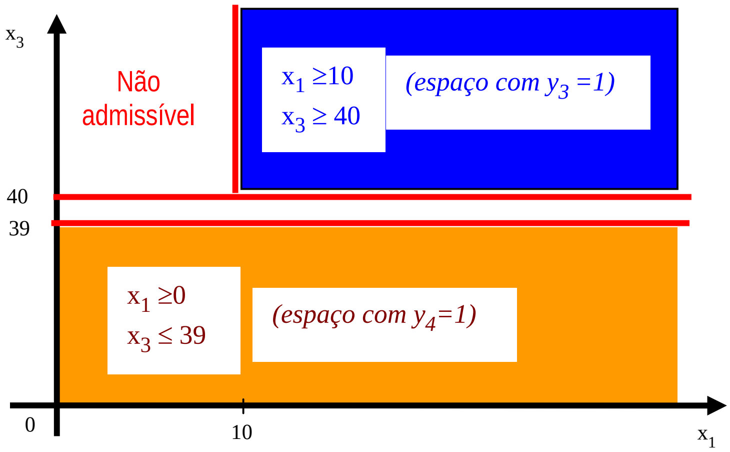
Tecnicamente é necessário garantir:

- não exceder a matéria prima disponível
  - $200x_1 + 350x_2 + 100x_3 \leq 10000$ kg de MP1
  - $100x_1 + 150x_2 + 250x_3 \leq 20000$ kg de MP2
- produzir pelo menos 40 unidades
  - $x_1 + x_2 + x_3 \geq 40$
- produzir 10 ou 20 unidades de P2; é necessário recorrer às variáveis binárias y_1 e y_2
  - $x_2 = 10y_1 + 20y_2$
  - $y_1 + y_2 = 1$

Nota: como uma e só uma das variáveis binárias pode ter valor "1" a restrição técnica fica

$x_2 =10 + 0$ ou $x_2 = 0 + 20$ como é necessário

- produzir pelo menos 10 unidades de P1 se a produção de P3 for de 40 ou mais unidades; é necessário recorrer às variáveis binárias y_3 e y_4 . A figura seguinte mostra o espaço admissível que é necessário programar:



- $x_1 \geq 10y_3$
- $x_3 \geq 40y_3$
- $x_3 \leq 39y_4 + My_3$ (“M” significa “big M” ou seja um coeficiente muito elevado)
- $y_3 + y_4 = 1$

Logicamente o domínio de cada uma das variáveis é o seguinte:

x_1 , x_2 , x_3 , $x_4 \geq 0$ e inteiro ; y_1 , y_2 , y_3 , y_4 = 0 ou 1

Veja-se o controlo efectuado pelo recurso às variáveis binárias y_3 e y_4 :

	$y_3 + y_4 = 1$	
	$y_3 = 1$ e $y_4 = 0$	$y_3 = 0$ e $y_4 = 1$
	Restrições ficam do seguinte modo:	
$x_1 \geq 10y_3$	$x_1 \geq 10$	$x_1 \geq 0$
$x_3 \geq 40y_3$	$x_3 \geq 40$	$x_3 \geq 0$
$x_3 \leq 39y_4 + My_3$	$x_3 \leq M$	$x_3 \leq 39$

11. Problema de Produção (recorrendo a Variáveis Binárias)

Uma empresa têxtil que dispõe, no momento, de um excedente semanal de 150 horas de mão de obra e 160 unidades quadradas de um determinado tecido, estuda a possibilidade de produzir 3 bens B1, B2, e B3 que venderá com lucro unitário de 6, 4 e 7 u.m. respectivamente.

A produção de 1 unidade de cada um dos bens referidos requer o seguinte:

Bem	Mão de obra	Tecido
B_1	3 horas	4 un. quadradas
B_2	2 horas	3 un. quadradas
B_3	6 horas	4 un. quadradas

O aluguer de equipamento adequado tem os seguintes custos semanais:

Produção	Custo do Aluguer do Equipamento
B_1	200 u.m.
B_2	150 u.m.
B_3	100 u.m.

O modelo de PL para calcular as quantidades a produzir de B_1 , B_2 e B_3 tem as Variáveis de Decisão:

x_1 = nível da produção de B_1

x_2 = nível da produção de B_2

x_3 = nível da produção de B_3

e as seguintes Restrições Técnicas:

- $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150$: mão de Obra
- $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160$: tecido
- $x_1 \leq My_1$: só produz B_1 se alugar equipamento (implica $y_1 = 1$)
- $x_2 \leq My_2$: só produz B_2 se alugar equipamento (implica $y_2 = 1$)
- $x_3 \leq My_3$: só produz B_3 se alugar equipamento (implica $y_3 = 1$)

O uso das variáveis binárias y_j (j =1 a 3) é necessário para **associar** a produção de qualquer dos bens ao aluguer de equipamento. Assim, por exemplo, para $x_1 \leq My_1$:

- se $y_1 = 0$, $x_1 = 0$ e não se produz B_1
- se $y_1 = 1$, $x_1 \leq$ Big "M" podendo o nível de produção de B_1 (que é x_1) ter qualquer valor não negativo.

O Objectivo é maximizar o lucro: $f(X,Y) = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 -200y_1 - 150y_2 - 100y_3$

Restrições lógicas : $x_j \geq 0$; $y_j = 0$ ou 1 (j= 1 a 3)

12. Problema de Planeamento

Uma empresa planeia para Janeiro o arranque de uma nova linha de produção, sendo necessário efectuar contratação e treino de novos trabalhadores nos próximos 6 meses.

Os aspectos essenciais a observar são os seguintes:

- Necessidades da produção (horas) : 1000 em Janeiro, Fevereiro e Março ; 1500 em Abril, Maio e Junho.
- Número de actuais trabalhadores em reciclagem e prontos para operar em Janeiro : 13
- Tempo necessário ao treino de um novo trabalhador : 1 mês
- Máximo de trabalhadores em treino em cada mês : 4
- Horário mensal de um trabalhador: 100 horas
- Prevê-se que, mensalmente, 20% dos trabalhadores abandonem a empresa voluntariamente ou por despedimento.
- Não se prevê que haja quebras de pessoal durante o período de treino.
- Custo previsto da formação de 1 trabalhador : 1000 u.m. nos primeiros 3 meses e 1250 u.m. nos restantes 3 meses.
- Salário mensal : 400 u.m.
- Um trabalhador formado num dado mês que não comece a trabalhar imediatamente recebe 50 u.m. / mês.

Pretende-se optimizar o custo total do pessoal nos próximos 6 meses.

Comece-se pelo Estudo da Fita do Tempo e resumam-se os resultados do estudo no quadro seguinte:

Mês	Horas de Produção necessárias	Nº trab. necessários para a produção	Quebras no mês (20%)	Efectivo no final do mês	Novos Trabalhadores necessários
Janeiro	1000	1000h/100h = 10	0.2 (10) = 2	13 - 2 = 11	0 (10 < 11)
Fevereiro	1000	1000h/100h = 10	0.2 (10) = 2	11 - 2 = 9	10 – 9 = 1
Março	1000	1000h/100h = 10	0.2 (10) = 2	9 - 2 + 1 = 8	10 – 8 = 2
Abril	1500	1500h/100h = 15	0.2 (15) = 3	8 - 3 + 2 = 7	15 – 7 = 8
Maio	1500	1500h/100h = 15	0.2 (15) = 3	7 - 3 + 8 = 12	15 – 12= 3
Junho	1500	1500h/100h = 15	0.2 (15) = 3	12 - 3 + 3 = 12	15 – 12 = 3

Um trabalhador que seja contratado em Janeiro, faz o seu treino durante este mês e inicia o trabalho normal num dos 5 meses seguintes. Teremos assim as Variáveis de Decisão :

- x_{12} = n.º de formandos em Janeiro que iniciam a laboração em Fevereiro
- x_{13} = n.º de formandos em Janeiro que iniciam a laboração em Março
- x_{14} = n.º de formandos em Janeiro que iniciam a laboração em Abril
- x_{15} = n.º de formandos em Janeiro que iniciam a laboração em Maio
- x_{16} = n.º de formandos em Janeiro que iniciam a laboração em Junho

Como é necessário proceder de igual modo para os meses restantes, as variáveis de Decisão serão do tipo:

x_{ij} (i=Jan, Fev, Mar, Abr, Mai ; j= Fev, Mar, Abr, Mai, Jun).

Restrições técnicas:

⇒ *respeitantes ao máximo de 4 trabalhadores/mês em treino*

Em Janeiro:	$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$	$\leq$	4
Em Fevereiro	$x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26}$	$\leq$	4
Em Março	$x_{34} + x_{35} + x_{36}$	$\leq$	4
Em Abril	$x_{45} + x_{46}$	$\leq$	4
Em Maio	x_{56}	$\leq$	4

⇒ *respeitantes aos novos trabalhadores necessários em cada mês*

- Se em Fevereiro é preciso 1 novo trabalhador (ver quadro) o mesmo tem que ser treinado em mês anterior (Janeiro) pelo que $x_{12} = 1$;
- Se em Março são precisos 2 novos trabalhadores (ver quadro) os mesmos têm que ser treinados em mês anterior (Janeiro ou Fevereiro) pelo que $x_{13} + x_{23} = 2$
- Procedendo de igual modo para cada mês temos:

Em Fevereiro	x_{12}	=	1
Em Março	$x_{13} + x_{23}$	=	2
Em Abril	$x_{14} + x_{24} + x_{34}$	=	8
Em Maio	$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45}$	=	3
Em Junho	$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56}$	=	3

Objectivo : Minimizar o Custo Total do pessoal (treino, salário, encargos adicionais)

- No período dos 6 meses, um trabalhador A que inicie o treino em Janeiro, tem um custo de 1000 u.m. para treino e ainda:
  - se iniciar o trabalho produtivo em Fev., receberá 5 meses de salário (2000 u.m.)
  - se iniciar o trabalho produtivo em Mar, receberá 4 meses de salário (1600 u.m.) e o encargo adicional de 50 u.m. (1 mês em que não trabalha mas é pago)
  - se iniciar o trabalho produtivo em Abril, receberá 3 meses de salário (1200 u.m.) e o encargo adicional de 100 u.m. (2 meses em que não trabalha mas é pago)
  - se iniciar o trabalho produtivo em Maio, receberá 2 meses de salário (800 u.m.) e o encargo adicional de 150 u.m. (3 meses em que não trabalha mas é pago)
  - se iniciar o trabalho produtivo em Junho, receberá 1 mês de salário (400 u.m.) e o encargo adicional de 200 u.m. (4 meses em que não trabalha mas é pago)

Raciocinando de forma similar para os meses seguintes, com " x_{ij} " trabalhadores, obtém-se o quadro com os coeficientes da função objectivo:

		Início do trabalho Produtivo				
Início do treino	Rubricas	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
Janeiro	Treino	1000	1000	1000	1000	1000
	Salários	5(400)=2000	4(400)=1600	3(400)=1200	2(400)=800	1(400)=400
	Subsídio	0	1(50) =50	2(50) =100	3(50) =150	4(50) =200
Fevereiro	Treino		1000	1000	1000	1000
	Salários		4(400)=1600	3(400)=1200	2(400)=800	1(400)=400
	Subsídio		0	1(50) =50	2(50) =100	3(50) =150
Março	Treino			1000	1000	1000
	Salários			3(400)=1200	2(400)=800	1(400)=400
	Subsídio			0	1(50) =50	2(50) =100
Abril	Treino				1250	1250
	Salários				2(400)=800	1(400)=400
	Subsídio				0	1(50) =50
Maio	Treino					1250
	Salários					1(400)=400
	Subsídio					0

Min f(X) = $(1000 + 2000)\ x_{12} + (1000 + 1600 + 50)\ x_{13} + (1000 + 1200 + 100)\ x_{14} +$
$+ (1000 + 800 + 150)\ x_{15} + (1000 + 400 + 200)\ x_{16} +$
$(1000 + 1600)\ x_{23} + (1000 + 1200 + 50)\ x_{24} + (1000 + 800 + 100)\ x_{25} + (1000 + 400 + 150)\ x_{26} +$
$+ (1000 + 1200)\ x_{34} + (1000 + 800 + 50)\ x_{35} + (1000 + 400 + 100)\ x_{36} +$
$+ (1250 + 800)\ x_{45} + (1250 + 400 + 50)\ x_{46} + (1250 + 400)\ x_{56} =$

ou seja:

Min f(X) = $= 3000\ x_{12} + 2650\ x_{13} + 2300\ x_{14} + 1950\ x_{15} + 1600\ x_{16} + 2600\ x_{23} + 2250\ x_{24} + 1900\ x_{25}$
$+ 1550\ x_{26} + + 2200\ x_{34} + 1850\ x_{35} + 1500\ x_{36} + 2050\ x_{45} + 1700\ x_{46} + 1650\ x_{56}$

Restrições lógicas : $x_{ij} \geq 0$ e Inteiro (i=1 a 5 ; j=2 a 6)

13. Produção Interdependente

Uma empresa produz 2 componentes (C_1 e C_2). O fabrico de qualquer dos componentes envolve 3 secções da empresa (S_1, S_2 e S_3) de que se conhece a capacidade de produção horária (quadro 1) e o custo de operação por hora (quadro 2).

	Quadro 1(nº/h)		Quadro 2 (u.m.)	
	C1	C2	C1	C2
S1	25	40	20	20
S2	28	35	14	14
S3	18	12	36	24

A matéria prima para produzir 1 componente C1 custa 2 u.m e para 1 componente C2 custa 2.8 u.m.

Não devem produzir-se mais do que 5 componentes C2 por cada 4 componentes C1 produzidos.

Os componentes são lançados no mercado com os seguintes preços:

- C1 ... 8.3 u.m.
- C2 ... 10.7 u.m.

Formalizar em PL para optimizar a produção dos 2 tipos de componentes.

É necessário calcular o número de componentes a produzir pelo que as Variáveis de Decisão são:

x_1 = número de componentes C1

x_2 = número de componentes C2

Restrições Técnicas:

É necessário calcular os coeficientes técnicos das variáveis sendo de interesse ver, por exemplo, que se a Secção 1 produz por hora 25 componentes C1 então consome 1/25 horas (2.4 minutos) por unidade do que resulta que para esta Secção o coeficiente técnico de x_1 é 1/25 horas.

- capacidade produtiva da Secção 1:

$$\begin{array}{lllllllll} 1/25\, x_1 & + & 1/40\, x_2 & \leq & 1 \text{ hora} & & 40\, x_1 & + & 25\, x_2 \leq 1000 \\ 1/28\, x_1 & + & 1/35\, x_2 & \leq & 1 \text{ hora} & \text{ou} & 35\, x_1 & + & 28\, x_2 \leq 980 \\ 1/18\, x_1 & + & 1/12\, x_2 & \leq & 1 \text{ hora} & & 12\, x_1 & + & 18\, x_2 \leq 216 \end{array}$$

- não produzir mais do que 5 unidades de C_1 por cada 4 unidades de C_2 :

$$5x_1 \geq 4\, x_2 \qquad \text{ou} \qquad 5x_1 - 4\, x_2 \leq 0$$

Objectivo : Maximizar o Lucro da venda

$$\text{Max } f(X) = 3x_1 + 5x_2$$

O quadro seguinte explicita o cálculo do lucro unitário para C_1 e C_2 :

Custo Produção por unidade	C1			C2		
Em S_1	20/25	=	0.8 u.m.	20/40	=	0.5 u.m.
Em S_2	14/28	=	0.5 u.m.	14/35	=	0.4 u.m.
Em S_3	36/18	=	2.0 u.m.	24/12	=	2.0 u.m.
Matéria Prima			2.0 u.m.			2.8 u.m.
Total do custo			5.3 u.m.			5.7 u.m.

Preço Venda	8.3 u.m.		10.7 u.m.

Lucro Unitário	3.0 u.m.		5.0 u.m.

Restrições lógicas : $x_j \geq 0$ e Inteiro (j=1 a 2)

14. Restrição Particular

Admita a situação anterior (problema 13) com as seguintes alterações:

"A produção não deve exceder 5 unidades de C1 ou 8 unidades de C2 ou combinação apropriada de ambos".

Adaptar o modelo de PL às novas condições.

A 2ª restrição técnica deve ser substituída por:

$$1/5\ x_1 + 1/8\ x_2 \leq 1 \qquad \text{ou} \qquad 8x_1 + 5x_2 \leq 40$$

15. Localização

No distrito A é necessário planear o posicionamento de meios aéreos de ataque a incêndios florestais.

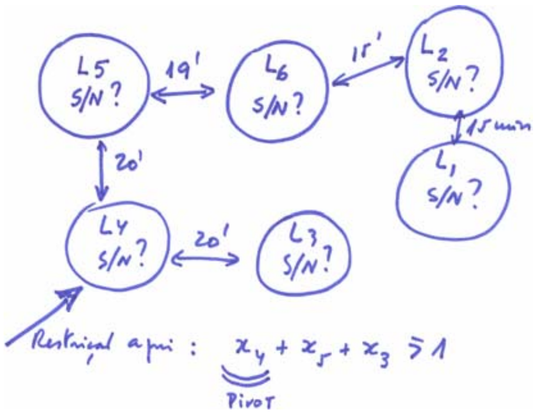
No distrito há 6 localidades (L1 , L2, L3, L4, L5 e L6) com capacidade para receber os referidos meios.

Pretende-se reduzir ao mínimo o número de localidades com meios aéreos, garantindo-se que todas elas têm apoio aéreo no prazo máximo de 20 minutos.

O quadro seguinte apresenta os tempos de voo (minutos) entre qualquer par de localidades:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
L1	0	15	25	35	35	25
L2	15	0	30	40	25	15
L3	25	30	0	20	35	25
L4	35	40	20	0	20	30
L5	35	25	35	20	0	19
L6	25	15	25	30	19	0

Apresentar o modelo de PL que Minimiza o número de localidades onde são posicionados os meios aéreos.



As Variáveis de Decisão (binárias) são : x_1 , x_2 , x_3 , x_4, x_5 , x_6

Assim, por exemplo, se x_4 =1 serão colocados meios em L4 (não o sendo se for nula).

Restrições Técnicas

No quadro dos tempos de voo é necessário identificar para cada localidade, quais as que desta podem ser apoiadas (localidades a 20 ou menos minutos; ver casas sombreadas):

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
L1	0	15	25	35	35	25
L2	15	0	30	40	25	15
L3	25	30	0	20	35	25
L4	35	40	20	0	20	30
L5	35	25	35	20	0	19
L6	25	15	25	30	19	0

Analise-se a localidade L1 :

- se os meios forem colocados em L1 , a localidade L2 fica apoiada (tempo de voo=15 minutos) e vice-versa. A restrição a considerar é então $x_1 + x_2 \geq 1$ que garante meios em pelo menos uma das localidades sem impedir que possam ser colocados em ambas (o que pode revelar-se conveniente pois L2 pode apoiar não só L1 como ainda L3…).

Procedendo de igual modo para todas as localidades, têm-se as Restrições Técnicas:

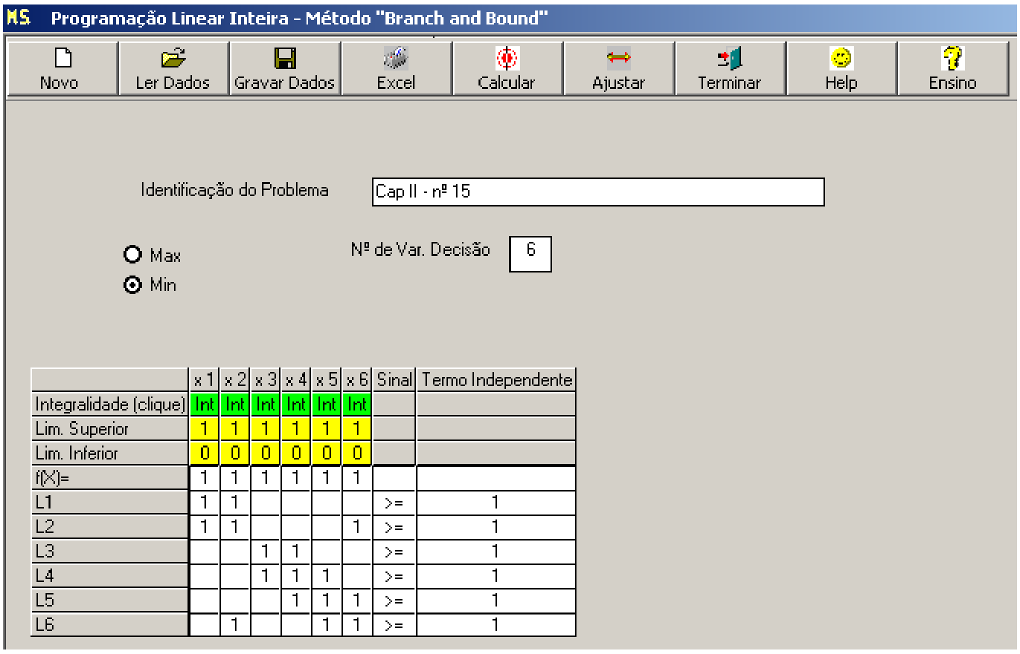
- Em L1 : $x_1 + x_2 \geq 1$
- Em L2 : $x_1 + x_2 + x_6 \geq 1$
- Em L3 : $x_3 + x_4 \geq 1$
- Em L4 : $x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$
- Em L5 : $x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$
- Em L6 : $x_2 + x_5 + x_6 \geq 1$

Objectivo : Minimizar o número de localidades onde colocar meios

$$\text{Min } f(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

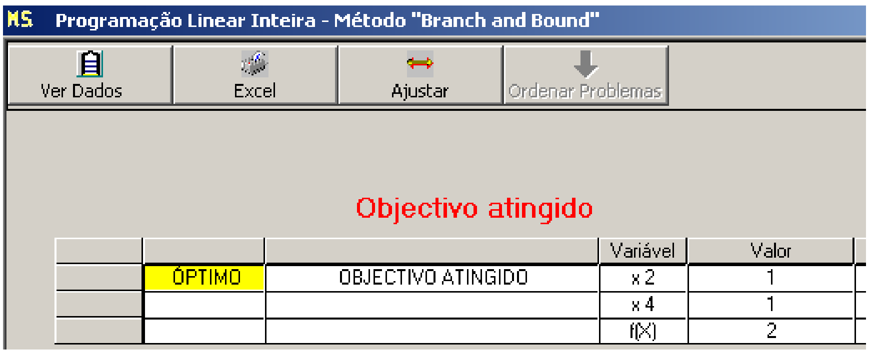
Restrições lógicas : $x_j = 0$ ou 1 (j = 1 a 6)

Recorrendo ao software do autor a entrada de dados é a seguinte:



	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	Sinal	Termo Independente
Integralidade (clique)	Int	Int	Int	Int	Int	Int		
Lim. Superior	1	1	1	1	1	1		
Lim. Inferior	0	0	0	0	0	0		
f(X)=	1	1	1	1	1	1		
L1	1	1					>=	1
L2	1	1				1	>=	1
L3			1	1			>=	1
L4			1	1	1		>=	1
L5				1	1	1	>=	1
L6		1			1	1	>=	1

e a solução óptima é a seguinte:



			Variável	Valor
	ÓPTIMO	OBJECTIVO ATINGIDO	x 2	1
			x 4	1
			f(X)	2

Solução óptima : Colocar meios aéreos em L2 e L4

16. Produção de componentes

Uma empresa produz 2 componentes A e B.

Qualquer dos componentes exige a intervenção sucessiva das Secções 1, 2 e 3 por esta ordem.

A capacidade diária de processamento em cada secção é a seguinte:

- Secção 1 : 80 componentes A ou 50 componentes B ou qualquer combinação apropriada destes.
- Secção 2 : 30 componentes A ou 40 componentes B ou qualquer combinação apropriada destes.
- Secção 3 : 60 componentes A ou 35 componentes B ou qualquer combinação apropriada destes.

O lucro da venda do componente A é de 5 u.m. e o de B é de 7 u.m.

Qual é o plano óptimo de produção?

É necessário calcular o número de componentes a produzir sendo as Variáveis de Decisão :

x_1 = nível da produção de A

x_2 = nível da produção de B

Restrições Técnicas:

- capacidade produtiva da Secção 1:

$1/80\ x_1 + 1/50\ x_2 \leq 1$ dia ou $50\ x_1 + 80\ x_2 \leq 4000$

- capacidade produtiva da Secção2:

$1/30\ x_1 + 1/40\ x_2 \leq 1$ dia ou $40\ x_1 + 30\ x_2 \leq 1200$

- capacidade produtiva da Secção 3:

$1/60\ x_1 + 1/35\ x_2 \leq 1$ dia ou $35\ x_1 + 60\ x_2 \leq 2100$

Objectivo : Maximizar o Lucro da venda

$$\text{Max } f(X) = 5x_1 + 7x_2$$

Restrições lógicas : $x_j \geq 0$ e Inteiro (j=1 a 2)

17. Produção de componentes

Uma empresa tem 2 fábricas F1 e F2 onde produz 3 componentes A, B e C.

As capacidades de produção semanal são:

F1 : 100 componentes A ou 200 componentes B ou 200 componentes C ou qualquer combinação apropriada destes.

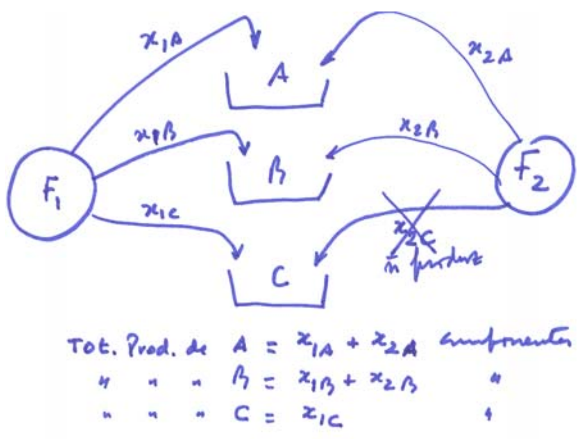
F2 : 200 componentes A ou 200 componentes B ou qualquer combinação apropriada destes.

A empresa vende o componente A a 20 u.m., B a 40 u.m e C a 60 u.m.

O custo de produção do componente A, B e C (em u.m.) é o seguinte:

	A	B	C
F1	10	20	15
F2	12	15	Não produz

Apresentar o modelo de PL que permita calcular o plano de produção óptimo.



É necessário calcular o número de componentes a produzir em cada fábrica sendo as Variáveis de Decisão x_{ij} ($i = F_1$, F_2 ; j= A, B, C) conforme o quadro indica:

	A	B	C
F1	x_{1A}	x_{1B}	x_{1C}
F2	x_{2A}	x_{2B}	não produz

Restrições Técnicas:

Capacidade Produtiva							
F1 :	$1/100\ x_{1A}$	+	$1/200\ x_{1B}$	+	$1/200\ x_{1C}$	$\leq$	1
F2 :	$1/200\ x_{2A}$	+	$1/200\ x_{2B}$			$\leq$	1

Objectivo : Maximizar o Lucro da venda

Max $f(X) = (20\text{-}10)x_{1A} + (40\text{-}20)x_{1B} + (60\text{-}15)x_{1C} + (20\text{-}12)x_{2A} + (40\text{-}15)x_{2B}$ ou seja,

Max $f(X) = 10x_{1A} + 20x_{1B} + 45x_{1C} + 8x_{2A} + 25x_{2B}$

Restrições lógicas : $x_j \geq 0$ e Inteiro (I=1 a 2 ; j=A,B,C)

18. Publicidade

Uma empresa de publicidade tem um cliente interessado nos seguintes grupos-alvo:

- Grupo 1 : Mulheres casadas na faixa etária dos 25 a 35 anos
- Grupo 2 : Licenciados (as)
- Grupo 3 : Famílias com rendimento anual superior a 4000 u.m.
- Grupo 4 : Possuidores de habitação própria

A importância relativa dos grupos é ponderada pelo cliente do seguinte modo:

- Grupo 1 : Peso 5
- Grupo 2 : Peso 3
- Grupo 3 : Peso 2
- Grupo 4 : Peso 2

A empresa tem contratos com uma revista feminina, uma cadeia de rádio, uma estação de TV e um jornal diário que apresentam as seguintes características:

Características	Revista feminina	Rádio	TV	Jornal
Grupo 1 (%)	90	55	65	42
Grupo 2 (%)	30	20	25	38
Grupo 3 (%)	10	6	5	13
Grupo 4 (%)	21	23	27	30
Custo por anúncio (u.m)	1000	1500	3500	500
Audiência potencial	250000	750000	150000	800000
Nº mínimo de anúncios	10	5	3	15

O cliente só aceita orçamento que não exceda 100000 u.m.

Formular o modelo de PL para maximizar o nível da audiência.

É necessário calcular o número de anúncios em cada meio sendo as Variáveis de Decisão :

x_1 = número de anúncios na revista feminina

x_2 = número de anúncios na rádio

x_3 = número de anúncios na TV

x_4 = número de anúncios no jornal

Restrições Técnicas:

- Número mínimo de anúncios
    - $x_1 \geq 10$
    - $x_2 \geq 5$
    - $x_3 \geq 3$
    - $x_4 \geq 15$
- Orçamento
    - $1000x_1 + 1500x_2 + 3500x_3 + 500x_4 \leq 100000$

Objectivo : Maximizar o nível da audiência qualificada

$$\begin{aligned} \text{Max } f(X) = \; & [5(0.90) + 3(0.30) + 2(.10) + 2(0.21)]\, 250000x_1 + \\ & + [5(0.55) + 3(0.20) + 2(.06) + 2(0.23)]\, 750000x_2 + \\ & + [5(0.65) + 3(0.25) + 2(.05) + 2(0.13)]\, 150000x_3 + \\ & + [5(0.42) + 3(0.38) + 2(.13) + 2(0.30)]\, 800000x_4 \end{aligned}$$

A função objectivo a maximizar é então:

$$\text{Max } f(X) = 1505000x_1 + 2947500x_2 + 6960000x_3 + 3280000x_4$$

Restrições lógicas : $x_j \geq 0$ e Inteiro (j= 1 a 4)

19. Aluguer de viaturas

Uma empresa rodoviária executa transportes rápidos na cidade nas seguintes condições:

Tipo de serviço	Características
1	1 viatura ; Pequena distância (até 20 Km)
2	1 viatura ; Média distância (21 a 50 Km)
3	1 viatura ; Grande distância (51 a 100 Km)

Em qualquer dos tipos de serviço os clientes pagam o respectivo número limite de quilometragem (20 Km no tipo 1, 50 Km no tipo 2 e 100 Km no tipo 3) mesmo que seja percorrida uma distância inferior.

O custo por quilómetro, em unidades monetárias, é o seguinte:

	Tipo de Serviço		
	1	2	3
(A) Viatura grande	5	7	6
(B) Viatura média	12	10	5
(C) Viatura pequena	9	8	7

Para amanhã é necessário garantir os seguintes serviços :

- 4 serviços de quilometragem média igual a 10 Km com viatura B ou C.
- 6 serviços de quilometragem média igual a 40 Km com viatura A, B ou C.
- 7 serviços de quilometragem média igual a 70 Km com viatura A ou B.

O controlo de viaturas informou que ainda há disponíveis 10 viaturas de cada escalão.

Apresentar o modelo de PL que minimiza o custo do aluguer ao cliente.

É necessário calcular, para cada escalão, o número de viaturas que executam cada um dos tipos de serviço pelo que as Variáveis de Decisão são:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Escalão A	x_{A1}	x_{A2}	x_{A3}
Escalão B	x_{B1}	x_{B2}	x_{B3}
Escalão C	x_{C1}	x_{C2}	x_{C3}

representando o número de viaturas do escalão “i”=A, B, C para fazer serviço do tipo “j” = Tipo 1, 2 e 3.

Restrições Técnicas:

- serviços de 10 Km (pequena distância) com viatura B ou C : $x_{B1} + x_{C1} = 4$ serviços
- serviços de 40 Km (média distância) com viatura A, B ou C : $x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} = 6$ serviços
- serviços de 70 Km (pequena distância) com viatura A ou B : $x_{A3} + x_{B3} = 7$ serviços
- disponibilidade de viaturas tipo A : $x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 10$
- disponibilidade de viaturas tipo B : $x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 10$
- disponibilidade de viaturas tipo B : $x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} \leq 10$

Objectivo: Minimizar o total de custo

Organiza-se o quadro de custos:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Escalão A :	Não há	7(50)=350	6(100)=600
Escalão B :	12(20)=240	10(50)=500	5(100)=500
Escalão C :	9(20)=180	8(50)=400	Não há

Tendo em conta que não há serviço pedido para os pares os pares (A, Tipo 1) e (C, Tipo 3) a função de custo a minimizar é:

$$\text{Min } f(X) = 350x_{A2} + 600x_{A3} + 240x_{B1} + 500x_{B2} + 500x_{B3} + 180x_{C1} + 400x_{C2}$$

Restrições lógicas : $x_{ij} \geq 0$ e Inteiro (i=A, B, C ; j= 1 a 3)

20. Produção de gelado

Uma empresa produz gelados de amêndoa, chocolate e noz, cuja venda proporciona lucros unitários de 3, 4 e 6 u.m. respectivamente.

A produção diária deve observar o seguinte:

- gelado de amêndoa : mínimo de 4000 unidades
- gelado de chocolate : exactamente 4000 ou 7000 unidades
- por cada 3 unidades de chocolate produzidas, produzir no máximo 4 unidades de gelado de noz

A produção envolve as secções de fabrico e de embalagem.

O tempo necessário (minutos) , para preparar 100 unidades de qualquer dos tipos de gelado, é o seguinte :

	Fabrico	Embalagem
Amêndoa	3	3
Chocolate	3	4
Noz	5	3

A empresa produz durante 8 horas/dia.

Formalizar o problema em Programação Linear para estabelecer o Plano Óptimo de Produção diário.

É necessário calcular as quantidades a produzir de amêndoa, chocolate e noz sendo as Variáveis de Decisão:

x_1 = nível da produção de amêndoa

x_2 = nível da produção de chocolate

x_3 = nível da produção de noz

Restrições Técnicas:

- $x_1 \geq 4000$: mínimo de amêndoa/dia
- $x_2 = 4000y_1 + 7000y_2$: exactamente 4000 ou 7000 un/dia de chocolate
- $y_1 + y_2 = 1$
- $4x_2 \geq 3x_3$: proporção de chocolate / noz
- $3(x_1 / 100) + 3(x_2 /100) + 5(x_3 /100) \leq 480$: tempo (minutos) /dia disponível para fabrico
- $3(x_1 / 100) + 4(x_2 /100) + 3(x_3 /100) \leq 480$: tempo (minutos) /dia disponível para embalar

Na 2ª restrição sendo y_1 e y_2 variáveis binárias com soma 1, conduz a $x_2 = 4000$ ou $x_2 = 7000$ como se pretende.

Objectivo: Maximizar o lucro

$$\text{Max } f(X) = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

Restrições lógicas: $x_j \geq 0$ e inteiro (j= 1 a 3)

21. Contratação de pessoal

Uma escola necessita contratar 2 alunos e 1 aluna para monitores da sala de informática ás segundas, quartas e sextas-feiras de cada semana, entre as 14 e as 19 horas.

Foram seleccionados 2 alunos (A, B) e 1 aluna (C) .

O número de horas de disponibilidade de cada aluno(a) e o respectivo vencimento/hora (u.m.) são os seguintes:

	Segunda	Quarta	Sexta	Vencimento/hora
A	1	1	3	10
B	4	2	4	11
C	3	4	5	12

A escola garante aos alunos A e B um mínimo de 5 horas de trabalho/semana e à aluna um mínimo de 4 horas.

Pretende-se calcular o número de horas de trabalho a fixar a cada um dos 3 alunos em cada um dos dias indicados, por forma a reduzir ao mínimo o encargo semanal da escola.

Apresentar o modelo de PL para solucionar o problema.

É necessário calcular o número de horas a contratar com cada aluno para cada um dos três dias sendo as Variáveis de Decisão xij (i = A, B, C ; j= segunda, quarta, sexta) conforme o quadro indica:

	Número de horas a contratar		
Aluno(a)	Segunda	Quarta	Sexta
A	x_{11}	x_{12}	x_{13}
B	x_{21}	x_{22}	x_{23}
C	x_{31}	x_{32}	x_{33}

Restrições Técnicas:

- $x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5$: mínimo de horas do aluno A
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 5$: mínimo de horas do aluno B
- $x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 4$: mínimo de horas da aluna C
- $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5$: horas na segunda
- $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 5$: horas na quarta
- $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5$: horas na sexta
- $x_{11} \leq 1$: disponibilidade do aluno A na segunda
- $x_{12} \leq 1$: disponibilidade do aluno A na quarta
- $x_{13} \leq 3$: disponibilidade do aluno A na sexta
- $x_{21} \leq 4$: disponibilidade do aluno B na segunda
- $x_{22} \leq 2$: disponibilidade do aluno B na quarta

- $x_{23} \leq 4$: disponibilidade do aluno B na sexta
- $x_{31} \leq 3$: disponibilidade da aluna C na segunda
- $x_{32} \leq 4$: disponibilidade da aluna C na quarta
- $x_{33} \leq 5$: disponibilidade da aluna C na sexta

Objectivo : Minimizar o custo total

$$\text{Min } f(X) = 10(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 11(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 12(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

Restrições lógicas : $x_{ij} \geq 0$ (i= 1 a 3 ; j= 1 a 3)

22. Programar descarga de viaturas

Uma empresa de transportes procede à recolha de mercadoria em Lisboa para um depósito central onde descarrega, separa e procede à expedição para todo o país.

Na operação de recolha utiliza 3 tipos de viatura (V_1 , V_2 e V_3) sendo o custo de descarga de uma viatura variável conforme o equipamento e pessoal que utiliza em cada um de 3 terminais (T_1 ,T_2 e T_3) que tem no depósito antes referido. Estes custos de descarga (u.m.) são os seguintes:

	T1	T2	T3
V1	14	16	17
V2	12	9	10
V3	10	13	9

Se, por exemplo, os 3 terminais estiverem livres e chegar uma viatura do tipo V3 , a descarga será feita no terminal T3 onde o serviço apresenta menor custo (9 u.m.)

Admita ser necessário programar para as 15 horas a descarga de uma viatura de cada tipo. Como atribui-las a cada um dos terminais de descarga ?

Apresentar o modelo de PL necessário ao cálculo da solução óptima.

É necessário calcular para cada viatura qual o terminal de descarga sendo as Variáveis de Decisão x_{ij} (i = V1 , V2 , V3 ; j= T1 , T2 , T3) conforme o quadro indica:

	T1	T2	T3
V1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
V2	x_{21}	x_{21}	x_{23}
V3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

Restrições Técnicas:

- $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$: V_1 descarrega em T_1 ou T_2 ou T_3
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$: V_2 descarrega em T_1 ou T_2 ou T_3
- $x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$: V_3 descarrega em T_1 ou T_2 ou T_3
- $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$: Em T_1 descarrega V_1 ou V_2 ou V_3
- $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$: Em T_2 descarrega V_1 ou V_2 ou V_3
- $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$: Em T_3 descarrega V_1 ou V_2 ou V_3

Objectivo : Minimizar o custo total

$$\text{Min } f(X) = 14x_{11} + 16x_{12} + 17x_{13} + 12x_{21} + 9x_{22} + 10x_{23} + 10x_{31} + 13x_{32} + 9x_{33}$$

Restrições lógicas : $x_{ij} = 0$ ou 1 (i= 1 a 3 ; j= 1 a 3)

23. Produção integrada

Uma empresa tem 2 fábricas (F1 e F2) onde, no momento, produz 3 componentes (A, B, C) para máquinas de lavar.

As actuais condições de produção são as seguintes:

	Produção / hora			
	A	B	C	Tempo disponível por semana (h)
Fábrica 1	8	5	10	100
Fábrica 2	6	12	14	80

Estes componentes A, B, C são vendidos em caixas com um componente de cada pelo que a produção deve ser equilibrada para evitar desperdício.

Sendo de 10 unidades monetárias (u.m.) o lucro de venda de uma caixa de componentes, formalize o modelo de programação linear para estabelecer o plano óptimo de produção para uma semana.

É necessário calcular, para cada fábrica, o número de componentes a produzir sendo as Variáveis de Decisão x_{ij} (i = F_1 , F_2 ; j= A, B, C) conforme o quadro indica:

	A	B	C
F_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
F_2	x_{21}	x_{21}	x_{23}

Restrições Técnicas:

- $1/8\, x_{11} + 1/5\, x_{12} + 1/10\, x_{13} \leq 100$: tempo disponível em F1
- $1/6\, x_{21} + 1/12\, x_{22} + 1/14\, x_{23} \leq 80$: tempo disponível em F_2
- $x_{11} + x_{21} = x_{12} + x_{22}$: n.º de peças A = n.º de peças B
- $x_{12} + x_{22} = x_{13} + x_{23}$: n.º de peças B = n.º de peças C

Objectivo : Maximizar o lucro da venda de conjuntos de 3 componentes

$$\text{Max } f(X) = 10(x_{11} + x_{21}) \text{ ou Max } f(X) = 10(x_{12} + x_{22}) \text{ ou Max } f(X)=10(x_{13} + x_{23})$$

Restrições lógicas : $x_{ij} \geq 0$ e inteiro (i= 1 a 2 ; j= 1 a 3)

24. Problema de Embalagem (problema da "mochila")

Trata-se de um problema de programação linear inteira binária (PLIB).

Existem "n" artigos com valor "c_j" e peso "p_j" que não é possível "embalar" de uma só vez devido a limitações de peso total.

Qual a escolha óptima que, satisfazendo a limitação de peso máximo P, maximiza o valor total dos artigos "embalados"?

Dado que para cada artigo é necessário decidir "Embalar / Não Embalar" recorre-se a uma variável de decisão binária associada a cada um dos artigos.

Decidindo "Embalar" quando a variável tem valor 1 e "Não Embalar" quando a variável tem valor 0, tem-se o modelo de Maximização:

$$Max\, f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.a.$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le P$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = 0 \text{ ou } 1$$

Exemplo:

Considerem-se quatro peças (A, B, C, D) com pesos de 5, 7, 4, 3 kg respectivamente embalar com peso máximo de 14 kg.

Sejam 8, 11, 6 , 4 € as ponderações associadas a A, B, C, D respectivamente.

Calcular as peças a embalar maximizando o valor total das ponderações.

MODELO PARA CÁLCULO

Variáveis de decisão: x_a , x_b , x_c , x_d de tipo binário (valor 1: embalar ; valor 0: não embalar)

Restrição técnica (peso) : $5x_a + 7x_b + 4x_c + 3x_d \le 14$

Objectivo: Max $f(X) = 8x_a + 11x_b + 6x_c + 4x_d$

Solução óptima

Recorrendo ao software do autor obtém-se:

$$x_B^* = 1; x_C^* = 1; x_D^* = 1$$

$$Max\ \ f(X^*) = 21$$

Embalar as peças B, C e D.

Valor total máximo = 21 €

25. Problemas com decisões do tipo " Se ... < condição lógica > ... então ... < decisão >"

Uma empresa deseja construir 5 armazéns para os quais se prevê os custos e lucros a seguir indicados:

Armazém	Custo Esperado (u.m.)	Lucro Previsto (u.m.)
A	450	50
B	390	60
C	350	90
D	380	45
E	400	80

A empresa não pode disponibilizar mais do que 1470 u.m. (notar que são necessárias 1970 u.m. para construir todos os armazéns) pelo que estabeleceu as seguintes condições:

- do conjunto A, B e E só é construído um armazém (se construir A, não constrói B e E ...)
- se for construído o armazém D deve ser construído o armazém E
- do conjunto C e D só é construído, no máximo, um armazém
- o armazém C pode ser construído se e só se for construído o armazém B

Trata-se de um problema de programação linear inteira binária (PLIB).

MODELO PARA CÁLCULO

Variáveis de decisão (binárias): x_A , x_B , x_C , x_D , x_E

Objectivo: Maximização do lucro

Max $f(X) = 50x_A + 60x_B + 90x_C + 45x_D + 80x_E$

Restrições Técnicas

- restrição de capital : $450x_A + 390x_B + 350x_C + 380x_D + 400x_E \leq 1470$
- construir só A, B ou E: $x_A + x_B + x_E = 1$
- construir D e E ou nenhum deles: $x_D = x_E$
- construir C ou D ou nenhum deles: $x_C + x_D \leq 1$
- C pode ser construído se e só se B for construído,: $x_C \leq x_B$

Restrições Lógicas

- x_A , x_B , x_C , x_D , x_E = 0 ou 1 (x_j = 0 significa não construir o armazém "j" ; x_j = 1 significa construir o armazém “j”)

Solução óptima

$$x_B^* = 1; x_C^* = 1$$
$$Max\ \ f(X^*) = 150$$

Construir os armazéns B e C. Lucro máximo = 150 u.m.

26. Problema do caixeiro viajante (circuito de Hamilton)

Trata-se de um problema de programação linear inteira binária (PLIB) típico da Teoria dos Grafos.

Pretende-se calcular um circuito com o menor encargo total (tempo, distância, custo, etc.) que seja Elementar, Simples e passe em todos os vértices do grafo (rede) uma e só uma vez.

Este circuito denomina-se Circuito de Hamilton em homenagem ao autor deste problema, Sir William Rowan Hamilton, matemático irlandês (1805-1865).

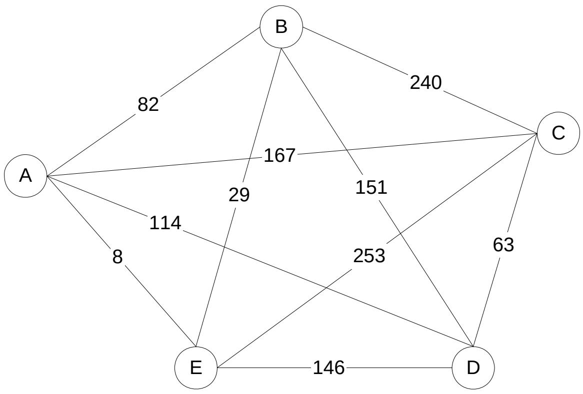
Exemplo:

A figura seguinte representa uma rede de estradas.

O vértice A representa a localização de uma empresa.

Os vértices do grafo (B, C, D, E) representam localidades a visitar por um delegado da empresa para contactar com clientes.

O valor associado a cada uma das arestas do grafo é o custo do deslocamento em unidades monetárias.



Calcular a ordem porque devem ser visitados os clientes que minimiza o custo total da deslocação.

Situação

O delegado da empresa necessita de um circuito (início e fim no vértice A) Elementar (passar uma e só uma vez na mesma localidade) e Simples (usar a mesma estrada uma e só uma vez), para visitar todos os clientes (localidades B,C,D,E) reduzindo ao mínimo a despesa do deslocamento.

Um dos circuitos admissíveis é A – B – C – D – E – A com custo total de 539 u.m. Será óptimo?

MODELO PARA CÁLCULO

Variáveis de decisão: duas variáveis binárias para cada estrada (uma para cada sentido do percurso)

x_{AB} , x_{AC} , x_{AD} , x_{AE} , x_{BA} , x_{BC} , x_{BD} , x_{BE} , x_{CA} , x_{CB} , x_{CD} , x_{CE} , x_{DA} , x_{DB} , x_{DC} , x_{DE} , x_{EA} , x_{EB} , x_{EC} , x_{ED}

Nota explicativa:

Se $x_{AC} = 1$ o circuito inclui o deslocamento de A $\Rightarrow$C; se $x_{AC} = 0$ este deslocamento não é efectuado.

Objectivo: Minimização do custo total do deslocamento

Min f(X) = $82x_{AB} + 167x_{AC} + 114x_{AD} + 8x_{AE} + 82x_{BA} + 240x_{BC} + 151x_{BD} + 29x_{BE} + 167x_{CA} + 240x_{CB} + 63x_{CD} + 253x_{CE} + 114x_{DA} + 151x_{DB} + 63x_{DC} + 146x_{DE} + 8x_{EA} + 29x_{EB} + 253x_{EC} + 146x_{ED}$

Restrições técnicas de afectação

$x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} + x_{AE}$	=	1	(sair de A para uma única localidade)
$x_{BA} + x_{BC} + x_{BD} + x_{BE}$	=	1	(sair de B para uma única localidade)
$x_{CA} + x_{CB} + x_{CD} + x_{CE}$	=	1	(sair de C para uma única localidade)
$x_{DA} + x_{DB} + x_{DC} + x_{DE}$	=	1	(sair de D para uma única localidade)
$x_{EA} + x_{EB} + x_{EC} + x_{ED}$	=	1	(sair de E para uma única localidade)
$x_{BA} + x_{CA} + x_{DA} + x_{EA}$	=	1	(chegar a A vindo de uma única localidade)
$x_{AB} + x_{CB} + x_{DB} + x_{EB}$	=	1	(chegar a B vindo de uma única localidade)
$x_{AC} + x_{BC} + x_{DC} + x_{EC}$	=	1	(chegar a C vindo de uma única localidade)
$x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} + x_{ED}$	=	1	(chegar a D vindo de uma única localidade)
$x_{AE} + x_{BE} + x_{CE} + x_{DE}$	=	1	(chegar a E vindo de uma única localidade)

Restrições técnicas para impedir sub circuitos (circuitos "parasitas")

Utiliza-se uma variável associada a cada um dos vértices do grafo (localidades) cujo valor indica a ordem porque o vértice é visitado durante a execução do circuito.

Para cada uma das ligações existentes entre os vértices genéricos "i" e "j" utiliza-se uma restrição do tipo:

$$y_j \geq y_i + n(x_{ij}) - (n-1) \quad (i \neq j;\ i = 2,\ldots,n;\ j = 2,\ldots,n;\ y_i, y_j \geq 0)$$

$$Nota: "n"\ é\ o\ número\ de\ vértices\ do\ grafo$$

y_C	$\geq$	$y_B + 5x_{BC} - 4$
y_D	$\geq$	$y_B + 5x_{BD} - 4$
y_E	$\geq$	$y_B + 5x_{BE} - 4$
y_B	$\geq$	$y_C + 5x_{CB} - 4$
y_D	$\geq$	$y_C + 5x_{CD} - 4$
y_E	$\geq$	$y_C + 5x_{CE} - 4$
y_B	$\geq$	$y_D + 5x_{DB} - 4$
y_C	$\geq$	$y_D + 5x_{DC} - 4$
y_E	$\geq$	$y_D + 5x_{DE} - 4$
y_B	$\geq$	$y_E + 5x_{EB} - 4$
y_C	$\geq$	$y_E + 5x_{EC} - 4$
y_D	$\geq$	$y_E + 5x_{ED} - 4$

Se, no exemplo corrente, $x_{CD} = 1$ teremos:

$$y_D \geq y_C + 5(1) - (5-1) \quad \Rightarrow y_D \geq y_C + 1$$

garantindo que o número de ordem da visita ao vértice D é sempre superior ao número de ordem da visita ao vértice C o que impede, por exemplo, o sub circuito "C – D – C" (circuito "parasita").

Pode ser feita a prova de outro modo para a hipótese do sub circuito C – D – C:

Ligação (arco)		
C-D	$y_D \geq y_C + 5x_{CD} - 4 \quad \Rightarrow$	$y_C + 5x_{CD} - y_D \leq 4$
D-C	$y_C \geq y_D + 5x_{DC} - 4 \quad \Rightarrow$	$y_D + 5x_{DC} - y_C \leq 4$

Soma = $5(x_{CD} + x_{DC}) \leq 8$

A restrição da soma das duas restrições mostra que o valor de "$x_{CD} + x_{DC}$" pode, no máximo, ter valor 1, ou seja, a <u>aresta</u> CD ou não é utilizada ($x_{CD} = x_{DC} = 0$) ou só pode ser percorrida num dos sentidos ($x_{CD} = 1$ ou $x_{DC} = 1$).

<u>Restrições Lógicas</u>

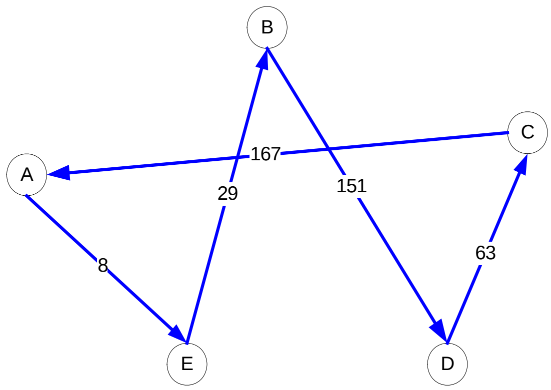
$x_{ij} = 0$ ou 1 ($i \neq j$; i , j = B, C, D, E)

y_i , $y_j \geq 0$

<u>Solução óptima</u> (é indeterminada; apresenta-se uma solução):

$x_{AE} = 1$; $x_{EB} = 1$; $x_{BD} = 1$; $x_{DC} = 1$; $x_{CA} = 1$; Min f(X) = 418 u.m.

O circuito óptimo é A – E – B – D – C – A



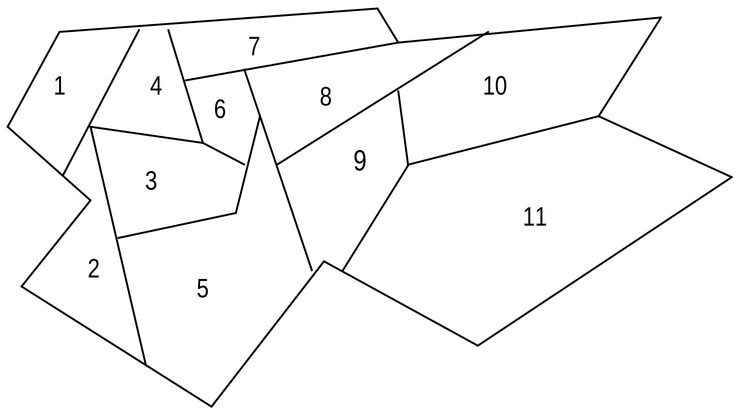
27. Problema de Cobertura do Grafo

Problema típico caracterizado por:

- variáveis de decisão binárias
- restrições técnicas com soma de variáveis "≥ 1"
- minimização de uma função objectivo igual à soma das variáveis envolvidas com coeficientes de ponderação

Exemplo

Uma autarquia pretende construir jardins numa zona que compartimentou em 11 áreas como mostra a figura seguinte:



A autarquia estabeleceu as seguintes orientações:

- qualquer área tem espaço para plantar um jardim
- um jardim apoia a área onde está plantado e as áreas adjacentes (limite comum)
- minimizar o número de jardins a plantar.

MODELO PARA CÁLCULO

Comecemos por construir a matriz boolena de adjacências:

Áreas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1							
2	1	1	1		1						
3	1	1	1	1	1	1					
4	1		1	1		1	1				
5		1	1		1	1		1	1		
6			1	1	1	1	1	1			
7				1		1	1	1			
8					1	1	1	1	1	1	
9					1			1	1	1	1
10								1	1	1	1
11									1	1	1

Nota: qualquer vértice é adjacente de si mesmo

Variáveis de decisão: uma variável binária para cada área (jardins são implantados nas áreas em que a variável associada tem valor 1)

Objectivo: minimizar o número de jardins a implantar

Min $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$

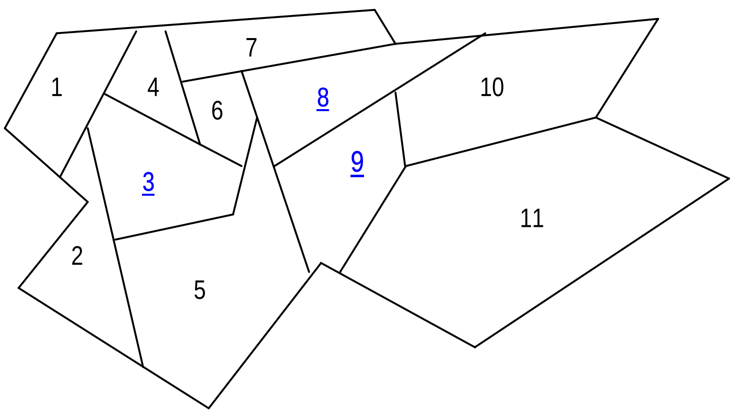
Restrições técnicas: uma restrição do tipo "≥" para cada linha da matriz de adjacências

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & & & & & \geq & 1 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & & & & & & & \geq & 1 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & & & & & \geq & 1 \\
x_1 & & +x_3 & +x_4 & & +x_6 & +x_7 & & & & & \geq & 1 \\
 & x_2 & +x_3 & & +x_5 & +x_6 & & +x_8 & +x_9 & & & \geq & 1 \\
 & & x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_8 & & & & \geq & 1 \\
 & & & x_4 & & +x_6 & +x_7 & +x_8 & & & & \geq & 1 \\
 & & & & x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_8 & +x_9 & +x_{10} & & \geq & 1 \\
 & & & & x_5 & & & +x_8 & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} & \geq & 1 \\
 & & & & & & & x_8 & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} & \geq & 1 \\
 & & & & & & & & x_9 & +x_{10} & +x_{11} & \geq & 1
\end{array}
$$

Solução óptima

$x_3 = 1$; $x_8 = 1$; $x_9 = 1$; Min $f(X) = 3$

Plantar jardim nas áreas 3, 8 e 9 no total mínimo de 3 jardins



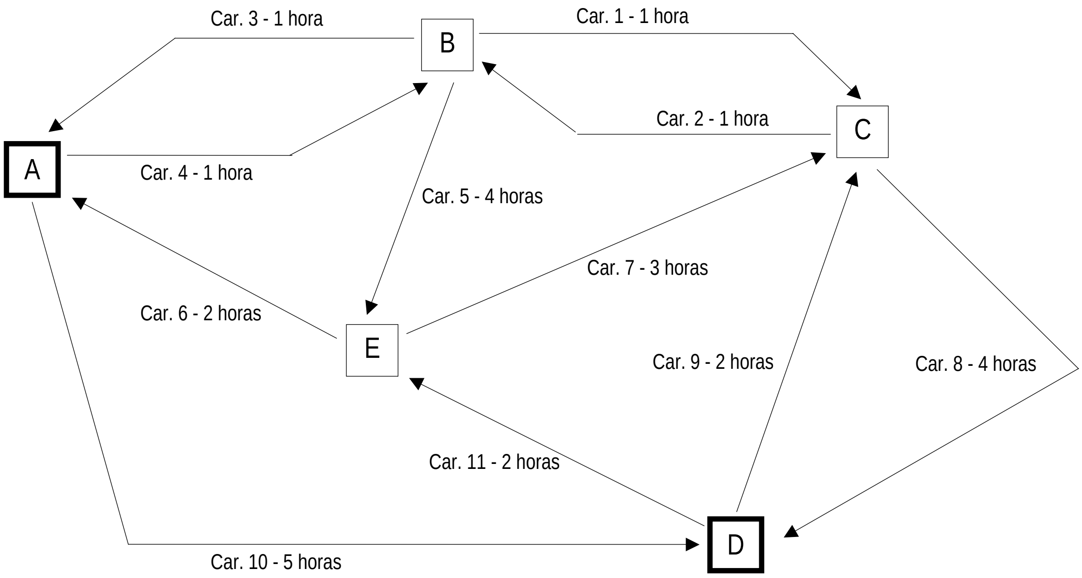
Jardim da área 3 : serve as áreas 1, 2, 3, 4, 5, 6

Jardim da área 8 : serve as áreas 5, 6. 7, 8, 9, 10

Jardim da área 9 : serve as áreas 5, 8, 9,10,11

28. Problema de Cobertura

Uma empresa rodoviária necessita afectar condutores às carreiras diárias que vai lançar numa determinada região. A figura seguinte apresenta as localidades servidas (A a E) e carreiras de possível estabelecimento (número da carreira e tempo de ligação):



A empresa dispõe dos condutores Zé e Quim (moradores em D), Silva e João (moradores em A) e pretende que:

- as carreiras se efectuem pelo menos uma vez por dia;
- os condutores só tripulem carreiras com início e fim na localidade de residência;
- um condutor não conduza mais do que 10 horas diárias;
- qualquer condutor só tripule uma sequência de carreiras distintas (não repete carreiras);

A empresa paga ao condutor 10 u.m. por hora de condução além de 10 u.m. por cada carreira que efectuar.

Pretende-se afectar os condutores às carreiras minimizando o custo total.

MODELO PARA CÁLCULO

Comecemos por identificar os circuitos de carreiras com início/fim em "A" e "D" (moradas dos condutores) para calcular os que satisfazem o serviço desejado com custo total mínimo:

Circuito "j"	Condutores admissíveis	Sequência Carreiras	Horas trabalho	Custo horas (10/hora)	Nº de carreiras	Bónus de carreiras (10/carreira)	Custo total (u.m.)
1	Zé , Quim	9 - 8	6	60	2	20	80
2	Zé , Quim	11 - 7 - 8	9	90	3	30	120
3	Zé , Quim	9 - 2 - 1 - 8	8	80	4	40	120
4	Todos	9* - 2 - 3 - 4* - 1 - 8	10	100	6	60	160
5	Todos	11* - 6 - 4* - 1 - 8	10	100	5	50	150
6	Todos	11* - 6 - 10*	9	90	3	30	120
7	Todos	9* - 2 - 3 - 10*	9	90	4	40	130
8	Silva , João	4 - 3	2	20	2	20	40
9	Silva , João	4 - 5 - 6	7	70	3	30	100
10	Silva , João	4 - 1 - 2 - 3	4	40	4	40	80
11	Silva , João	4 - 1 - 2 - 5 - 6	9	90	5	50	140
12	Silva , João	4 - 5 - 7 - 2 - 3	10	100	5	50	150

*Nota: Há circuitos que não estão descritos porque estão implícitos nos circuitos assinalados com " * ".*
Assim, por exemplo, não se indica o circuito " 10 – 11 –6 " porque é o mesmo que "11 – 6 – 10 ".

O quadro seguinte relaciona cada uma das carreiras com os circuitos enumerados:

		Circuitos											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Carreiras	1			X	X	X					X	X	
	2			X	X			X			X	X	X
	3				X			X	X		X		X
	4				X	X			X	X	X	X	X
	5									X		X	X
	6					X	X			X		X	
	7		X										X
	8	X	X	X	X	X							
	9	X		X	X			X					
	10						X	X					
	11		X			X	X						

Variáveis de decisão

São do tipo binário (uma para cada um dos circuitos enumerados).

Nota: veja-se, por exemplo, que a carreira 1 é efectuada nos circuitos 3, 4, 5, 10 e 11. Activando um destes circuitos (restrição $x_3 + x_4 + x_5 + x_{10} + x_{11} \geq 1$) a carreira é efectuada diariamente.

Objectivo

Atendendo a que se for efectuado o circuito nº1 ($x_1 = 1$) o custo total é $80x_1 = 80(1) = 80$ u.m. então a função objectivo a minimizar é a seguinte:

$$\text{Min } f(X) = 80x_1 + 120x_2 + 120x_3 + 160x_4 + 150x_5 + 120x_6 + 130x_7 + 40x_8 + 100x_9 + 80x_{10} + 140x_{11} + 150x_{12}$$

Restrições técnicas

- Todas as carreiras devem efectuar-se pelo menos 1 vez por dia:

$$\begin{aligned}
x_3 + x_4 + x_5 + x_{10} + x_{11} &\geq 1 \\
x_3 + x_4 + x_7 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 1 \\
x_4 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{12} &\geq 1 \\
x_4 + x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 1 \\
x_9 + x_{11} + x_{12} &\geq 1 \\
x_5 + x_6 + x_9 + x_{11} &\geq 1 \\
x_2 + x_{12} &\geq 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1 \\
x_1 + x_3 + x_4 + x_7 &\geq 1 \\
x_6 + x_7 &\geq 1 \\
x_2 + x_5 + x_6 &\geq 1
\end{aligned}$$

- Restrições de condutores na activação de alguns dos circuitos:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\
x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\leq 4 \\
x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\leq 2
\end{aligned}$$

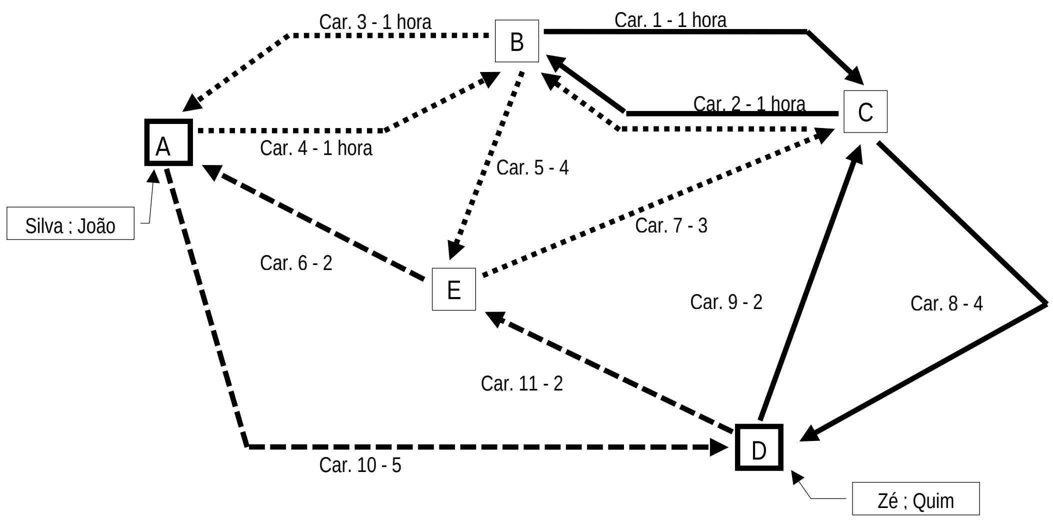
Nota: circuitos 1, 2 e 3 (Zé e Quim) ; circuitos 8, 9 ,10, 11 e 12 (Silva e João) ; restantes (todos)

- Restrição de condutores (4) para activar a totalidade dos circuitos enumerados:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 4$$

Solução óptima

$x_3 = 1$; $x_6 = 1$; $x_{12} = 1$; Min f(X) = 390 u.m.



[Resumo](#)

São activados os circuitos 3, 6 e 12 pelo que só 3 condutores serão necessários.

Todas as localidades serão visitadas pelo menos uma vez por dia havendo apenas a duplicação da carreira número 2 entre C e B.

O circuito 3 (carreiras 9, 2, 1, 8) pode ser efectuado pelo Zé ou Quim tendo o custo de 120 u.m.

O circuito 6 (carreiras 11, 6, 10) pode ser efectuado pelo Zé ou Quim tendo o custo de 120 u.m. Podia ser considerada a sequência das carreiras 10, 11, 6 o que permitiria usar um condutor morador em A (Silva ou João).

O circuito 12 (carreiras 4, 5, 7, 2, 3) pode ser efectuado pelo Silva ou João tendo o custo de 150 u.m.

29. Problema de produção com Custos Fixos

Uma empresa pretende produzir dois tipos de máquina (A e B).

A empresa tem duas fábricas (F1, F2) onde qualquer dos modelos pode ser produzido.

Os custos de "setup" e lucros associados a cada uma das máquinas são os seguintes:

	Setup (u.m.)	Lucro unitário de venda (u.m.)
Máquina A	45000	120
Máquina B	76000	160

Para não duplicar custos de "setup" qualquer das máquinas é produzida numa única fábrica.

Capacidade Produtiva (máquinas/dia):

	Máquina A	Máquina B
Fábrica 1	52	38
Fábrica 2	42	23

Tempo de produção disponível (dias):

	Máquina A
Fábrica 1	48
Fábrica 2	72

Calcular o plano óptimo de produção (onde produzir e quantidade a produzir).

MODELO PARA CÁLCULO

Variáveis de decisão

- Níveis de produção ($x_{ij} \geq 0$ e Inteiro)

	Máquina A	Máquina B
Fábrica 1	x_{1A}	x_{1B}
Fábrica 2	x_{2A}	x_{2B}

- Onde produzir (variáveis binárias f_{ij} . Se f_{ij} = 1, a fábrica " i " produz a máquina " j ")

	Máquina A	Máquina B
Fábrica 1	f_{1A}	f_{1B}
Fábrica 2	f_{2A}	f_{2B}

Restrições técnicas

- Produzir/Não produzir na fábrica "i" a máquina "j"

  $f_{1A} + f_{2A} = 1$ (máquina "A" é produzida em F1 ou F2)

  $f_{1B} + f_{2B} = 1$ (máquina "B" é produzida em F1 ou F2)

- Limite superior do nível de produção de cada máquina em cada fábrica

  $x_{1A} \leq 52(48)\, f_{1A}$

  $x_{1B} \leq 38(48)\, f_{1B}$

  $x_{2A} \leq 42(72)\, f_{2A}$

  $x_{2B} \leq 23(72)\, f_{2B}$

  Nota: Veja que se $f_{1A} = 0$, então $f_{2A} = 1$ pois foi estabelecido que $f_{1A} + f_{2A} = 1$; a máquina "A" não será produzida em F1 porque $x_{1A} \leq 0$ mas poderá ser produzida em F2 (se for rentável) porque $x_{2A} \leq 42(72)$. O mesmo se passa para a máquina "B".

- Tempo disponível para produzir (dias)

$$\frac{x_{1A}}{52} + \frac{x_{1B}}{38} \leq 48$$

$$\frac{x_{2A}}{42} + \frac{x_{2B}}{23} \leq 72$$

Objectivo

Maximização do lucro total da venda deduzido dos custos de "setup":

$$\text{Max } f(X) = \quad 12(x_{1A} + x_{2A}) + 16(x_{1B} + x_{2B}) - 45000(f_{1A} + f_{2A}) - 76000(f_{1B} + f_{2B})$$

Solução óptima

			Variável	Valor
	ÓPTIMO	OBJECTIVO ATINGIDO	f1b	1
			f2a	1
			x2a	3024
			x1b	1824
			f(X)	533720

Produção óptima: 1824 máquinas "A" na fábrica 2 ; 1824 máquinas "B" na fábrica 1

Lucro total máximo = 533720 u.m.

30. Problema de produção com Custos Fixos

Uma empresa têxtil tem 3 processos de coloração de tecido podendo usá-los de forma independente.

Os custos fixos de preparação (setup cost) e de coloração (running cost) associados a cada um dos processos e as capacidades de processamento são os seguintes:

Processo	Custo Fixo (u.m.)	Custo Coloração (u.m./ m^2)	Capacidade diária (m^2)
A	55	0.07	25000
B	85	0.05	35000
C	105	0.04	40000

É necessário tratar, diariamente, 45000 metros quadrados.

Calcular o plano óptimo de trabalho.

MODELO PARA CÁLCULO

Variáveis de decisão (inteiras e não negativas)

x_A , x_B e x_C : quantidade (m^2) a tratar pelos processos A, B e C respectivamente

Variáveis de decisão binárias

y_A , y_B , y_C

São associadas a cada um dos processos (se “ $y_j = 0$ “ o processo “ j “ não é utilizado e a variável de decisão associada deverá ser nula; para “ $y_j = 1$ “ o processo “ j “ é utilizado e a variável de decisão associada pode ter valores superiores a zero)

Restrições técnicas

$x_A + x_B + x_C \geq 45000$ (satisfazer a procura diária)

$x_A \leq 25000y_A$ (se utilizado o processo A, $y_A = 1$ e capacidade máxima é 25000 m^2)
$x_B \leq 35000y_B$ (se utilizado o processo B, $y_B = 1$ e capacidade máxima é 35000 m^2)
$x_C \leq 40000y_C$ (se utilizado o processo C, $y_C = 1$ e capacidade máxima é 40000 m^2)

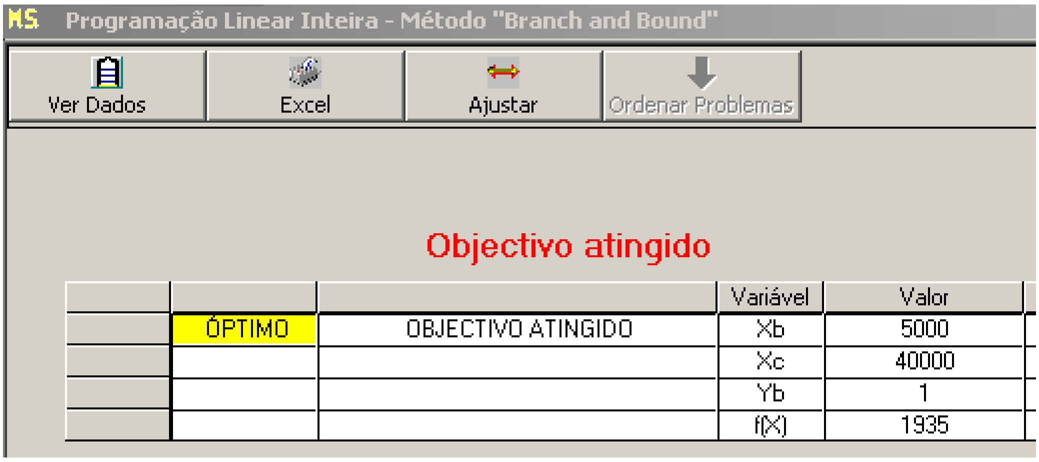
Objectivo (minimizar o custo total)

Min $f(X,Y) = 55y_A + 85y_B + 105y_C + 0.07x_A + 0.05x_B + 0.04x_C$

Nota sobre os custos fixos:

- custo fixo para o processo A = $55y_A$ (55 u.m. se $y_A = 1$ ou zero se $y_A = 0$)
- custo fixo para o processo B = $85y_B$ (85 u.m. se $y_B = 1$; zero se $y_B = 0$)
- custo fixo para o processo C = $105y_C$ (parcela com valor 105 se $y_C = 1$; zero se $y_C = 0$)

Solução óptima



		Variável	Valor
ÓPTIMO	OBJECTIVO ATINGIDO	Xb	5000
		Xc	40000
		Yb	1
		f(X)	1935

Plano de trabalho óptimo: 5000 m^2 tratados pelo processo B ; 40000 m^2 tratados pelo processo C

Custo total mínimo = 1935 u.m.

31. Variável de decisão com valor mínimo "k" ou nula

Considere-se um problema em que a produção de "A" ou é, pelo menos, 50 unidades ou não se produz.

Formalizar matematicamente esta exigência considerando $x_A \geq 0$ o nível de produção de "A".

Solução

$x_A \geq 50y_A$

$x_A \leq My_A$

Justificação

"M" é um valor tão elevado quanto necessário (big "M")

y_A é uma variável binária que permite estabelecer os sub problemas seguintes:

$y_A = 0$

Temos $x_A \geq 0$ e $x_A \leq 0$

Restrição activa : $x_A = 0$

$y_A = 1$

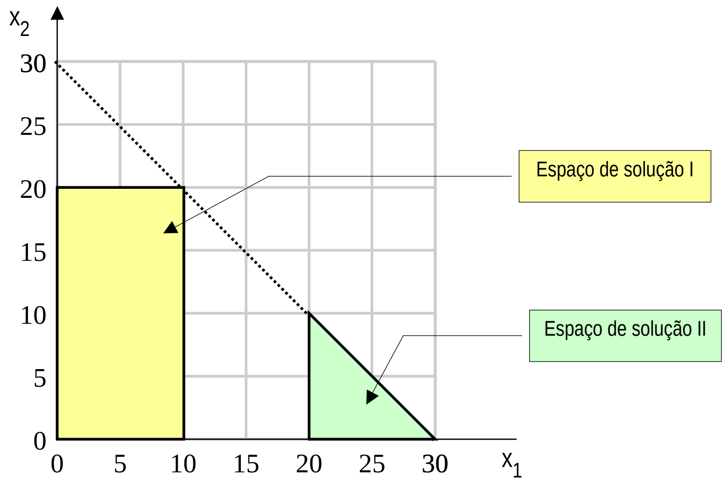
Temos $x_A \geq 50$ e $x_A \leq M$

Restrição activa : $x_A \geq 50$

32. Variáveis binárias para definir espaços distintos para optimização

Sendo x_1 e x_2 os níveis de produção dos bens "A" e "B" respectivamente, admita-se a necessidade de matematizar o seguinte (ver figura):

- produção total não deve exceder 30 unidades
- produção de "A" não deve exceder 10 ou ser inferior a 20 unidades
- se a produção de "A" não exceder 10 a produção de "B" não deve exceder 20 unidades



Notar que a solução óptima deve pertencer a um dos seguintes espaços:

$0 \le x_1 \le 10$ e $0 \le x_2 \le 20$ ou $x_1 + x_2 \le 30$ e $x_1 \ge 20$

Solução

Variáveis de decisão (não negativas) :

x_1 (nível de produção de "A") ; x_2 (nível de produção de "B")

Restrições técnicas

$x_1 \le 10 + My$ $x_2 \le 20 + My$	Espaço de solução I
$x_1 + x_2 \le 30 + M(1-y)$ $x_1 \ge 20 - M(1-y)$	Espaço de solução II

$x_1 , x_2 \ge 0$

Justificação

"M" é um valor tão elevado quanto necessário (big "M")

" y " é uma variável binária que permite estabelecer os sub problemas seguintes:

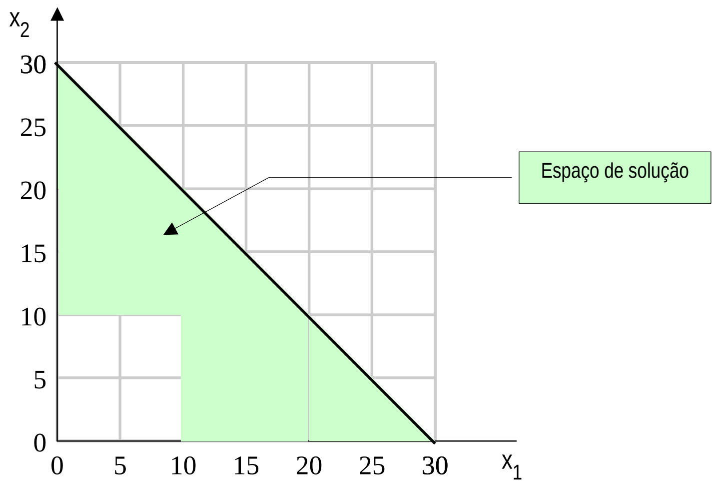
$y = 0$	$y = 1$
Restrições activas	Restrições activas
$x_1 \leq 10$	$x_1 + x_2 \leq 30$
$x_2 \leq 20$	$x_1 \geq 20$
Restrições desactivadas:	Restrições desactivadas:
$x_1 + x_2 \leq + M$	$x_1 \leq + M$
$x_1 \geq -M$	$x_2 \leq + M$

33. Variáveis binárias para definir espaços distintos para optimização

Sendo x_1 e x_2 os níveis de produção dos bens “A” e “B” respectivamente, admita-se a necessidade de matematizar o seguinte (ver figura):

- produção total não deve exceder 30 unidades
- se a produção de “A” não exceder 10 a produção de “B” deve ser, pelo menos, 10 unidades

Solução



Variáveis de decisão (≥ 0)

x_1 (nível de produção de “A”) ; x_2 (nível de produção de “B”)

Restrições técnicas

$$x_1 + x_2 \leq 30$$
$$x_1 \leq 10 + M(1-y)$$
$$x_1 \geq 10 - My$$
$$x_2 \geq 10 - M(1-y)$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Justificação

“M” é um valor tão elevado quanto necessário (big “M”)

“ y “ é uma variável binária que permite estabelecer os sub problemas seguintes (ver figuras):

y = 0

Restrições activas

$x_1 + x_2 \leq 30$

$x_1 \geq 10$

Restrições desactivadas:

$x_1 \leq +M$

$x_2 \geq -M$

y = 1

Restrições activas

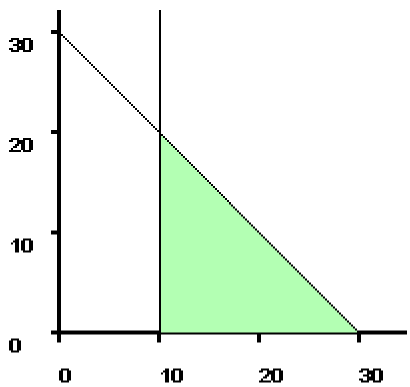
$x_1 + x_2 \leq 30$

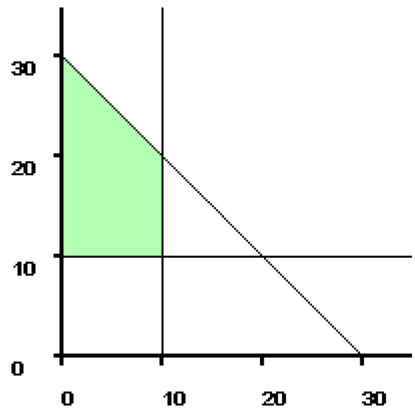
$x_1 \leq 10$

$x_2 \geq 10$

Restrições desactivadas:

$x_1 \geq -M$





34. Valores alternativos para segundos membros de restrições técnicas

Uma empresa fabrica os produtos A e B em que a mão-de-obra necessária, por unidade produzida, é de 2 horas para A e de 3 horas para B.

A mão-de-obra disponível, no primeiro turno de trabalho é de 120 horas mas se houver um segundo turno o total de horas disponíveis passará a ser de 180 horas.

Calcular o plano óptimo de produção.

Solução

Variáveis de decisão (≥ 0)

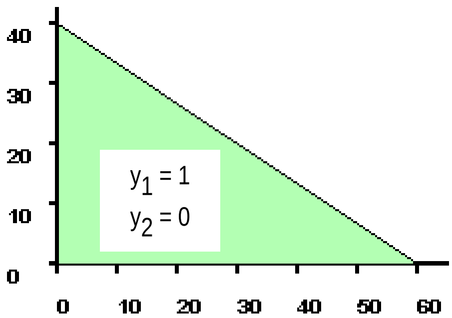
x_1 (nível de produção de "A") ; x_2 (nível de produção de "B")

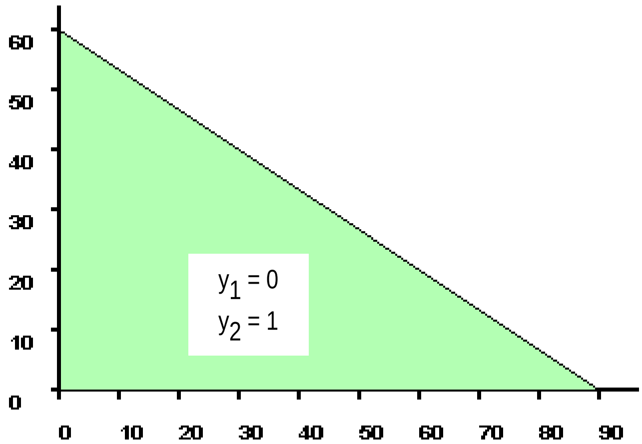
Restrições técnicas

$$2x_1 + 3x_2 \leq 120y_1 + 180y_2$$
$$y_1 + y_2 = 1$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$
$$y_1 , y_2 = 0 \text{ ou } 1$$

Justificação

Porque uma e só uma das variáveis binárias (y_1 , y_2) terá valor " 1 ", são estabelecidos os sub problemas seguintes (ver figuras):





Genericamente se o 2º membro de uma restrição técnica pode ter " p " valores alternativos k_1 , ... , k_p , programa-se este segundo membro como $\sum_{i=1}^{p} k_i \, y_i$ e *aumenta-se* o problema com a restrição de variáveis binárias $\sum_{i=1}^{p} y_i = 1$.

35. Satisfazer "k" Restrições de "m" Restrições (k < m)

Uma empresa que pretende produzir dois novos bens, dispõe de um modelo onde figuram as seguintes restrições técnicas:

- $a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \leq b_1$
- $a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \leq b_2$
- $a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 \leq b_3$

Admitindo que pretende satisfazer apenas duas destas três restrições como deve reprogramá-las?

Solução

Restrições técnicas

Há “m=3” restrições técnicas de que se pretendem satisfazer apenas “k = 2” pelo que se faz o seguinte:

- adiciona-se ao 2º membro de cada restrição o termo " My_i " (y_i binária e "M = big M")
- aumenta-se o problema com a restrição de variáveis binárias

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = m - k \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 + y_3 = 3 - 2 = 1$$

A reprogramação é portanto:

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 &\leq b_1 + My_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 &\leq b_2 + My_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 &\leq b_3 + My_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ y_1 ,\, y_2,\, y_3 &= 0 \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

Justificação

Fixar a soma das variáveis binárias em "m – k " conduz a desactivar igual número de restrições técnicas. Nesta caso, com “m - k = 3 - 2 = 1”, é desactivada umas das restrições técnicas ficando o espaço de solução balizado pelas duas restantes (como se pretende).

Assim, por exemplo, para $y_1 = 1$ fica:

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 &\leq M && \text{(desactivada ; redundante)} \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 &\leq b_2 && \text{(activa)} \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 &\leq b_3 && \text{(activa)} \end{aligned}$$