XIII. PROGRAMAÇÃO POR METAS

1. Programação Multicritério

No modelo de Programação Linear apresentado nos capítulos anteriores optimiza-se o valor de uma única função objectivo num espaço definido por um conjunto de restrições técnicas e outro conjunto de restrições lógicas.

Na prática há situações em que pode haver mais do que uma medida de optimalidade ou seja é necessário recorrer à optimização simultânea de mais do que um objectivo. Naturalmente a optimização nestas condições conduz a uma solução de compromisso entre os objectivos a atingir.

2. Programação Por Metas (Goal Programming)

No mundo real e para qualquer problema:

- Há sempre uma modalidade de acção praticável
- Não há modalidades de acção óptimas alternativas

Em termos práticos:

- A “1ª lei da vida real” impede o bom gestor de dizer: “Não há modalidade de acção”
- A “2ª lei da vida real” significa que o decisor típico nunca fica indiferente perante a proposta de várias modalidades de acção alternativas pois terá sempre um critério que lhe permita preferir uma delas em detrimento das restantes

Do ponto de vista matemático podemos dizer que um modelo está bem formalizado quando:

- tem solução admissível
- não há solução óptima alternativa

3. Exemplo de critério adicional para seleccionar uma alternativa óptima

As necessidades de pessoal em cada dia da semana de uma loja são as seguintes:

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
Empregados	3	3	8	8	8	3	3

Os empregados trabalham 5 dias por semana com início em qualquer dos 7 dias.

Calcular o número total mínimo de funcionários para garantir o serviço admitindo custos iguais para todos independentemente dos dias da semana (problema similar ao apresentado no capítulo II).

Considerando que x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 empregados iniciam o seu turno de 5 dias na segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado e domingo, respectivamente, o modelo para optimização é o seguinte:

$$\text{Min } f(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

s.a.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Seg:} & x_1 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & = & 3 \\
\text{Ter:} & x_1 & + & x_2 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & = & 3 \\
\text{Qua:} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_6 & + & x_7 & = & 8 \\
\text{Qui:} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_7 & = & 8 \\
\text{Sex:} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 8 \\
\text{Sáb:} & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 3 \\
\text{Dom:} & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & = & 3 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \text{ e Int.}
\end{array}$$

O problema não tem solução!

O gestor experiente reconhece que a falta de solução se deve ao conjunto de igualdades impostas, pelo que reformula o problema estabelecendo:
"Considerar que o número de empregados necessários em cada um dos dias da semana, deve ser tido como mínimo".

O modelo é modificado, alterando as restrições técnicas para o tipo " ≥ ", e obtém-se:

Solução óptima: $x_1 = 3$; $x_3 = 5$; Min f(X) = 8

O mapa dos turnos é o seguinte (3 empregados iniciam à segunda; 5 empregados iniciam à quarta):

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
	3	3	3	3	3		
			5	5	5	5	5
Totais	3	3	8	8	8	5	5
Necessário	3	3	8	8	8	3	3
Excesso						2	2

Outra solução óptima (alternativa) é:

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
	5	5	5	5	5		
			3	3	3	3	3
Totais	5	5	8	8	8	3	3
Necessário	3	3	8	8	8	3	3
Excesso	2	2					

Qual delas escolher?

Como se disse há sempre possibilidade de estabelecer um critério adicional para ultrapassar a situação de alternativa.

O gestor, olhando as duas modalidades de acção, verifica um excesso de dois empregados em dois dias da semana (em qualquer das soluções) pelo que pode estabelecer, <u>adicionalmente</u>, o seguinte:

"Desejo que o número mínimo de empregados seja garantido mas os excessos devem ser minimizados e nivelados tanto quanto possível".

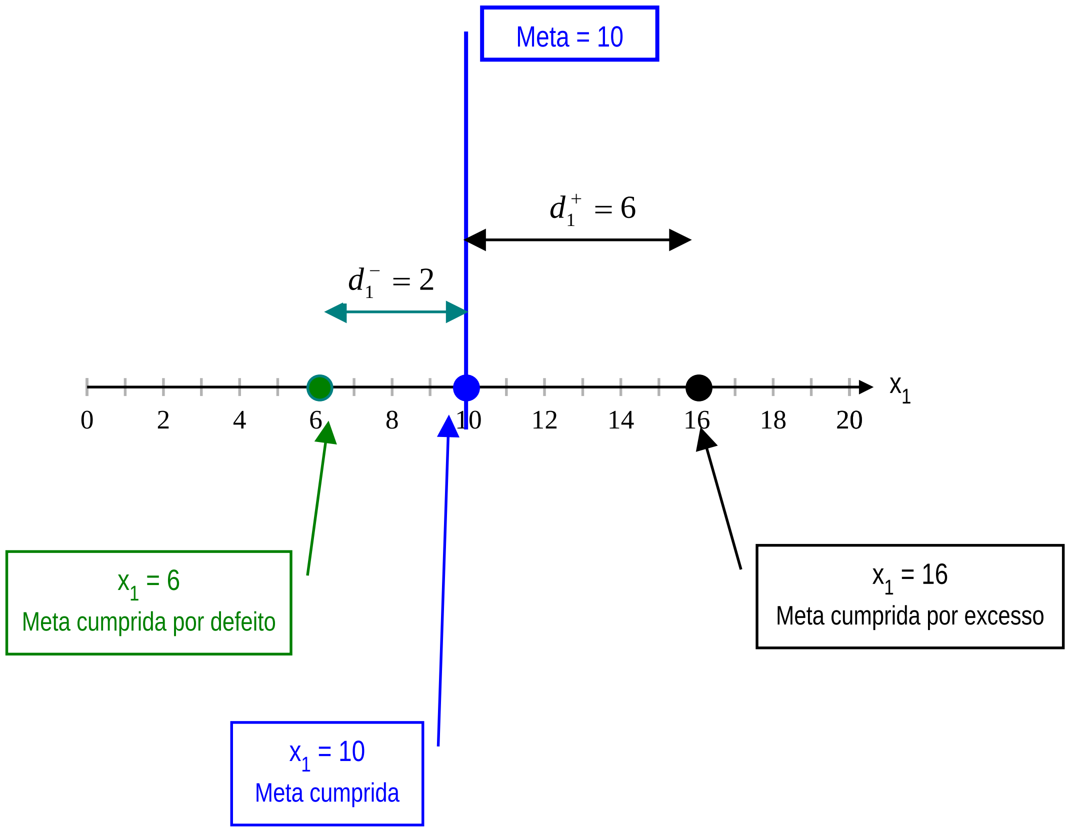
Eis-nos chegados à necessidade de recorrer ao conceito de "META" (goal).

a. Conceito de Meta

Uma meta, ao contrário de uma restrição técnica ou lógica não limita o espaço de soluções devendo ser encarada como um "desejo" que pode ser cumprido "exactamente", "por excesso", ou "por defeito" razão porque também é conhecida por "restrição fraca" por contraposição à restrição técnica denominada restrição "forte".

Admita-se, por exemplo, que se "deseja" que o nível x_1, da produção do bem "A", seja de 10 unidades.

Na figura seguinte pode ver-se graficamente como matematizar a respectiva META analisando três hipóteses de valor para a variável x_1:



Para definir a "META" desejada é necessário recorrer a uma variável de desvio " d_1 " que permita:

$$
\boxed{\begin{array}{l}
x_1 = 10 + d_1 \ com\ d_1\ livre \\
Sendo\ d_1 = d_1^+ - d_1^- \ com\ d_1^+, d_1^- \geq 0 \ \ tem - se: \\
x_1 = 10 + (d_1^+ - d_1^-) \ \Rightarrow \ META: x_1 - d_1^+ + d_1^- = 10 \\
Nota: (d_1^+)(d_1^-) = 0
\end{array}}
$$

Notar que a variável d_1^+ mede o desvio por excesso e que d_1^- mede o desvio por defeito.

Retomando o modelo anterior podemos agora estabelecer as METAS para o numero de empregados necessários em cada um dos dias da semana:

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
Meta	3	3	8	8	8	3	3
Penalizar	Defeito	Defeito	Defeito	Defeito	Defeito	Defeito	Defeito

Notar que para cada uma das METAS é sempre necessário identificar qual ou quais desvios devem ser penalizados na função objectivo.

Em todas as metas devem penalizar-se os desvios por defeito pois o gestor deseja "mínimos cumpridos". Assim as variáveis de desvio por defeito terão elevado coeficiente na função objectivo (minimização).

Na solução disponível o excesso máximo é de dois empregados pelo que vamos limitar os desvios por excesso a um único empregado impondo, em cada dia da semana, uma restrição técnica do tipo "$d_k^+ \le 1$".

O modelo definitivo é então:

$$Min\ f(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 100d_1^- + 100d_2^- + 100d_3^- + 100d_4^- + 100d_5^- + 100d_6^- + 100d_7^-$$

s.a.

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - d_1^+ + d_1^- = 3 \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 - d_2^+ + d_2^- = 3 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 - d_3^+ + d_3^- = 8 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 - d_4^+ + d_4^- = 8 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - d_5^+ + d_5^- = 8 \\
x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - d_6^+ + d_6^- = 3 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - d_7^+ + d_7^- = 3
\end{array}\right\} \text{Metas (restrições "fracas")}$$

$$\left.\begin{array}{l}
d_1^+ \le 1 \\
d_2^+ \le 1 \\
d_3^+ \le 1 \\
d_4^+ \le 1 \\
d_5^+ \le 1 \\
d_6^+ \le 1 \\
d_7^+ \le 1
\end{array}\right\} \text{Restrições técnicas (restrições "fortes")}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0\ e\ Int.$$

$$d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_4^+, d_5^+, d_6^+, d_7^+, d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_5^-, d_6^-, d_7^- \ge 0\ e\ Int.$$

A solução óptima é:

$$x_1 = 4; x_3 = 4$$

$$d_1^+ = d_2^+ = d_6^+ = d_7^+ = 1$$

$$Min\ f(X) = 8$$

Conclusão:

- necessários 8 empregados para garantir o serviço
- entram 4 empregados à segunda-feira e 4 empregados à quarta-feira
- há um empregado em excesso às segundas, terças, sábados e domingos

4. Outro Exemplo

Considere o modelo de PL:

Max f(X) = $6x_1 + 8x_2$ (lucro da venda dos bens “A” e “B”)

s.a.

x_1		$\geq$	30	(produção de “A”)
	x_2	$\geq$	10	(produção de “B”)
x_1	$+ 2x_2$	$\leq$	40	(operários)

$x_1, x_2 \geq 0$

O problema não tem solução admissível pois os operários não são suficientes para satisfazer a produção mínima de 30 unidades de “A” e 10 unidades de “B” (seriam necessários, pelo menos, 30 + 20 = 50 operários).

Nesta situação se o gestor considerar os níveis mínimos de produção como “METAS” utiliza o modelo:

$$Min\, f(D) = 6d_1^- + 8d_2^-$$

s.a.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - d_1^+ + d_1^- = 30 \\ x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10 \end{array}\right\} \quad \text{Metas (restrições “fracas”)}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \quad \text{Restrição técnica (restrição “forte”)}$$

$$x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0$$

A função objectivo conduz a reduzir ao máximo os desvios por defeito ponderados com os lucros de venda unitários (veja-se que para 1 unidade de “A” abaixo da meta a redução do lucro é de 6 u.m. sendo de 8 u.m. para idêntica situação com uma unidade de “B”).

A solução óptima obtida pelo método Simplex é a seguinte:

$$x_1 = 30; x_2 = 5$$

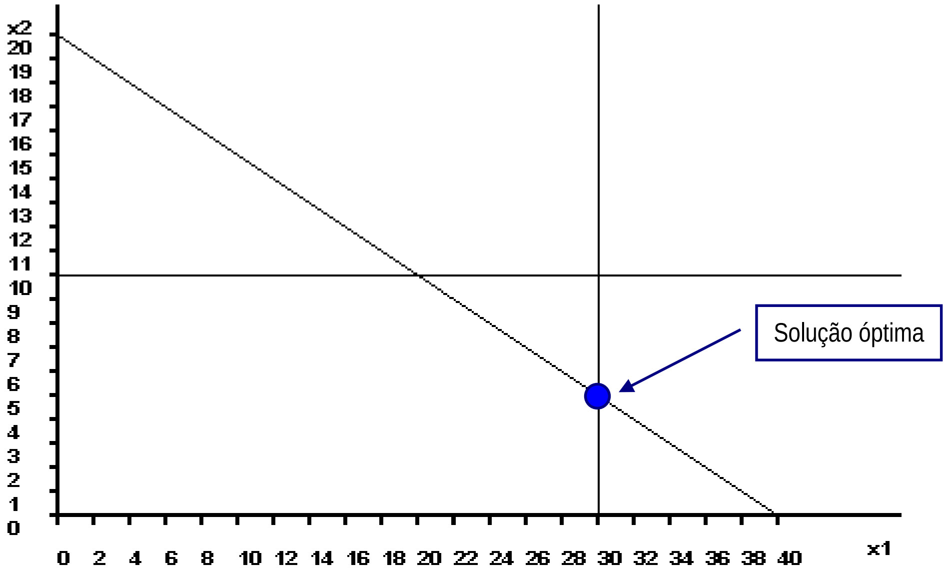
$$d_1^+ = d_1^- = d_2^+ = 0\,;\, d_2^- = 5$$

$$Min\ f(D) = 40$$

A melhor solução é pois:

- Produzir 30 unidades de "A" (meta cumprida sem desvios)
- Produzir 5 unidades de "B" (meta cumprida por defeito de 5 unidades)
- Restrição "forte" $x_1 + 2x_2 \leq 40$ cumprida sem folga
- Lucro máximo da venda = 220 u.m.

Na figura seguinte veja a geometria do modelo:



5. Metas com Prioridades Associadas - Optimização sequencial dos Objectivos

O gestor pode associar prioridades a cada uma das metas ou a conjuntos de metas.

Nesta situação organizam-se tantas funções objectivo quantas as prioridades como mostra a situação seguinte.

Considere a produção de A e B de acordo com os seguintes dados:

	A	B	Meta	Prioridade
Capital (u.m.)	1	2	≤ 20	1ª
Pessoal	1	1	= 15	2ª
Lucro unitário (u.m.)	2	1	≥ 40	3ª

O gestor "deseja" que:

- Em 1ª prioridade o capital a aplicar não exceda 20 u.m.
- Em 2ª prioridade o pessoal a afectar seja de 15 pessoas
- Em 3ª prioridade o lucro da venda da produção seja, no mínimo, de 40 u.m.

Há pois que formalizar as metas propostas e nelas fixar os desvios a "penalizar".

Considerando as variáveis de decisão x_1 e x_2 como níveis de produção de "A" e "B" temos:

Metas		Desvio não desejado
Capital	$x_1 + 2x_2 - d_1^+ + d_1^- = 20$	Excesso
Pessoal	$x_1 + x_2 - d_2^+ + d_2^- = 15$	Excesso e Defeito
Lucro	$2x_1 + x_2 - d_3^+ + d_3^- = 40$	Defeito

Porque foram fixadas prioridades, organiza-se uma função objectivo para cada uma delas, visando reduzir ou mesmo anular os desvios não desejados.

Temos então:

- Função objectivo (capital) a optimizar em 1ª prioridade

$$Min\, f_1 = d_1^+$$

- Função objectivo (pessoal) a optimizar em 2ª prioridade

$$Min\, f_2 = d_2^+ + d_2^-$$

- Função objectivo (lucro) a optimizar em 3ª prioridade

$$Min\, f_3 = d_3^-$$

Como resolver o problema?

Há várias técnicas aplicáveis nesta situação, recorrendo ao método Simplex.

A mais evidente é optimizar o modelo sequencialmente, não permitindo que a optimização de um objectivo degrade objectivos de maior prioridade já optimizados.

Regras básicas para aplicar o Método Simplex em optimização Sequencial

- Base Inicial constituída pelas variáveis de desvio por defeito
- Equações do conjunto de funções devem ter sempre coeficiente nulo para as VB.
- Escolha de nova VB

  Uma VNB seleccionável para a base só é escolhida se e só se não conduzir à degradação do valor óptimo já atingido para funções de prioridade superior à da função em curso de optimização.
- Empate na escolha de nova VB

  Se duas ou mais VNB podem ser escolhidas para entrada na base a decisão é "arbitrária" (ver parágrafo anterior).
- Empate na escolha da nova VNB (saída da base)

  Se a menor "ratio" existe em mais do que uma das equações técnicas, sai da base a VB associada à equação da meta de maior prioridade. Se tal se verifica em metas de igual prioridade a escolha é arbitrária.

Retomando o modelo apresentado, apliquemos o método Simplex observando as regras apresentadas:

Quadro Inicial

VB	x_1	x_2	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	VSM
d_1^-	1	2	-1	1	0	0	0	0	20
d_2^-	1	1	0	0	-1	1	0	0	15
d_3^-	2	1	0	0	0	0	-1	1	40
f_1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
f_2	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
f_3	0	0	0	0	0	0	0	-1	0

As variáveis de desvio por defeito (variáveis de folga) constituem uma matriz Identidade pelo que são seleccionadas para Variáveis Básicas.

Foram registadas as equações das 3 funções objectivo por ordem de prioridade.

Estas equações devem ter as VB com coeficiente nulo o que não se verifica nas equações de f_2 e f_3.

Comecemos por anular os coeficientes das VB nas equações das funções objectivo:

VB	x_1	x_2	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	VSM
d_1^-	1	2	-1	1	0	0	0	0	20
d_2^-	1	1	0	0	-1	1	0	0	15
d_3^-	2	1	0	0	0	0	-1	1	40
f_1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
f_2	1	1	0	0	-2	0	0	0	15
f_3	2	1	0	0	0	0	-1	0	40

As funções vão agora ser optimizadas sequencialmente, garantindo sempre que a optimização de um objectivo de uma dada prioridade não altera o óptimo atingido anteriormente para objectivo(s) de prioridade superior.

1º - Optimização de f_1

Está atingido o óptimo de f_1 com Min $f_1 = 0$.

A meta (capital) é satisfeita sem desvio por excesso.

2º - Optimização de f_2

O quadro Simplex é agora examinado para f_2:

VB	x_1	x_2	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	VSM
d_1^-	1	2	-1	1	0	0	0	0	20
d_2^-	1	1	0	0	-1	1	0	0	15
d_3^-	2	1	0	0	0	0	-1	1	40
f_1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
f_2	1	1	0	0	-2	0	0	0	15
f_3	2	1	0	0	0	0	-1	0	40

A solução não é óptima para f_2 devendo entrar para a base a variável x_1 ou x_2.

A entrada de qualquer destas variáveis compromete o valor óptimo, já calculado, de Min $f_1 = 0$?

A resposta é negativa pois é nulo o coeficiente em f_1 de qualquer das variáveis.

Escolhendo arbitrariamente x_1 para a nova base por troca com "d_2^-" temos:

VB	x_1	x_2	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	VSM
x_1	1	1	0	0	-1	1	0	0	15
d_1^-	0	1	-1	1	1	-1	0	0	5
d_3^-	0	-1	0	0	2	-2	-1	1	10
f_1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
f_2	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
f_3	0	-1	0	0	2	-2	-1	0	10

Está atingido o óptimo de f_2 com Min $f_2 = 0$.

A meta (pessoal) é satisfeita sem desvios.

3º - Optimização de f_3

O quadro anterior é agora examinado para f_3 concluindo-se que a entrada da variável "d_2+" pode melhorar o valor da função.

A entrada destas variável compromete os valores óptimos, já calculados, de Min $f_1 = 0$ e Min $f_2 = 0$?

A resposta é afirmativa pois sendo a menor "ratio" diferente de zero tal conduziria a alterar o valor de "d_2+" e assim alterar o valor óptimo já atingido para f_2.

Não há portanto possibilidade de melhorar o valor corrente de f_3 pelo que o cálculo está concluído.

Leitura da solução "óptima" (compromisso entre os três objectivos):

Produção : 15 unidades de "A".

Metas do decisor:

- 1ª prioridade (capital) : integralmente satisfeita
- 2ª prioridade (pessoal) : integralmente satisfeita
- 3ª prioridade (lucro) : satisfeita por defeito (menos 10 u.m.). O lucro é de 30 u.m.

Esta solução é única pois não é degenerada e só as VB apresentam vector nulo nas equações das 3 funções objectivo.

6. Metas com Prioridades Associadas - Optimização dos Objectivos com "big M's" decrescentes

A optimização sequencial pode ser substituída, com vantagem, usando uma única função objectivo

$$f = M_1 f_1 + M_2 f_2 + \ldots\ldots + M_{k-1} f_{k-1} + f_k$$

que reúne "k" objectivos ponderados sucessivamente com $M_1 \gg M_2 \gg M_3 \gg \ldots \gg M_{k-1} \gg 1$ devendo ler-se M_1 muito maior que M_2 ... muito maior do que 1.

Notar que se supõe que se pretende minimizar todos os objectivos envolvidos.

Para o problema anterior organiza-se a função: $Min\ f = M_1 d_1^+ + M_2(d_2^+ + d_2^-) + d_3^+$ que é optimizada usando normalmente o método Simplex.

Apresenta-se o processo iterativo para minimizar a função das funções:

VB	x_1	x_2	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	VSM
d_1^-	1	2	-1	1	0	0	0	0	20
d_2^-	1	1	0	0	-1	1	0	0	15
d_3^-	2	1	0	0	0	0	-1	1	40
f			$-M_1$		$-M_2$	$-M_2$		-1	0
f	$M_2 + 2$	$M_2 + 1$	$- M_1$	0	$- 2M_2$	0	-1	0	$15M_2 + 40$
x_1	1	1	0	0	-1	0	0	0	15
d_1^-	0	1	-1	1	1	1	0	0	5
d_3^-	0	-1	0	0	2	0	-1	1	10
f	0	-1	$-M_1$	0	$-M_2+ 2$	$-M_2 - 2$	-1	0	10

A solução óptima de “f” foi atingida.

Obtém-se o resultado anteriormente obtido (solução única):

$$Min\, f_1 = d_1^+ = 0$$

$$Min\, f_2 = d_2^+ + d_2^- = 0$$

$$Min\, f_3 = d_3^- = 10$$

Produzir 15 unidades de “A” satisfazendo as metas de capital e pessoal e cumprindo com defeito de 10 u.m. a meta do lucro.

Nota: se quiser usar software para resolver o problema, usando este método, utilize por exemplo valor 10000 para M1 e 1000 para M2.