XII. PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

Nos capítulos anteriores a optimização de modelos de PL foi feita no pressuposto da continuidade do espaço de soluções. Na prática são diversas as situações em que este pressuposto não é admissível. Assim, por exemplo, optimizar uma produção de mesas e cadeiras implica níveis de actividade expressos em valor inteiro pelo que, no modelo, as restrições lógicas incluirão a condição de integralidade para as variáveis de decisão. Noutras situações, pode ser necessário restringir apenas algumas das variáveis de decisão à observância da condição de integralidade (programação mista). Não raras vezes é necessário recorrer a variáveis binárias em que os valores admissíveis, sendo inteiros, estão restringidos a 0 ou 1.

Resulta assim poderem ocorrer as seguintes *situações típicas*:

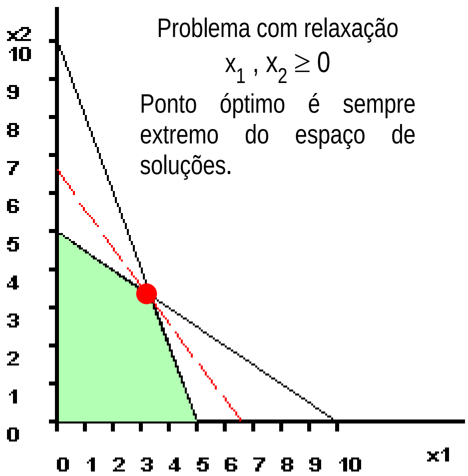
- todas as variáveis de decisão inteiras; neste caso diz-se que o problema é de Programação Linear Inteira Pura (PLIP)
- só parte das variáveis de decisão inteiras; neste caso diz-se que o problema é de Programação Linear Inteira Mista (PLIM)
- todas as variáveis de decisão binárias; neste caso diz-se que o problema é de Programação Linear Inteira Binária (PLIB)
- parte das variáveis de decisão binárias; caso de Programação Linear Inteira Binária Mista (PLIBM)

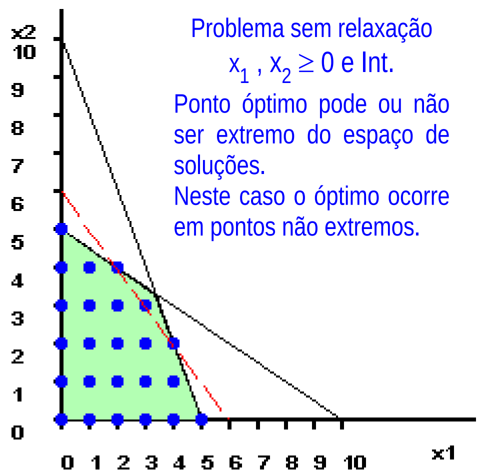
Considere-se o seguinte modelo de Programação Linear Inteira Pura (PLIP):

$$\text{Max } f(X) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{llcllcl} \text{sujeito a:} & 5x_1 & + & 7x_2 & \leq & 35 \\ & 4x_1 & + & 9x_2 & \leq & 36 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \text{ e Int.} \end{array}$$

Atente-se agora nos espaços de solução **relaxando** (enfraquecendo) ou não a condição de integralidade:





Veja-se a descontinuidade do espaço de solução (espaço discreto) e a existência de um número finito de pontos onde há solução admissível. Será que nesta situação é mais fácil o cálculo da solução óptima?

A resposta é negativa e adianta-se já que é, em muitos casos, difícil ou impossível obter a solução óptima.

Considere-se por exemplo um problema de Programação Linear Inteira Binária (PLIB) com 3 variáveis.

O número de soluções é de $2^3 = 8$ (note-se que algumas destas soluções poderão ser antecipadamente abandonadas por não serem admissíveis), mas se passarmos a 4 variáveis o número de soluções passará a ser de $2^4 = 16$ ou seja o dobro. Por cada variável binária que se acrescentar, o número de soluções a considerar duplica podendo atingir-se um número da ordem de milhões com muita rapidez (por exemplo para 30 variáveis binárias têm-se $2^{30} = 1.073.741.824$ soluções a considerar !) o que conduz a não ser possível o cálculo da solução óptima mesmo com as actuais capacidades de computação.

1. PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Considere-se o modelo de PLIP:

Max $f(X) = x_1 + x_2$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{rcrcl} -2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & & & \leq & 1.5 \\ & & x_1 , x_2 & \geq & 0 \text{ e Int.} \end{array}$$

Este problema é de programação linear em espaço contínuo se for excluída (*relaxada*) a condição de integralidade das variáveis de decisão.

Será válido resolver o problema pelo método Simplex e arredondar a solução se não for inteira? A resposta é negativa como adiante se demonstra:

Utilizando o método Simplex a solução óptima, no espaço contínuo, é $x_1 = 1.5$; $x_2 = 3$ com Max $f(X) = 4.5$.

Experimentemos arredondar o valor da variável x_1:

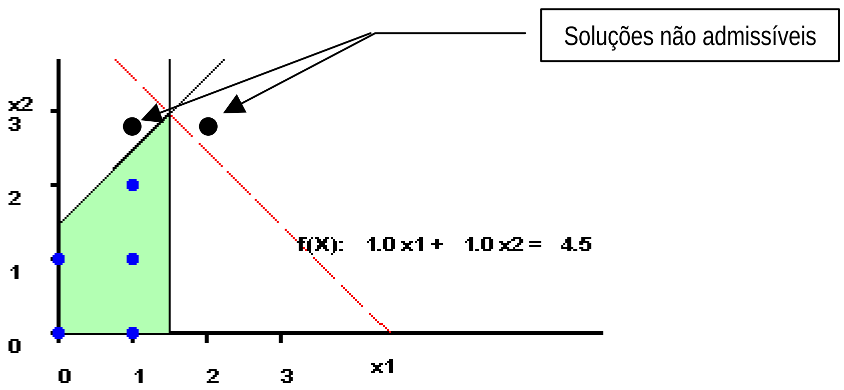
$$x_1 = 1 \quad \underline{ou} \quad x_1 = 2$$

Nenhuma destas soluções é admissível!

A primeira solução ($x_1 = 1$; $x_2 = 3$) viola a primeira restrição: $-2x_1 + 2x_3 \leq 3$.

A outra solução ($x_1 = 2$; $x_2 = 3$) viola a segunda restrição: $x_1 \leq 1.5$.

De facto, como se vê na figura seguinte, só 5 pontos do convexo de soluções satisfazem as condições de integralidade sendo qualquer das soluções anteriormente obtidas, por arredondamento, exterior ao convexo de soluções (não são admissíveis) !



Conclui-se que a solução óptima de um problema de programação inteira não deve obter-se recorrendo simplesmente ao arredondamento da solução óptima contínua obtida pelo método Simplex (relaxação da condição de integralidade).

Mas esta constatação não desmerece o interesse da solução contínua pois que considerada conjuntamente com ***novas restrições*** permite reduzir gradualmente o espaço de soluções admissíveis e conduzir ao ponto óptimo.

É claro que da redução do espaço de solução *nunca poderá resultar a melhoria do valor da função objectivo* e, na maior parte dos casos, tal valor <u>será pior</u>.

Se as novas restrições com que se aumenta o problema original forem restrições de integralidade então se X^*_{PL} for a <u>solução óptima contínua</u> do problema e X^*_{INT} a <u>solução óptima inteira</u> verifica-se :

- no caso de maximização Max f (X^*_{INT}) $\leq$ Max f (X^*_{PL})
- no caso de minimização Min f (X^*_{INT}) $\geq$ Min f (X^*_{PL})

ou seja, no óptimo inteiro o valor da função objectivo é sempre "igual ou pior" do que no óptimo contínuo.

Conclua-se pois que o valor da função objectivo no ponto óptimo do problema, *relaxando a condição de integralidade*, representa:

- na Maximização o valor máximo que pode atingir a função objectivo no óptimo inteiro;
- na Minimização o valor mínimo que pode atingir a função objectivo no óptimo inteiro;

No problema proposto, a solução contínua é $x_1 = 1.5$, $x_2 = 3$, Max f(X) = 4.5 pelo que se pode imediatamente concluir que o valor da função no óptimo inteiro não poderá ultrapassar 4.5.

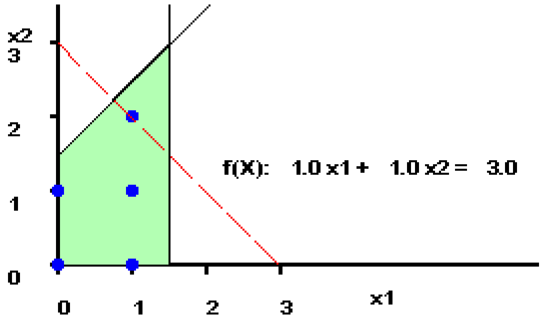
Assim, a solução $x_1 = 2$; $x_3 = 3$; f(X) = 5 que foi obtida por arredondamento seria de imediato eliminada sem necessidade sequer de testar a sua admissibilidade.

2. ENUMERAÇÃO COMPLETA

A geometria do modelo (figura seguinte) sugere o cálculo da solução óptima inteira recorrendo à ENUMERAÇÃO DOS PONTOS ADMISSÍVEIS (0 , 0) , (1 , 0) , (0 , 1) , (1 , 1) e (1 , 2).

Como nestes pontos a função objectivo tem os valores 0 , 1, 1, 2 e 3 conclui-se que o ponto óptimo é:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2\ ,\ \text{Max } f(X) = 3$$



É óbvio que a adopção deste método seria um fracasso computacional pois se, por exemplo, o problema tivesse 10 variáveis e cada uma delas tivesse 9 valores admissíveis o número de pontos a testar seria de:

$$9^{10} = 3.486.784.401\ !$$

3. ENUMERAÇÃO IMPLÍCITA

Pode suceder que uma solução óptima contínua seja admissível para o problema inteiro como sucede no exemplo seguinte:

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{sujeito a:} \quad \begin{array}{rcrcl} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1\, ,\, x_2 & \geq & 0 \text{ e Int.} \end{array}$$

Relaxando a condição de inteiro e aplicando o método do Simplex obtém-se a solução óptima:

$$x_1 = 4;\ x_2 = 9;\ \text{Max } f(X) = 96$$

Este resultado sugere que *modificando adequadamente o problema original* será possível atingir uma situação em que as duas soluções óptimas coincidam (fica claro que a dificuldade do cálculo de uma solução inteira não resulta de ineficiência do método Simplex antes reside na descontinuidade do espaço de solução).

Considere-se agora o problema (PLIP):

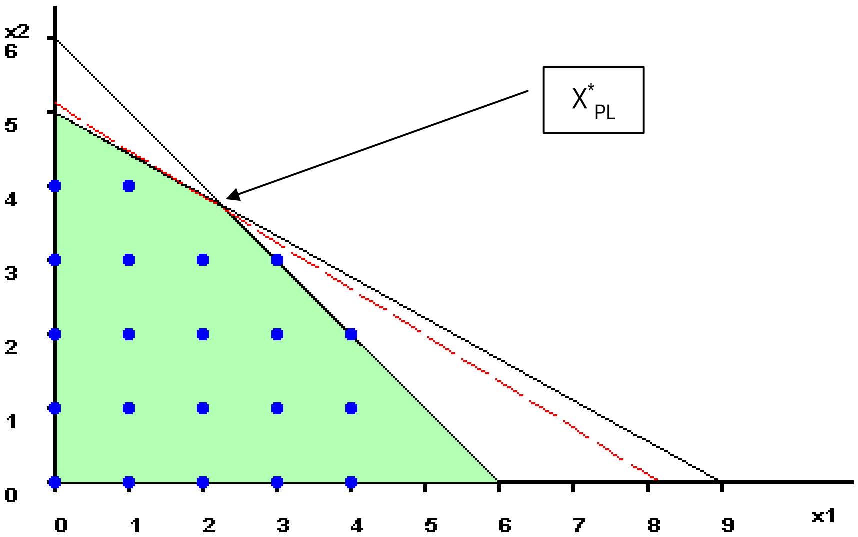
$$\text{Max } f(X) = 5x_1 + 8x_2$$

$$\text{sujeito a:} \quad \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & \leq & 45 \\ & & x_1\, ,\, x_2 & \geq & 0 \text{ e Int.} \end{array}$$

A solução óptima contínua $x_1 = 2.25$; $x_2 = 3.75$; f (X) = 41.25.

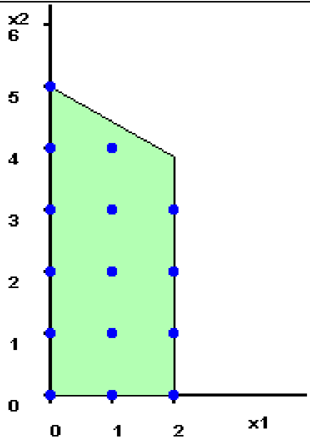
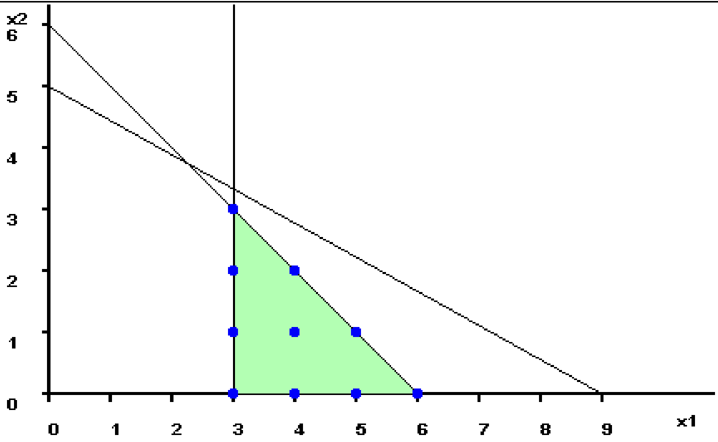
Esta solução <u>não é admissível para o problema inteiro</u> (x_1 e x_2 não inteiros). Como o máximo da função em espaço contínuo é 41.25 *então no óptimo inteiro a função não excederá este valor*.

A figura seguinte visualiza o espaço de soluções admissíveis do problema *relaxado,* o seu ponto óptimo X^*_{PL} , a recta de nível de cota 41.25 que contém este ponto e os pontos admissíveis (valor inteiro).



No ponto óptimo do problema "relaxado", a variável x_1 tem o valor 2.25.

Para ter valor inteiro há que pesquisar os espaços onde $x_1 \le 2$ e $x_1 \ge 3$ (valores inteiros adjacentes de 2.25) como mostra a figura seguinte:

$x_1 \le 2$	$x_1 \ge 3$
	

Esta partição na variável x_1 estabelece 2 novos problemas lineares (descendentes), cada um deles aumentado com uma nova restrição técnica:

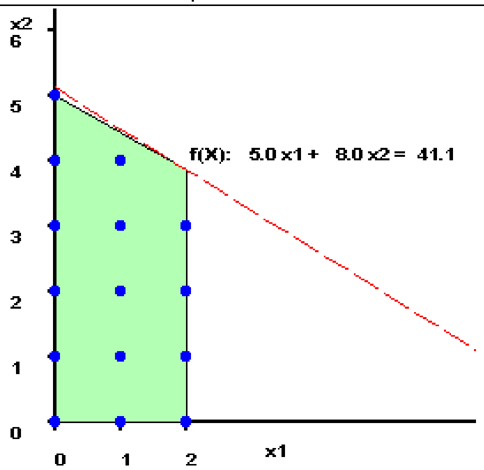
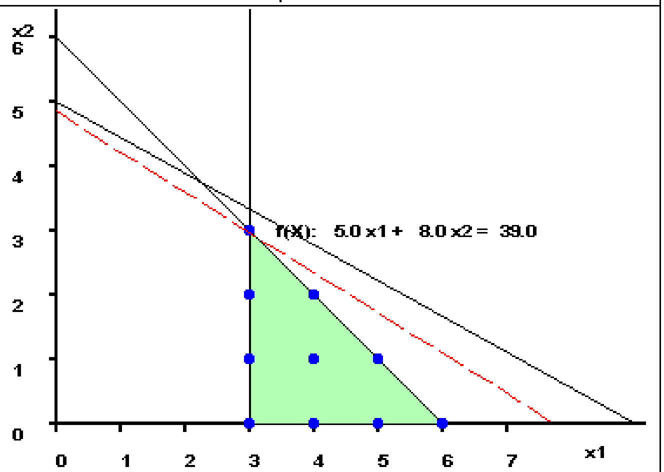
Max $f(X) = 5x_1 + 8x_2$

Sub problema 1					
s. a:	x_1	+	x_2	$\le$	6
	$5x_1$	+	$9x_2$	$\le$	45
	x_1			$\le$	2
			x_1 , x_2	$\ge$	0

Sub problema 2					
s. a:	x_1	+	x_2	$\le$	6
	$5x_1$	+	$9x_2$	$\le$	45
	x_1			$\ge$	3
			x_1 , x_2	$\ge$	0

Recorrendo ao método do Simplex têm-se as soluções óptimas contínuas (ver figuras):

- Sub problema nº 1 : $x_1 = 2$; $x_2 = {}^{35}/_{9}$; $f(X) = 41.1$
- Sub problema nº 2 : $x_1 = 3$; $x_2 = 3$; $f(X) = 39$

Sub problema nº 1	Sub problema nº 2
	

A solução para o sub problema nº 2 que é $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ e f(X) = 39, satisfaz as condições de integralidade sendo portanto admissível para o problema. Atente-se que não há prova bastante de que se trate da solução óptima ou seja, no momento, não se pode eliminar a possibilidade de haver outro ponto admissível para o problema inteiro onde a função tenha valor superior a 39 (notar que no espaço contínuo o valor máximo de f(X) é 41.1).

Por esta razão, f(X) = 39 passa a constituir Limite Inferior para o valor da Função Objectivo do PLIP já que não é possível gerar melhor solução inteira num espaço onde para a solução contínua exista f(X) < 39.
Eis a razão porque, ao longo do processo iterativo, não são objecto de partição muitas das soluções contínuas do que resulta economia de tempo de cálculo.

Qual o erro máximo que se cometeria ao adoptar a solução admissível com f(X) = 39 como solução óptima?
Porque sabemos que, em espaço contínuo, o valor máximo da função objectivo é f(X) = 41.25 então o erro máximo, em percentagem, seria:

$$\boxed{\textit{Erro máximo (\%)} \;=\; \frac{41.25-39}{41.25}(100\%) = 5.45\%}$$

Admitamos que este erro máximo é inaceitável e continuemos o cálculo da solução óptima.

Para o sub problema nº 1 a solução óptima contínua, $x_1 = 2$; $x_2 = {}^{35}/_{9}$; f(X) = 41.1, não é admissível mas como f(X) tem valor superior ao limite inferior 39 é necessário efectuar a partição deste espaço.
Porque $x_2 = {}^{35}/_{9}$ não é admissível no problema inteiro, efectua-se a partição do espaço obtendo dois novos sub problemas (descendentes). Esta partição é feita com as restrições (partição em x_2):

$x_2 \leq 3$	$x_2 \geq 4$

Veja-se que 3 e 4 são os valores inteiros adjacentes de ${}^{35}/_{9}$ …

Os dois novos sub problemas são:

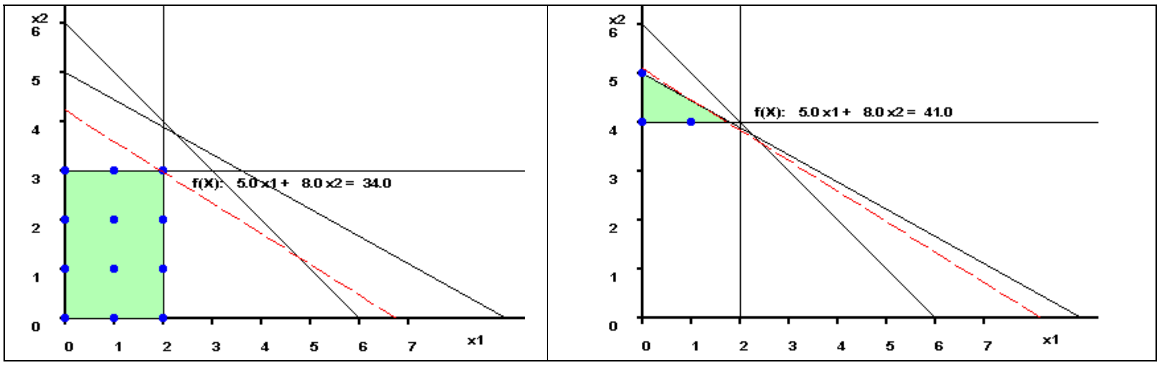
Max $f(X) = 5x_1 + 8x_2$

Sub problema nº 1.1					
s. a:	x_1	+	x_2	$\leq$	6
	$5x_1$	+	$9x_2$	$\leq$	45
	x_1			$\leq$	2
			x_2	$\leq$	3
			x_1 , x_2	$\geq$	0

Sub problema nº 1.2					
s. a:	x_1	+	x_2	$\leq$	6
	$5x_1$	+	$9x_2$	$\leq$	45
	x_1			$\leq$	2
			x_2	$\geq$	4
			x_1 , x_2	$\geq$	0

Recorrendo ao método do Simplex têm-se as soluções óptimas contínuas (ver figuras):

- Sub problema nº 1.1 : $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; f(X) = 34
- Sub problema nº 1.2 : $x_1 = 1.8$; $x_2 = 4$; f(X) =41



A solução $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $f(X) = 34$, do sub problema 1.1, é admissível para o problema inteiro mas é "pior" do que a do limite inferior corrente ($f(X) = 39$).

A solução $x_1 = 1.8$; $x_2 = 4$; $f(X) = 41$, do sub problema 1.2, não é admissível mas porque f(X) tem valor superior ao Limite Inferior corrente (39) deve ser objecto de partição na variável $x_1 = 1.8$ com as restrições:

$x_1 \leq 1$	$x_1 \geq 2$

o que <u>elimina</u> o espaço de solução não inteira onde $x_1 = 1.8$.

Os dois novos sub problemas são:

Max $f(X) = 5x_1 + 8x_2$

Sub problema nº 1.2.1					
s. a:	x_1	+	x_2	$\leq$	6
	$5x_1$	+	$9x_2$	$\leq$	45
	x_1			$\leq$	2
			x_2	$\geq$	4
	x_1			$\leq$	1
			x_1 , x_2	$\geq$	0

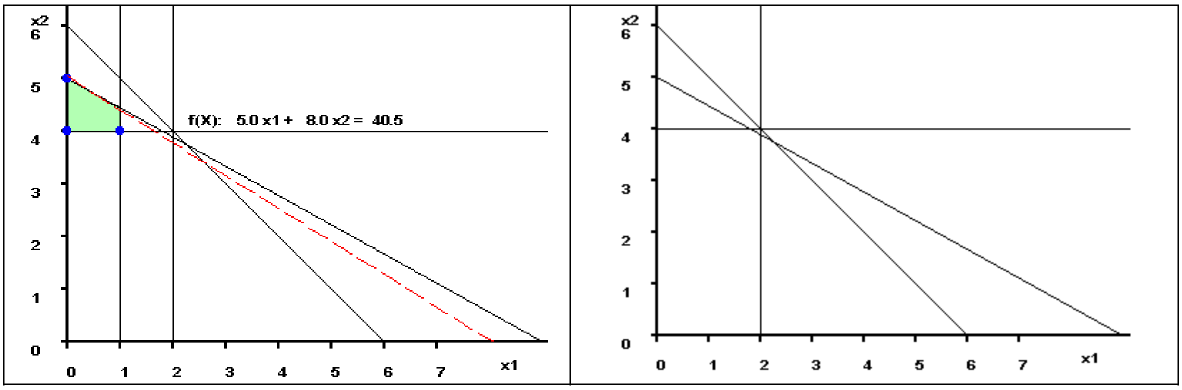
Sub problema nº 1.2.2					
s. a:	x_1	+	x_2	$\leq$	6
	$5x_1$	+	$9x_2$	$\leq$	45
	x_1			$\leq$	2
			x_2	$\geq$	4
	x_1			$\geq$	2
			x_1 , x_2	$\geq$	0

(notar que no sub problema 1.2.1 a restrição $x_1 \leq 2$ é redundante face à nova restrição $x_1 \leq 1$)

(notar que no sub problema 1.2.2 as restrições $x_1 \leq 2$ e $x_1 \geq 2$ impõem $x_1 = 2$)

Recorrendo ao método do Simplex têm-se as soluções óptimas contínuas (ver figuras):

- Sub problema nº 1.2.1 : $x_1 = 1$; $x_2 = {}^{40}/_{9}$; $f(X) = 40.56$
- Sub problema nº 1.2.2 : não tem solução ($x_1 = 2$ e $x_2 \geq 4$ viola $5x_1 + 9x_2 \leq 45$)



Para o o sub problema 1.2.1 a solução óptima contínua, que é $x_1 = 1$; $x_2 = {}^{40}/_9$; f(X) = 40.56, não é admissível mas como f(X) tem valor superior ao Limite Inferior corrente (39) é necessário explorar este espaço.

Porque $x_2 = {}^{40}/_9$ não é admissível no problema inteiro, estabelecem-se dois novos sub problemas (descendentes) impondo as restrições (partição em x_2):

$x_2 \leq 4$	$x_2 \geq 5$

Notar que estas restrições <u>eliminam</u> o espaço onde $x_2 = {}^{40}/_9$. Os dois novos sub problemas são:

Max $f(X) = 5x_1 + 8x_2$

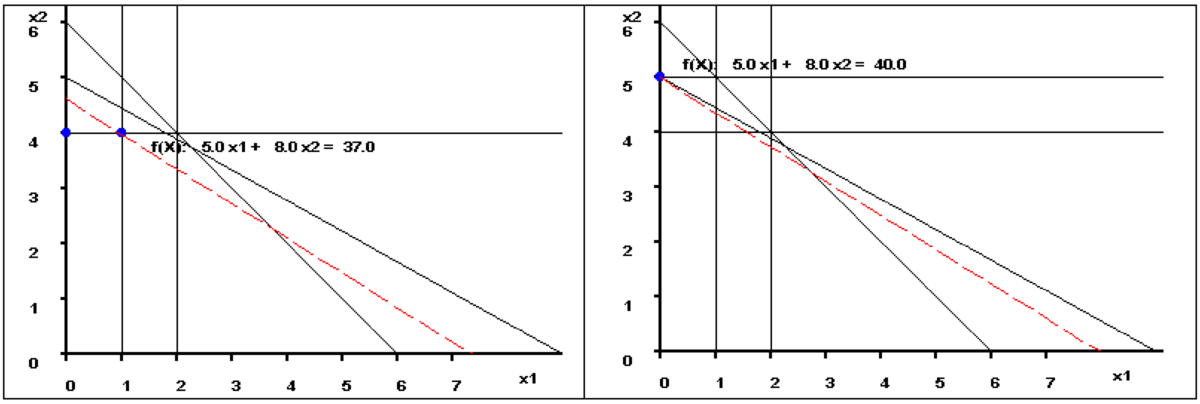
Sub problema nº 1.2.1.1					
s. a:	x_1	+	x_2	$\leq$	6
	$5x_1$	+	$9x_2$	$\leq$	45
	x_1			$\leq$	2
			x_2	$\geq$	4
	x_1			$\leq$	1
			x_2	$\leq$	4
			x_1 , x_2	$\geq$	0

Sub problema nº 1.2.1.2					
s. a:	x_1	+	x_2	$\leq$	6
	$5x_1$	+	$9x_2$	$\leq$	45
	x_1			$\leq$	2
			x_2	$\geq$	4
	x_1			$\leq$	1
			x_2	$\geq$	5
			x_1 , x_2	$\geq$	0

($x_1 \leq 2$ é redundante porque $x_1 \leq 1$; $x_2 \geq 4$ e $x_2 \leq 4$ impõem $x_2 = 4$)

Recorrendo ao método do Simplex têm-se as soluções óptimas contínuas (ver figuras):

- Sub problema nº 1.2.1.1 : $x_1 = 1$; $x_2 = 4$; f(X) = 37
- Sub problema nº 1.2.1.2 : $x_1 = 0$; $x_2 = 5$; f(X) = 40

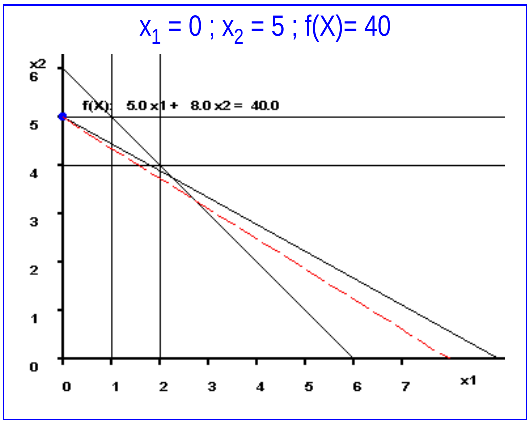


A solução do sub problema 1.2.1.1 é admissível com f(X) = 37; não tem interesse pois já dispomos de solução admissível com f(X) = 39 (Limite Inferior corrente).

A solução do sub problema 1.2.1.2 é admissível com f(X) = 40 > 39 pelo que passa a ser o novo Limite Inferior da função objectivo.

Porque já não há mais espaços de solução para analisar temos a Solução Óptima:

$x_1 = 0$; $x_2 = 5$; Max f(X) = 40



O método de cálculo apresentado denomina-se **"Branch and Bound"** (Partição e Avaliação Sucessivas) por desenvolver sub problemas por partição *de um dado espaço de solução* e **avaliar** as soluções obtidas face a um valor limite da função objectivo (*inferior no caso de Maximização ; superior no caso de Minimização)* reduzindo o esforço de enumeração das soluções admissíveis.

Trata-se de um algoritmo de uso generalizado em computação variando a programação nas técnicas de "Branch" (escolha do sub problema a tratar e dentro deste a variável para efectuar a partição) e nas técnicas de "Bound" (estabelecimento de limites para o valor da função).
Na secção seguinte apresenta-se um resumo do método e exemplos de maximização e minimização.

4. BRANCH AND BOUND[1] – Maximização de um PLIP

Passo 1. Inicialização

Calcular a solução óptima pelo método do Simplex relaxando a condição de integralidade:

- se a solução contínua é admissível para o PLIP, então é solução óptima deste. Parar.
- se a solução contínua não é admissível para o PLIP, estabelecer um Limite Inferior Finito para o valor da função objectivo, igual ao valor desta *num ponto admissível para o PLIP (guess)*[2].
- se a solução contínua não é admissível para o PLIP *e não é possível estabelecer um* Limite Inferior Finito para o valor da função objectivo, considera-se o Limite Inferior igual a "- ∞".

Passo 2. Branch (Partição)

Seleccionar um dos sub espaços de solução ainda não explorados (na 1ª iteração é considerado todo o espaço de solução do problema original relaxando a condição de integralidade) e em que a solução contínua não é admissível; nesta solução seleccionar uma variável não inteira que serve de "chave" para a partição do sub espaço em apreciação. Admitindo que esta variável tem valor não inteiro " α " estabelecem-se duas novas restrições em que a variável é respectivamente " $\leq$ " e " $\geq$ " aos valores inteiros adjacentes de " α " .

Aumentar o problema com cada uma destas novas restrições constituindo assim 2 novos sub problemas (descendentes).

Passo 3. Bound (Limite)

Calcular a solução óptima destes sub problemas *relaxando a condição de integralidade*. O valor da função objectivo constitui o valor máximo em cada sub espaço.

Passo 4. Fathom (Avaliação)

Eliminar de futura análise toda a solução que se enquadre numa das seguintes situações:

- não admissível em ambiente contínuo (não pode gerar soluções admissíveis inteiras...);
- com valor da função inferior ou igual ao Limite Inferior Corrente de f(X) independentemente de ser ou não admissível (não poderá gerar soluções com melhor valor para a função objectivo);
- é admissível para o PLIP e tem valor superior ao Limite Inferior Corrente de f(X). Passa a constituir Novo Limite Inferior ;

Repetir o 2º passo se ainda há problemas para partição.

Repetir o 3º passo se ainda há soluções para avaliar.

Fim.

1 Land, A.H. and A.G.Doig :" An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems", Econometrica, 1960

2 Pode arredondar-se a solução contínua, por defeito, ao inteiro mais próximo e testar a sua admissibilidade. Se admissível, o valor da função neste ponto, constitui o primeiro Limite Inferior da função. Posteriormente, *só serão objecto de partição* as soluções não admissíveis em que o valor da função seja superior ao Limite Inferior Corrente.

5. Exemplo de Maximização de um PLIP

Vamos usar uma "arborescência" para organizar os sub problemas e decidir sobre eles.

Consideremos o seguinte problema só com variáveis de decisão inteiras não negativas:

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

s.a.

$$30x_1 + 20x_2 \leq 290$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 110$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \text{ e Int.}$$

Relaxando a condição de integralidade e aplicando o método Simplex, a solução óptima é:

$$x_1 = 3.5 \ ; \ x_2 = 9.25 \ ; \ \text{Max } f(X) = 95$$

Estaremos em condições de estabelecer um limite inferior para o valor para f(X) do PLIP ?

Pode tentar-se arredondar por defeito a solução contínua obtendo $x_1 = 3$; $x_2 = 9$ e testar a sua admissibilidade:

- na 1ª restrição tem-se $30(3) + 20(9) \leq 290$ ... satisfaz
- na 2ª restrição tem-se $5(3) + 10(9) \leq 110$ ... satisfaz

Como a solução satisfaz calcula-se o valor f(X) = 6(3) + 8(9) = 90 que passa a ser o 1º Limite Inferior (considerar esta solução óptima implica o erro máximo de 5.56%).

Se for moroso testar o arredondamento da solução considera-se o 1º limite inferior $f(X) = -\infty$.

No caso presente vamos operar com f(X) = 90 como primeiro Limite Inferior.

A solução contínua com f(X)= 95 > 90 deve ser objecto de partição.

Quer x_1 quer x_2 não satisfazem a condição de inteiro.

Qual das variáveis seleccionar para efectuar a partição ?

No mesmo "nó da árvore" há várias opções de que se indicam duas:

- escolher a variável com maior parte fraccionária
- escolher a variável com "melhor" coeficiente na função objectivo

Na situação corrente, à luz da 1ª opção escolher-se-ia a variável x_1 mas à luz da 2ª opção seria escolhida a variável x_2 o que serve bem para avaliar estas opções sem justificação suportada matematicamente!

Seja x_1 a variável escolhida arbitrariamente para partição.

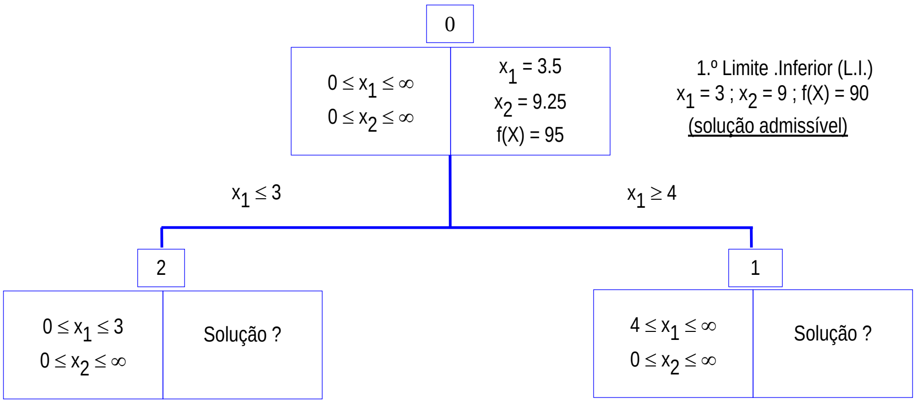
O espaço onde temos $0 \leq x_1 \leq +\infty$ e $0 \leq x_2 \leq +\infty$ vai ser "partido" introduzindo as restrições de partição:

$x_1 \leq 3$	$x_1 \geq 4$

Temos agora dois novos sub problemas (1 e 2) em que as soluções contínuas devem satisfazer:

Sub problema nº 1	Sub problema nº 2
$4 \geq x_1 \leq +\infty$	$0 \leq x_1 \leq 3$
$0 \leq x_2 \leq +\infty$	$0 \leq x_2 \leq +\infty$

Na figura seguinte apresenta-se a arborescência da situação corrente:



Cálculo da Solução óptima dos sub problemas 1 e 2

Sub problema 2 (considerar $x_1 = 3$)

Resolver o sistema de restrições técnicas do sub problema, em ordem a x_2 :

$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 \le 290 \\ 5x_1 + 10x_2 \le 110 \end{cases} \quad \begin{cases} 30(3) + 20x_2 \le 290 \\ 5(3) + 10x_2 \le 110 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \le 10 \\ x_2 \le 9.5 \end{cases}$$

O valor de x_2 deve pertencer ao intervalo [0 , 9.5].

A variável x_2 tem coeficiente positivo em f(X) pelo que o seu valor óptimo, satisfazendo as duas restrições, deve ser o maior possível : $x_2 = 9.5$.

Para $x_1 = 3$ e $x_2 = 9.5$ tem-se $f(X) = 94$.

Sub problema 1 (considerar $x_1 = 4$)

Resolver o sistema de restrições técnicas do sub problema, em ordem a x_2:

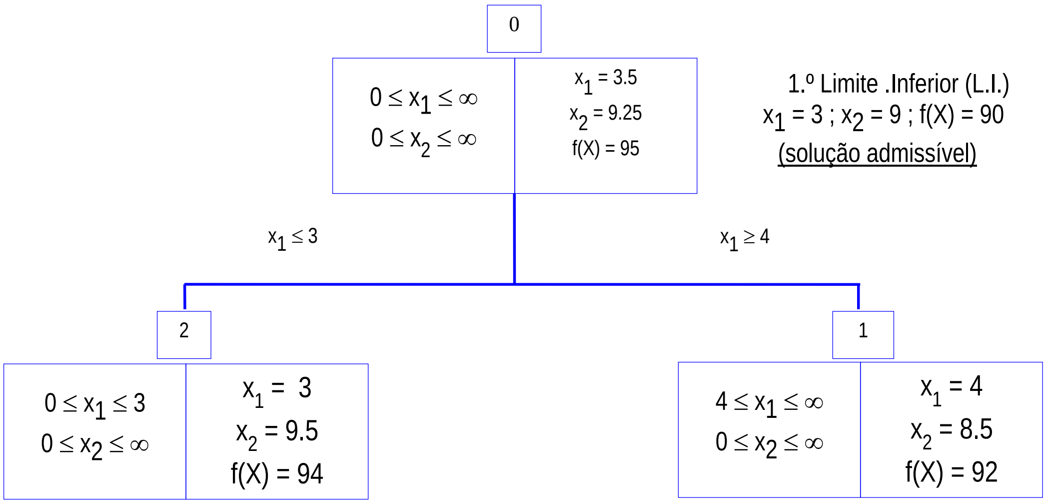
$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 \le 290 \\ 5x_1 + 10x_2 \le 110 \end{cases} \quad \begin{cases} 30(4) + 20x_2 \le 290 \\ 5(4) + 10x_2 \le 110 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \le 8.5 \\ x_2 \le 9 \end{cases}$$

O valor de x_2 deve pertencer ao intervalo [0 , 8.5].

A variável x_2 tem coeficiente positivo em f(X) pelo que o seu valor óptimo, satisfazendo as duas restrições, deve ser o maior possível : $x_2 = 8.5$.

Para $x_1 = 4$ e $x_2 = 8.5$ tem-se $f(X) = 92$.

Actualização da Árvore das Soluções



Nenhuma das soluções é admissível (há variáveis com valor não inteiro).

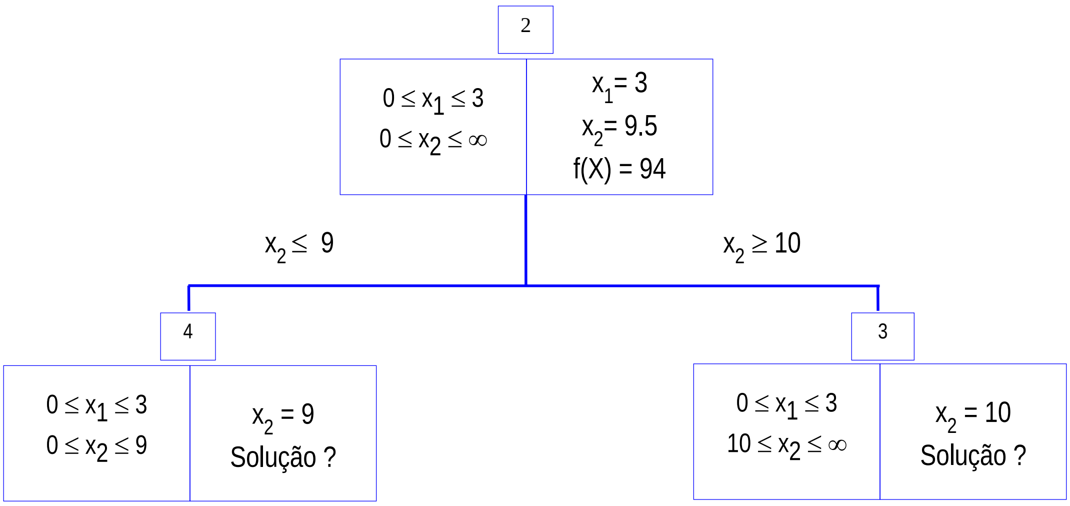
Ambas têm f(X) superior ao limite inferior corrente (f(X) = 90) pelo que há que efectuar partição.

Porque estamos a maximizar escolhe-se o sub problema 2 para partição por ter f(X) com maior valor.

Neste sub problema a partição é feita na variável $x_2 = 9.5$ introduzindo as restrições de partição:

$x_2 \leq 9$	$x_2 \geq 10$

Actualiza-se a árvore de soluções (para o nó 2) e fica:



Nos sub problemas 3 e 4 (descendentes do sub problema 2) vigora o domínio de x_1 do "progenitor":

$$(x_1 \geq 0 \text{ e } x_1 \leq 3)$$

Cálculo da Solução óptima dos sub problemas 3 e 4 (calcular em ambos o valor da variável x_1)

Sub problema 4 (considerar x_2 = 9 e calcular valor óptimo para x_1)

Resolver o sistema de restrições técnicas em ordem a x_1:

$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 \le 290 \\ 5x_1 + 10x_2 \le 110 \\ x_1 \le 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 30x_1 + 20(9) \le 290 \\ 5x_1 + 10(9) \le 110 \\ x_1 \le 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \le \frac{11}{3} \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$

O valor de x_1 deve pertencer ao intervalo [0 , 3].

A variável x_1 tem coeficiente positivo em f(X) pelo que o seu valor óptimo, satisfazendo as três restrições, deve ser o maior possível : x_1 = 3.

Para x_1 = 3 e x_2 = 9 tem-se f(X) = 90.

Sub problema 3 (considerar x_2 = 10 e calcular valor óptimo para x_1)

Resolver o sistema de restrições técnicas em ordem a x_1:

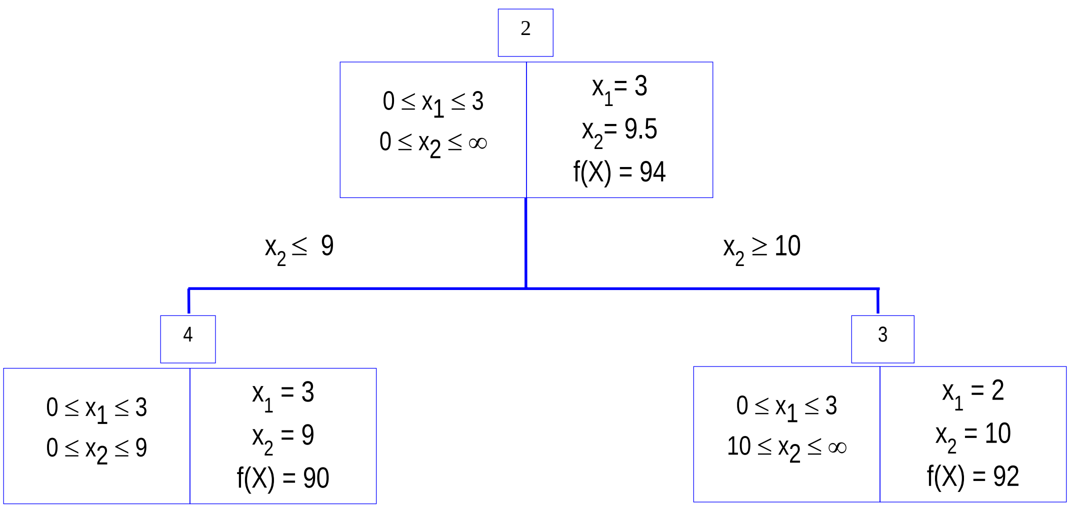
$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 \le 290 \\ 5x_1 + 10x_2 \le 110 \\ x_1 \le 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 30x_1 + 20(10) \le 290 \\ 5x_1 + 10(10) \le 110 \\ x_1 \le 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$

O valor de x_1 deve pertencer ao intervalo [0 , 2].

A variável x_1 tem coeficiente positivo em f(X) pelo que o seu valor óptimo, satisfazendo as três restrições, deve ser o maior possível : x_1 = 2.

Para x_1 = 2 e x_2 = 10 tem-se f(X) = 92.

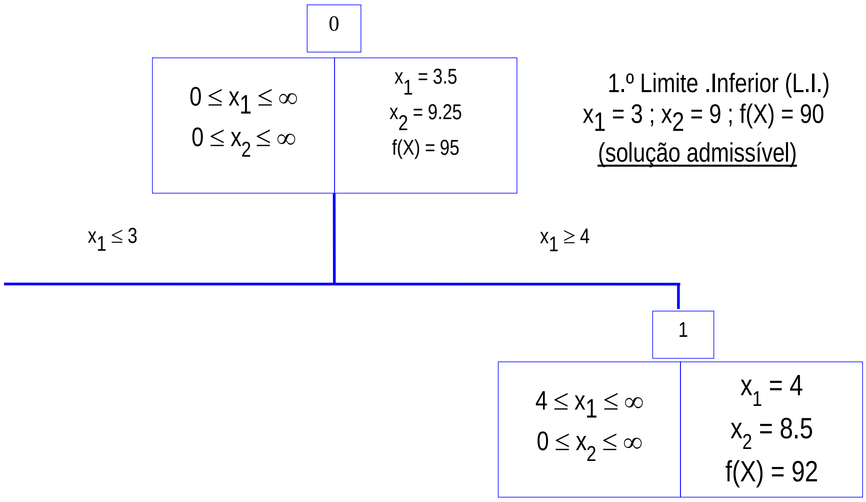
Actualiza-se a árvore de soluções (para os nós 3 e 4) e fica:



As duas soluções são admissíveis mas a melhor delas é a do sub problema 3 com f(X) = 92.

Actualizamos o Limite Inferior de f(X) para 92, ou seja, a partir deste momento só serão objecto de partição soluções não admissíveis com $f(X) \geq 92$.

Está pendente o estudo do nó 1:



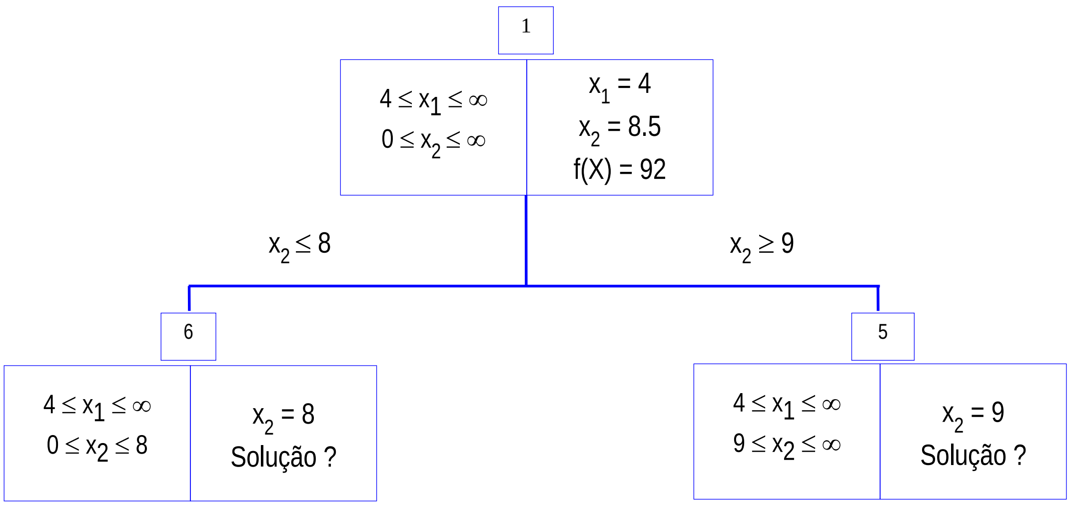
A solução não é admissível. Tem f(X) = 92 que é o actual valor do Limite Inferior de f(X) pelo que nos seus descendentes, se houver solução admissível, nunca haverá f(X) >92. Assim sendo podemos concluir já que a solução óptima tem f(X) = 92.

Não podemos contudo parar porque poderá haver solução admissível com f(X) = 92 nos descendentes do sub problema 1.

Neste sub problema a partição é feita na variável $x_2 = 8.5$ introduzindo as restrições de partição:

$x_2 \leq 8$	$x_2 \geq 9$

Actualiza-se a árvore de soluções (para o nó 1) e fica:



Nos sub problemas 5 e 6 (descendentes do sub problema 1) vigora o domínio de x_1 do "progenitor":

$$(x_1 \geq 4 \text{ e } x_1 \leq \infty)$$

Cálculo da Solução óptima dos sub problemas 5 e 6 (calcular em ambos o valor da variável x_1)

Sub problema 6 (considerar $x_2 = 8$ e calcular valor óptimo para x_1)

Resolver o sistema de restrições técnicas em ordem a x_1:

$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 \leq 290 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ x_1 \geq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 30x_1 + 20(8) \leq 290 \\ 5x_1 + 10(8) \leq 110 \\ x_1 \geq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq \frac{13}{3} \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 \geq 4 \end{cases}$$

O valor de x_1 deve pertencer ao intervalo $[\,4\ ,\ ^{13}/_{3}\,]$.

A variável x_1 tem coeficiente positivo em f(X) pelo que o seu valor óptimo, satisfazendo as três restrições, deve ser o maior possível : $x_1 = {}^{13}/_{3}$.

Para $x_1 = {}^{13}/_{3}$ e $x_2 = 8$ tem-se f(X) = 74.

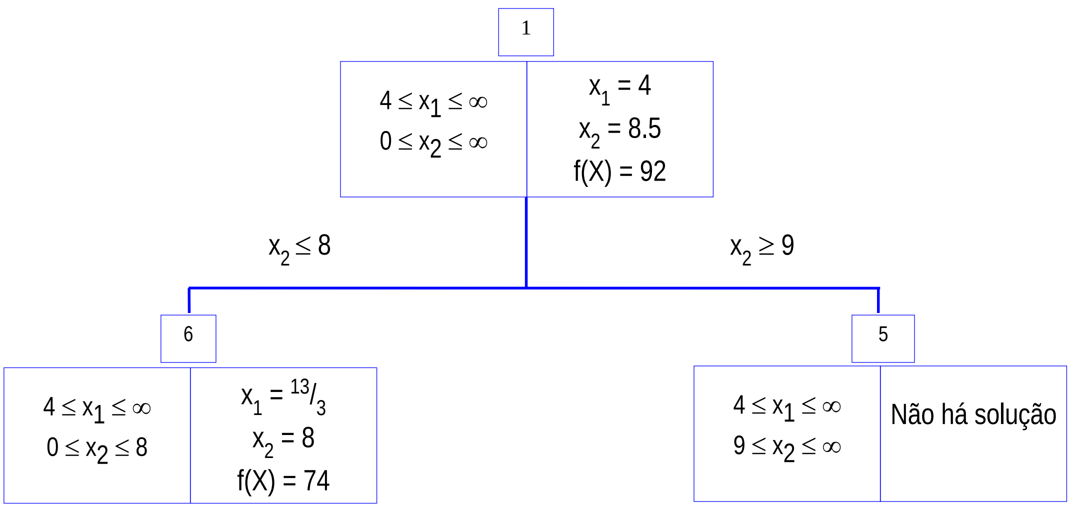
Sub problema 5 (considerar $x_2 = 9$ e calcular valor óptimo para x_1)

Resolver o sistema de restrições técnicas em ordem a x_1:

$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 \leq 290 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ x_1 \geq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 30x_1 + 20(9) \leq 290 \\ 5x_1 + 10(9) \leq 110 \\ x_1 \geq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq \frac{11}{3} \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 4 \end{cases}$$

O sub problema não tem solução (não há valor admissível para x_1).

Actualiza-se a árvore de soluções (para os nós 5 e 6) e fica:



No nó 6 a solução não é admissível mas como f(X) =74 é inferior ao Limite Inferior corrente (f(X) = 92) não é feita partição.

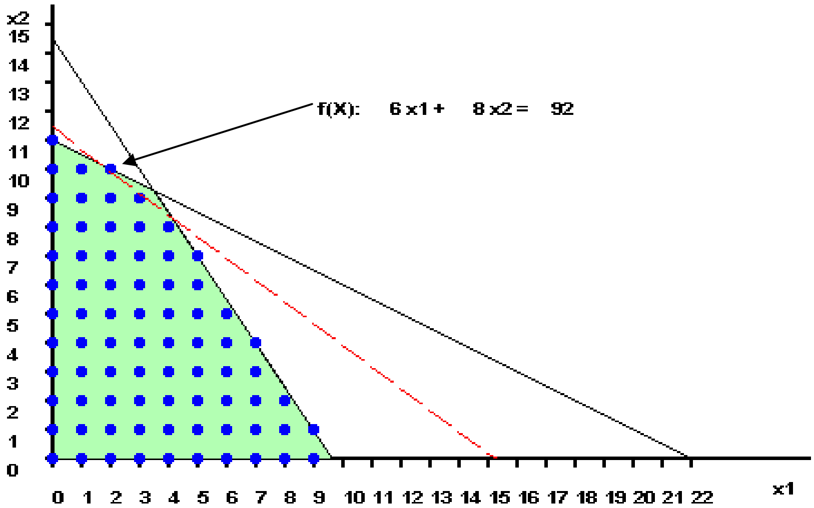
No nó 5 não há solução.

Todos os sub problemas estão analisados.

A solução óptima é a obtida no nó 3:

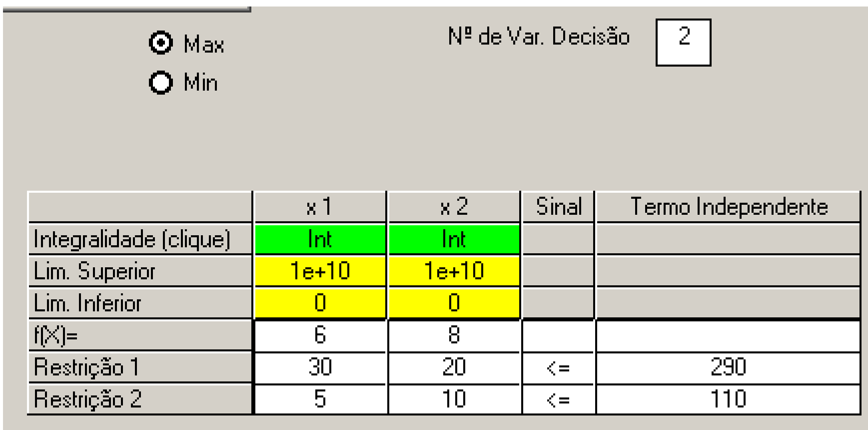
$x_1 = 2$; $x_2 = 10$; Max f(X) = 92

Veja-se a geometria do modelo:



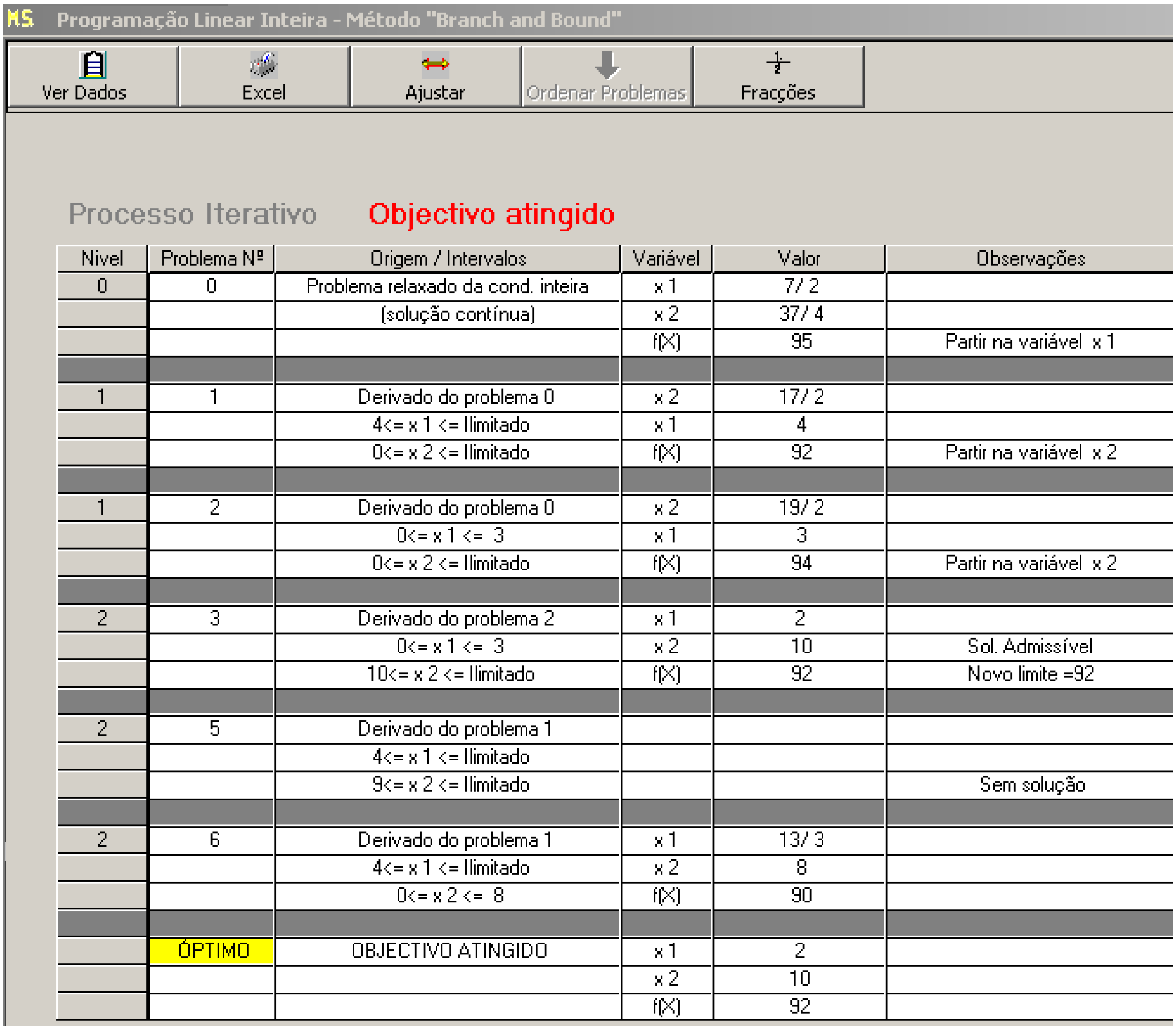
Veja-se a resolução com o software do autor:

Entrada de dados



	x 1	x 2	Sinal	Termo Independente
Integralidade (clique)	Int	Int		
Lim. Superior	1e+10	1e+10		
Lim. Inferior	0	0		
f(X)=	6	8		
Restrição 1	30	20	<=	290
Restrição 2	5	10	<=	110

Processo iterativo (calculado por ramos da árvore)



Nivel	Problema Nº	Origem / Intervalos	Variável	Valor	Observações
0	0	Problema relaxado da cond. inteira	x 1	7/ 2	
		(solução contínua)	x 2	37/ 4	
			f(X)	95	Partir na variável x 1
1	1	Derivado do problema 0	x 2	17/ 2	
		4<= x 1 <= Ilimitado	x 1	4	
		0<= x 2 <= Ilimitado	f(X)	92	Partir na variável x 2
1	2	Derivado do problema 0	x 2	19/ 2	
		0<= x 1 <= 3	x 1	3	
		0<= x 2 <= Ilimitado	f(X)	94	Partir na variável x 2
2	3	Derivado do problema 2	x 1	2	
		0<= x 1 <= 3	x 2	10	Sol. Admissível
		10<= x 2 <= Ilimitado	f(X)	92	Novo limite =92
2	5	Derivado do problema 1			
		4<= x 1 <= Ilimitado			
		9<= x 2 <= Ilimitado			Sem solução
2	6	Derivado do problema 1	x 1	13/ 3	
		4<= x 1 <= Ilimitado	x 2	8	
		0<= x 2 <= 8	f(X)	90	
	ÓPTIMO	OBJECTIVO ATINGIDO	x 1	2	
			x 2	10	
			f(X)	92	

Uma nota final sobre o processo iterativo (construção da arborescência):

Há duas técnicas usadas na computação designadas por "breadth-first" e "depth-first" que significam que o cálculo é feito "por níveis" ou "por ramos".

Cálculo por Níveis (utilizado neste capítulo):

Definem-se e estudam-se os sub problemas do mesmo nível antes de efectuar partições e passar ao nível seguinte. No mesmo nível estudam-se em primeiro lugar os sub problemas "descendentes" de problemas onde a função tem maior valor (procurando obter um limite inferior tão elevado quanto possível).

Cálculo por Ramos (em profundidade):

Definida uma partição escolhe-se um dos sub problemas para resolver; se necessária nova partição escolhe-se um dos sub problemas descendentes para resolver e neste se há partição volta a escolher-se um dos descendentes para resolver ; repete-se o procedimento até não ser necessária nova partição momento em que, no mesmo ramo, se "regressa" ao nível imediatamente anterior onde há partição ainda não avaliada e se repete o procedimento.

6. Auto Teste nº 1

Considere-se o seguinte problema de PL:

$$\text{Max } f(X) = -x_1 + 4x_2$$

s.a.

$$-10x_1 + 20x_2 \le 22$$

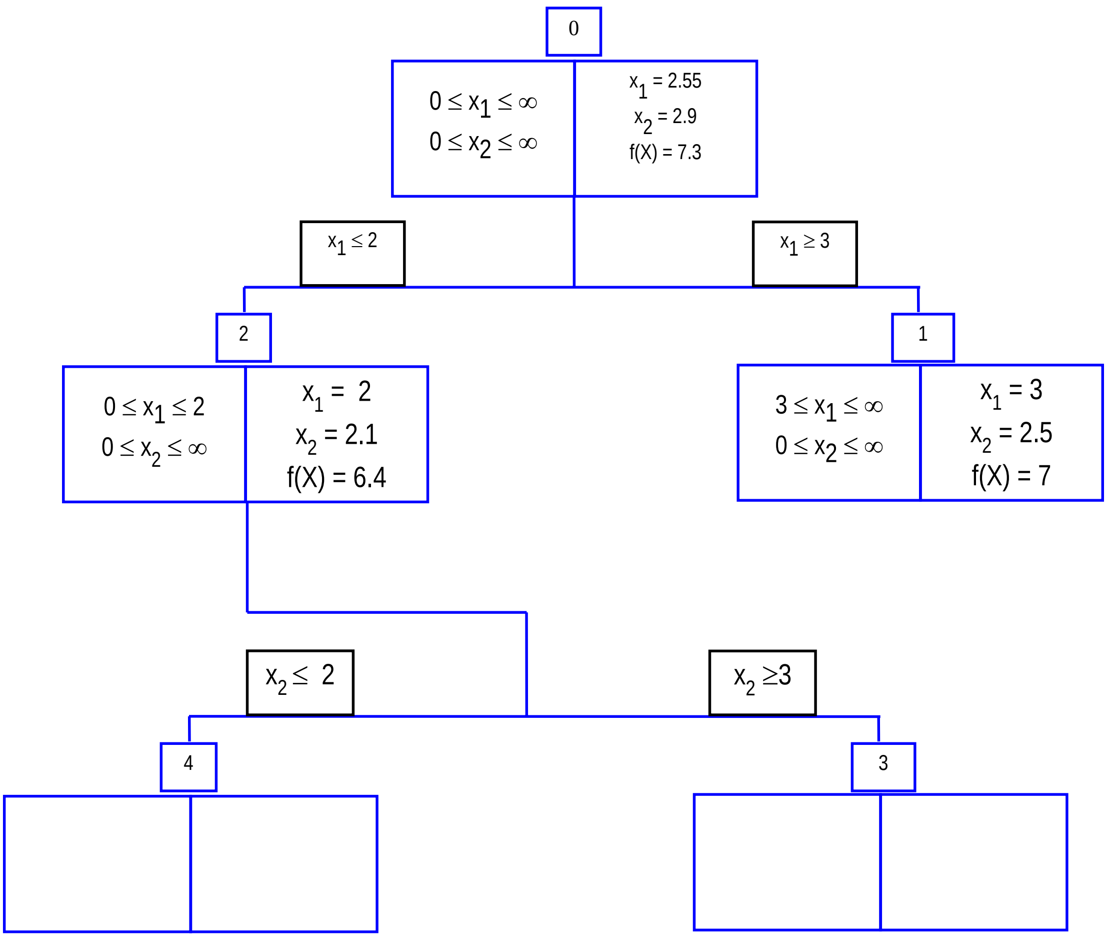
$$5x_1 + 10x_2 \le 40$$

$$x_1 \le 5$$

$$x_1 , x_2 \ge 0 \text{ e Int.}$$

a. Apresente, na forma canónica, o sub problema nº 4 (ver figura).

b. Calcule a solução dos sub problemas nºs 3 e 4 (ver figura).



7. Solução do auto teste nº 1

a. Sub problema nº 4 (forma canónica)

Max $f(X) = -x_1 + 4x_2$

s.a.

$-10x_1 + 20x_2 \leq 22$

$5x_1 + 10x_2 \leq 40$

$x_1 \leq 5$

$x_1 \leq 2$ (1ª restrição de partição)

$x_2 \leq 2$ (2ª restrição de partição)

$x_1 , x_2 \geq 0$ e Int.

b.

Sub problema 3 (considerar $x_2 = 3$ e calcular valor óptimo para x_1)

Resolver o sistema de restrições técnicas em ordem a x_1:

$$\begin{cases} -10x_1 + 20x_2 \leq 22 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -10x_1 + 20(3) \leq 22 \\ 5x_1 + 10(3) \leq 40 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq 3.8 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$$

Não há solução (intervalo admissível para x_1 é vazio)

Sub problema 4 (considerar $x_2 = 2$ e calcular valor óptimo para x_1)

Resolver o sistema de restrições técnicas em ordem a x_1:

$$\begin{cases} -10x_1 + 20x_2 \leq 22 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -10x_1 + 20(2) \leq 22 \\ 5x_1 + 10(2) \leq 40 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq 1.8 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$$

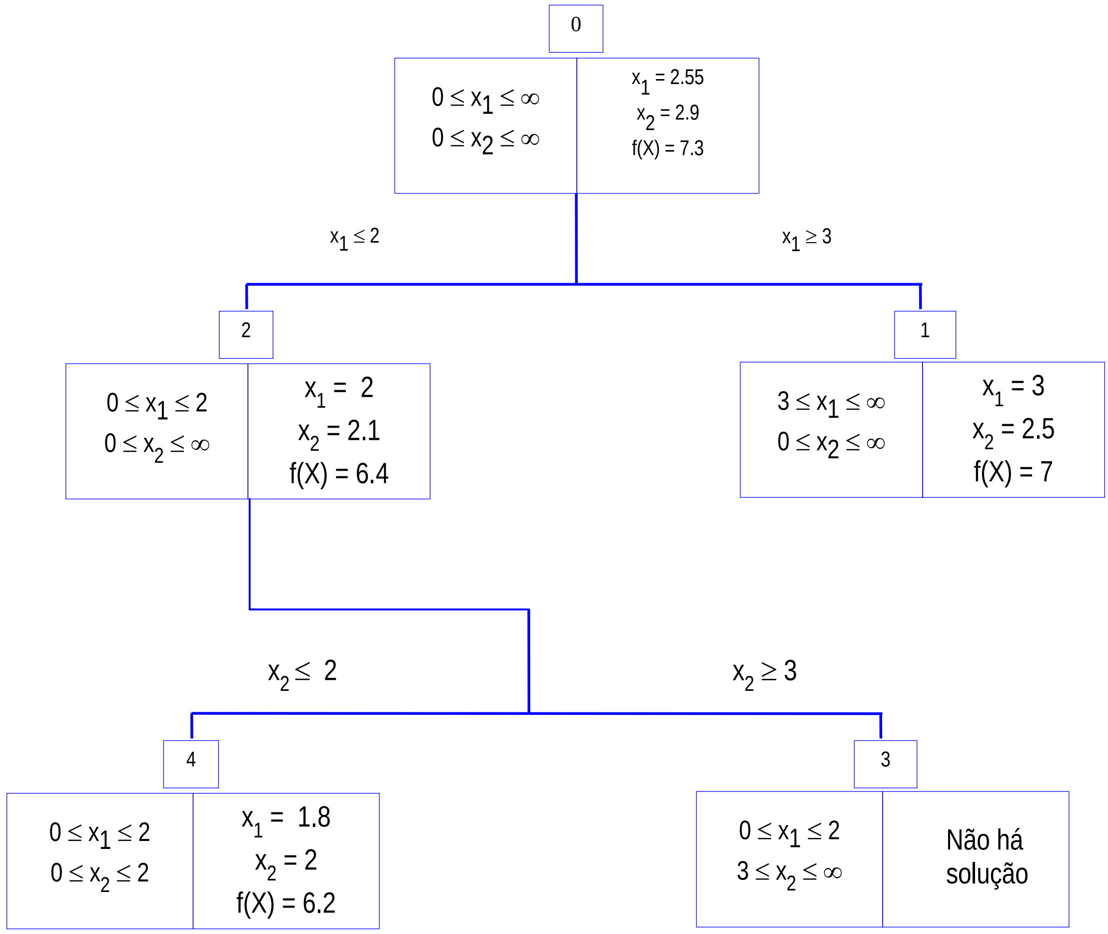
O valor de x_1 deve pertencer ao intervalo [1.8 , 2]. Porque pretendemos Maximizar f(X) onde a variável x_1 tem coeficiente negativo, o valor de x_1 deve ser o menor possível no intervalo indicado : $x_1 = 1.8$.

Para $x_1 = 1.8$ e $x_2 = 2$ tem-se $f(X) = 6.2$.

Nota sobre a solução para a variável x_1

Fixaram-se os extremos do intervalo de valores admissíveis e a escolha do extremo para valor da variável foi feita analisando o impacto na função objectivo. Neste caso de Maximização, se x_1 tem coeficiente negativo em f(X), quanto menor for o seu valor menos reduz o valor da função…

Actualizada a árvore de soluções (para os nós 3 e 4):



8. Exemplo de Minimização de um PLIP

Se o problema envolve a Minimização de uma função, há que estabelecer um LIMITE SUPERIOR para o valor da função. Assim qualquer problema com solução não admissível só é objecto de partição se apresenta valor de f(X) inferior ao LIMITE SUPERIOR CORRENTE (se há solução admissível com f(X) = k, a partição em solução contínua com f(X) > k não conduzirá a soluções com f(X) < k ...).

Consideremos o seguinte problema só com variáveis de decisão inteiras não negativas:

$$\text{Min } f(X) = 6x_1 + 8x_2$$

s.a.

$$6x_1 + 7x_2 \geq 84$$

$$2x_1 \geq 10$$

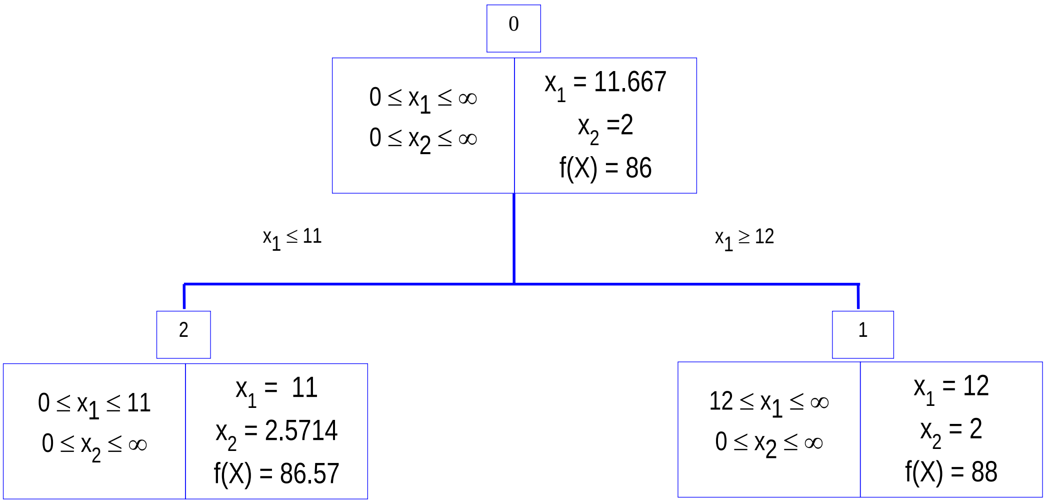
$$3x_2 \geq 6$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \text{ e Int.}$$

Relaxando a condição de integralidade e aplicando o método Simplex, a solução óptima é:

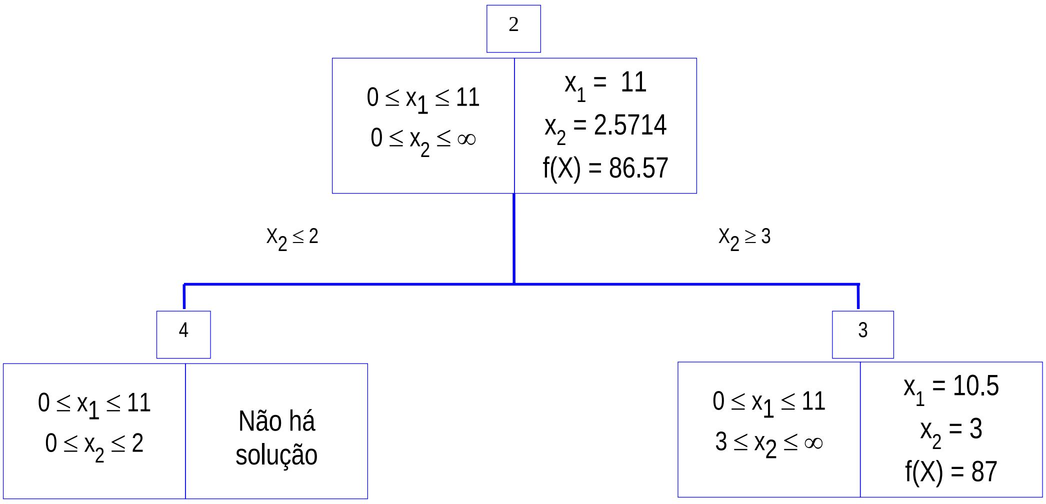
$$x_1 = {}^{35}/_3 \; ; \; x_2 = 2 \; ; \; \text{Max } f(X) = 86$$

Considere-se para Limite Superior Corrente : $+\infty$

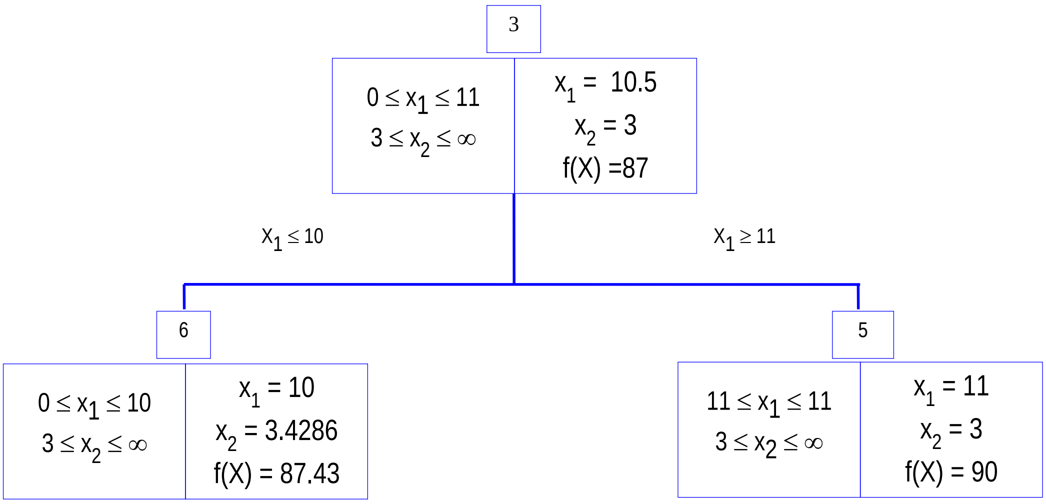


O sub problema nº 1 tem solução admissível com f(X) = 88 que passa a ser o Novo Limite Superior para "bound" (problemas com f(X) > 88 não serão objecto de partição).

O estudo prossegue no sub problema nº 2 efectuando a partição na variável x_2:



O sub problema 3 com f(X) = 87 inferior ao Limite Superior corrente (88) deve ser objecto de partição na variável x_1.

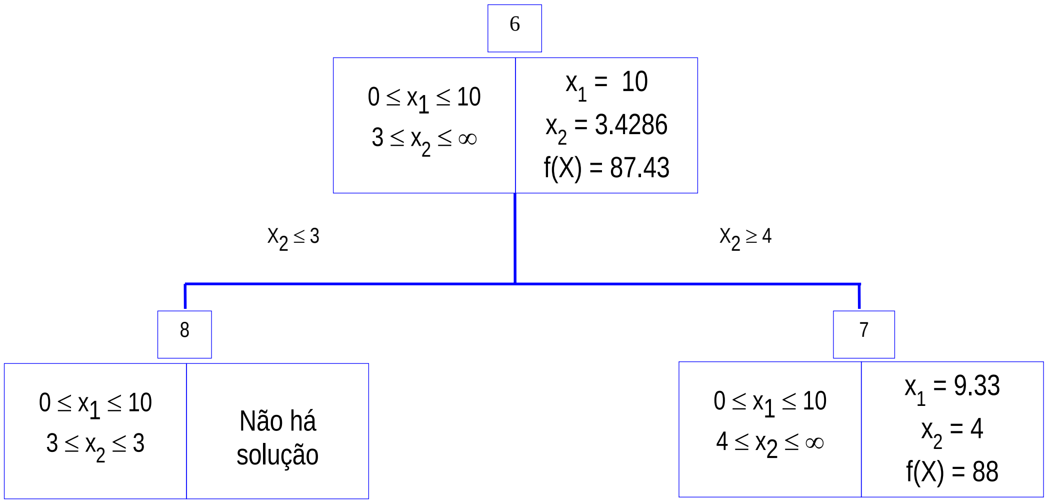


O sub problema 5 tem solução admissível, mas com valor de f(X) superior ao Limite Superior corrente (88). Não tem interesse.

O sub problema nº 6 tem f(X) = 87.43 que é inferior ao Limite Superior corrente. Se da sua partição resultar uma solução admissível esta terá, na melhor das hipóteses f(X) = 88 ou seja valor igual ao já disponível.

Poderíamos pois dar o cálculo por terminado (porque o estamos a efectuar por níveis…).

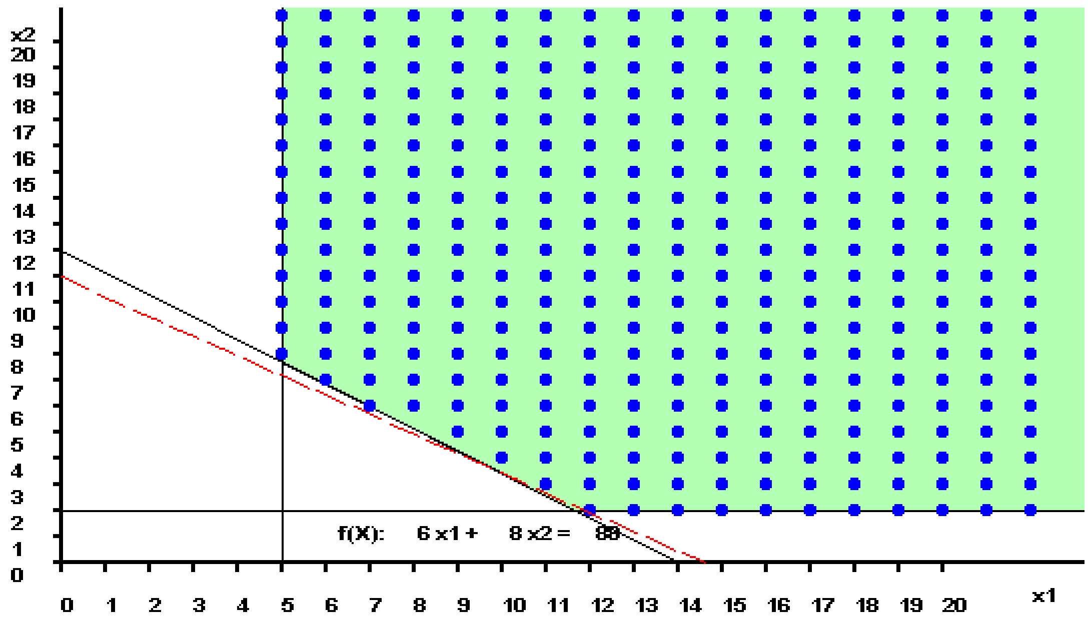
Vamos, apesar do que foi referido, efectuar no sub problema nº 6 a partição na variável x_2.



O sub problema 7 não tem solução admissível. Como f(X) é igual ao Limite Superior corrente não tem interesse efectuar partição pois o valor de f(X) aumentará.

A solução óptima é pois $x_1 = 12$; $x_2 = 2$; Minf (X) = 88.

A figura seguinte mostra o espaço de soluções e a localização do ponto óptimo.



9. Programação Linear Inteira Binária (PLIB) – Uso do método Branch and Bound

O modelo tem apenas variáveis do tipo $x_j = 0$ ou 1 o que sintetiza o seguinte conjunto de três restrições:

$x_j \geq 0$ (não negatividade)

$x_j \leq 1$ (limite superior)

x_j inteiro

Para obter a solução inicial apenas se "relaxa" a restrição de integralidade, ou seja, são consideradas as restrições de não negatividade e de limite superior.

Deste modo, na solução óptima "relaxada", a variável x_j terá valor do intervalo [0 , 1].

Se, por exemplo, temos $x_j = {}^2/_3$ e efectuarmos a sua partição teremos dois sub problemas (descendentes) em que um deles é aumentado com a restrição $x_j \leq 0$ e o outro com $x_j \geq 1$.

Dado que os dois sub problemas têm que satisfazer as restrições iniciais $x_j \geq 0$ e $x_j \leq 1$ é óbvio que a partição de uma variável binária é feita sempre aumentando um dos sub problemas com a restrição $x_j = 0$ e o outro dos sub problemas com $x_j = 1$.

10. Exemplo de Maximização de um PLIB

Considere-se o problema:

$$\text{Max } f(X) = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

s.a.

$$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 10$$

$$x_1 , x_2 , x_3 = 0 \text{ ou } 1$$

A solução inicial (raiz da árvore) é obtida usando o método Simplex no problema “relaxado”:

$$\text{Max } f(X) = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

s.a.

$$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 10$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 1$$

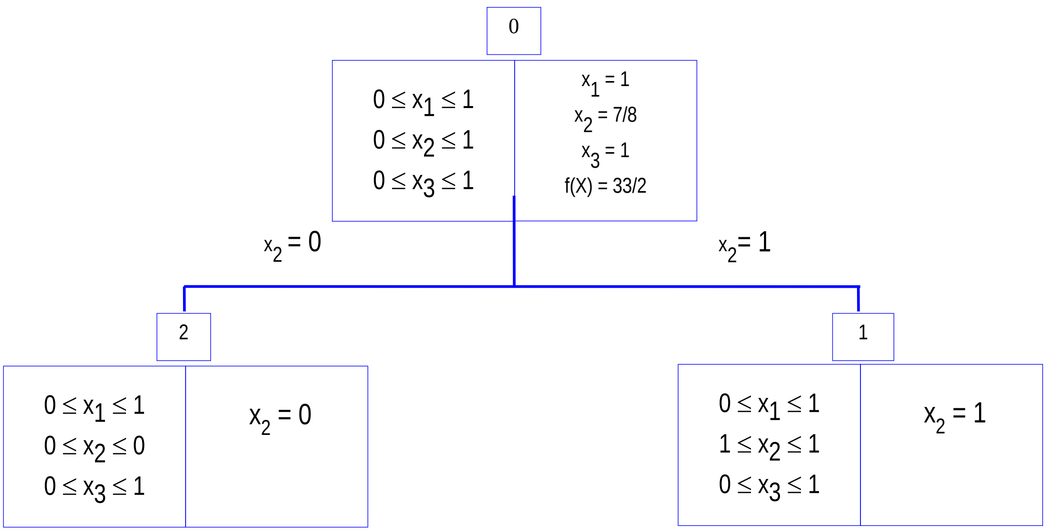
$$x_3 \leq 1$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

A solução óptima é: $x_1 = 1$; $x_2 = {}^{7}/_{8}$; $x_3 = 1$; $f(X) = {}^{33}/_{2}$.

A solução não é admissível e a partição é feita na variável x_2.

O modelo é aumentado com a restrição $x_2 = 0$ para um sub problema e com a restrição $x_2 = 1$ para o outro sub problema:



Sub problema 1 com $x_2 = 1$

$$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 10 \Rightarrow 3x_1 + 3.5x_3 \leq 6$$

As variáveis x_1 e x_3 não podem ser ambas igual a 1 (1º membro seria 6.5).

Em f(X), a variável x_1 tem coeficiente 8 enquanto a variável x_3 tem coeficiente 5 pelo que $x_1 = 1$ é mais favorável para o valor de f(X).

Considerando pois $x_1 = 1$ temos:

$3x_1 + 3.5x_3 \leq 6 \Rightarrow 3.5x_3 \leq 3 \Rightarrow x_3 \leq {}^{6}/_{7}$

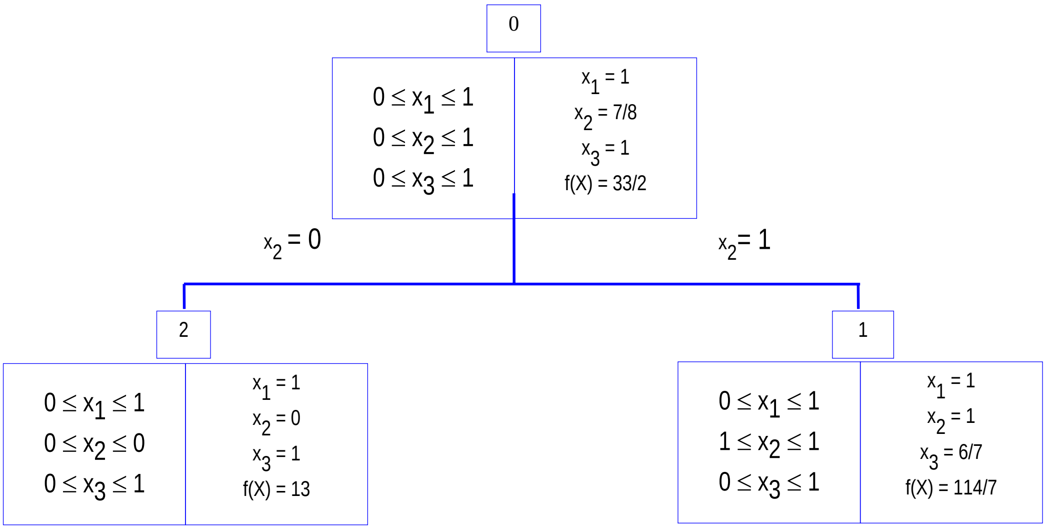
A solução do sub problema 1 é então : $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = {}^{6}/_{7}$; $f(X) = {}^{114}/_{7}$

Sub problema 2 com $x_2 = 0$

$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 10 \Rightarrow 3x_1 + 3.5x_3 \leq 10$

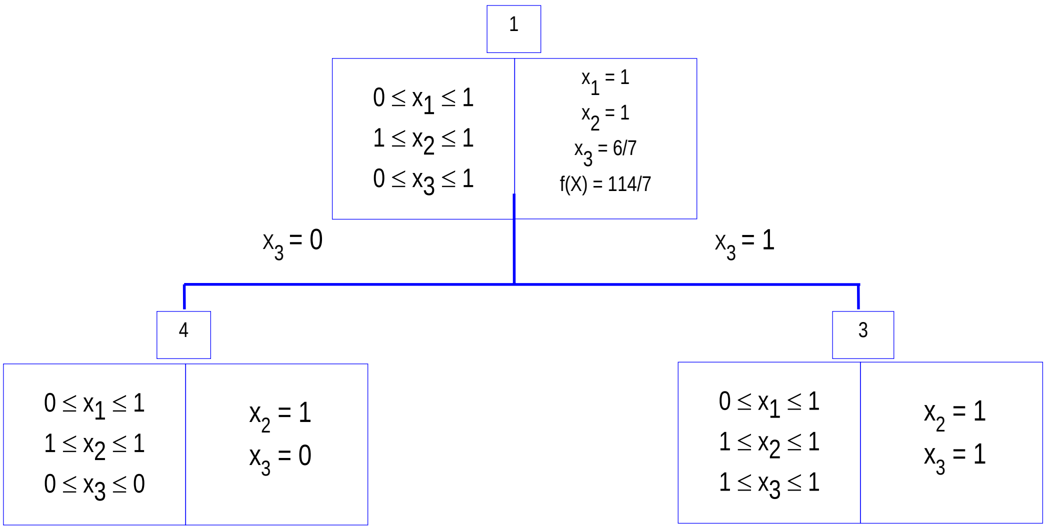
As variáveis x_1 e x_3 podem ser ambas igual a 1 (1º membro seria 6.5).

A solução do sub problema 2 é então : $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; f(X) = 13



A solução nº 2 é admissível pelo que f(X) = 13 é, agora, Limite Inferior.

A solução nº 1 não é admissível mas como $f(X) = {}^{114}/_{7}$ é superior ao limite inferior corrente vai ser objecto de partição na variável x_3:



Sub problema 3 com $x_3 = 1$ (e $x_2 = 1$)

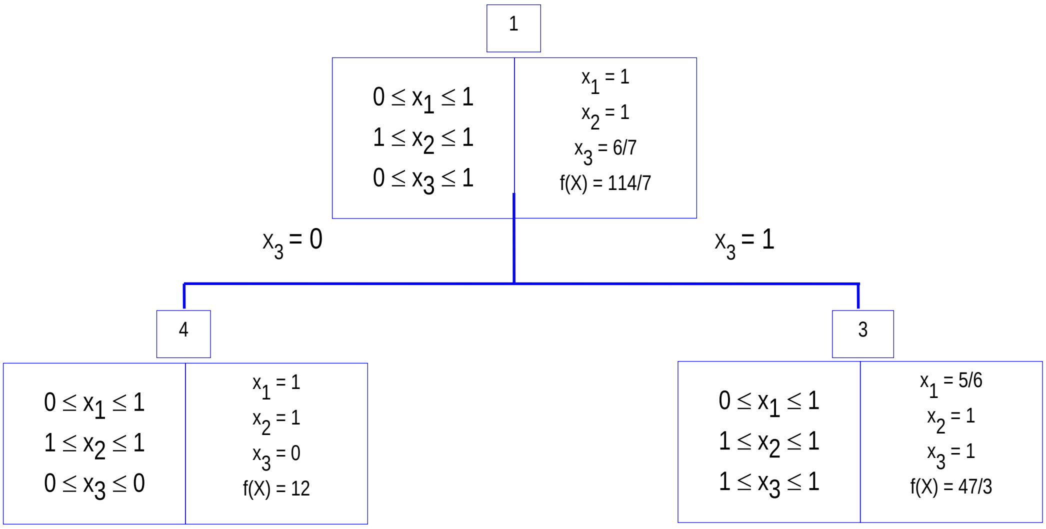
$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 10 \Rightarrow 3x_1 \leq 2.5 \Rightarrow x_1 \leq {}^5/_6$

A solução do sub problema 3 é então : $x_1 = {}^5/_6$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$; $f(X) = {}^{47}/_3$

Sub problema 4 com $x_3 = 0$ (e $x_2 = 1$)

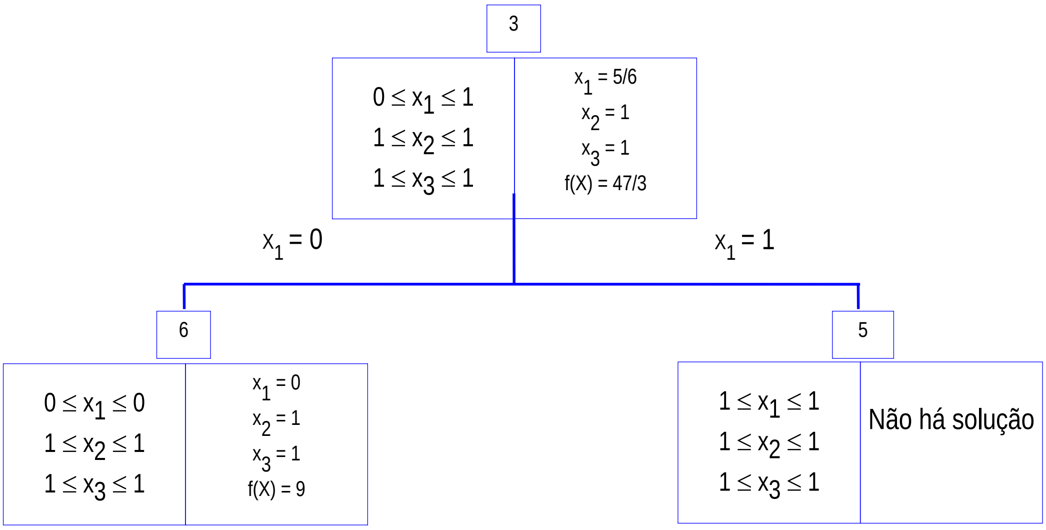
$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 10 \Rightarrow 3x_1 \leq 6 \Rightarrow x_1 \leq 2$ (implica $x_1 = 1$ porque é variável binária)

A solução do sub problema 4 é então : $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$; $f(X) = 12$



A solução nº 4 é admissível com $f(X) = 12$ (não interessa pois $f(X)$ é inferior ao Limite Inferior corrente)

A solução nº 3 não é admissível mas como $f(X) = {}^{47}/_3$ é superior ao Limite Inferior corrente vai ser objecto de partição na variável x_1 obtendo-se as soluções:



Sub problema 5 com $x_1 = 1$:

Face ao domínio corrente das variáveis (todas com valor 1) a restrição $3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 10$ é violada.

Sub problema 6 com $x_1 = 0$:

Face ao domínio corrente das variáveis a solução admissível é $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$; $f(X) = 9$.

Não havendo mais sub problemas para analisar a solução óptima é a solução nº 2 que está associada ao Limite Inferior corrente:

$x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; Max $f(X) = 13$

11. Programação Linear Inteira Mista (PLIM) – Uso do método Branch and Bound

Para resolver problemas com variáveis contínuas e inteiras (e também binárias) utiliza-se o método B&B tal como vem sendo apresentado (tenha-se em consideração que a variável contínua nunca é objecto de partição).

12. Exemplo de Maximização de um PLIM

Considere-se o problema:

$$\text{Max } f(X) = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

s.a.

$$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 20$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_1 = 0 \text{ ou } 1$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0 \text{ e Int.}$$

A solução inicial (raiz da árvore) é obtida usando o método Simplex no problema:

$$\text{Max } f(X) = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

s.a.

$$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 20$$

$$x_2 \leq 10$$

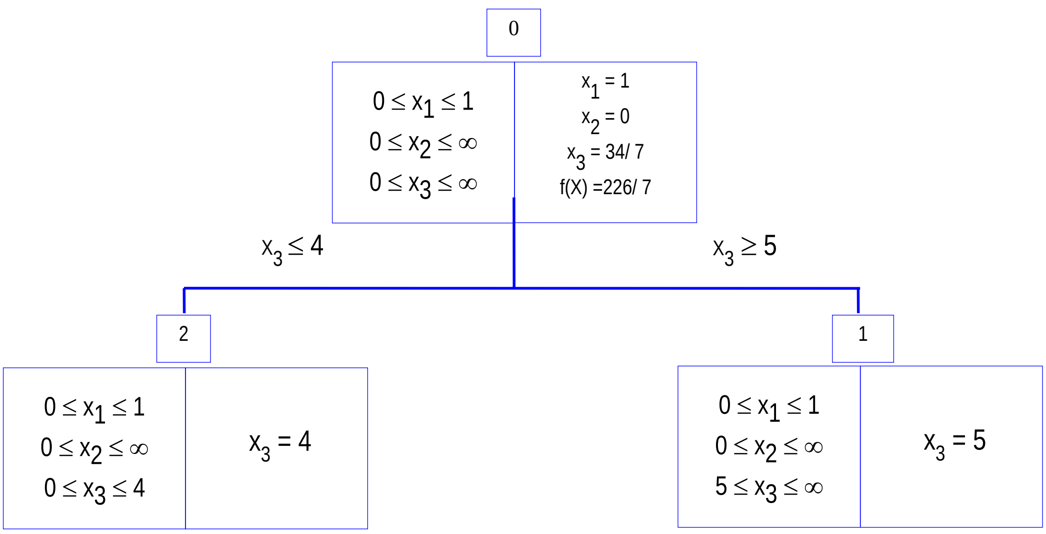
$$x_1 \leq 1$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

A solução óptima é: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = {}^{34}/_{7}$; $f(X) = {}^{226}/_{7}$.

A solução não é admissível e a partição é feita na variável inteira x_3.

O modelo é aumentado com a restrição $x_3 \leq 4$ para um sub problema e com a restrição $x_3 \geq 5$ para o outro sub problema:



Sub problema 2 com $x_3 = 4$

$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 20 \Rightarrow 3x_1 + 4x_2 \leq 6$

Notando que x_2 é uma variável contínua vemos que a variável binária x_1 pode ter valor 1 pelo que fica:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6 \Rightarrow 4x_2 \leq 3 \Rightarrow x_2 \leq {}^3/_4$$

A solução do sub problema 1 é então : $x_1 = 1$; $x_2 = {}^3/_4$; $x_3 = 4$; $f(X) = 31$

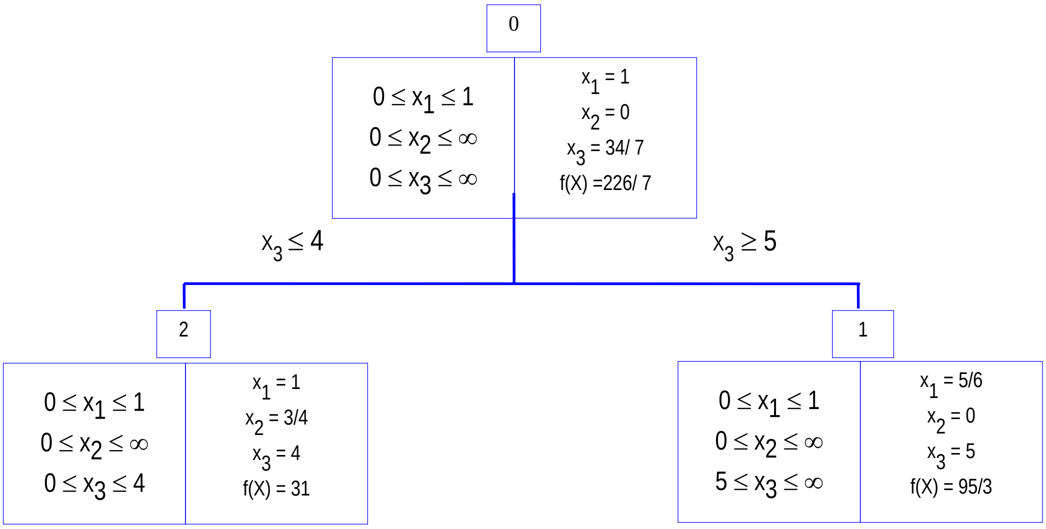
Sub problema 2 com $x_3 = 5$

$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 20 \Rightarrow 3x_1 + 4x_2 \leq 2.5$

Notando que x_2 é uma variável contínua vemos que a variável binária x_1 pode ter valor máximo:

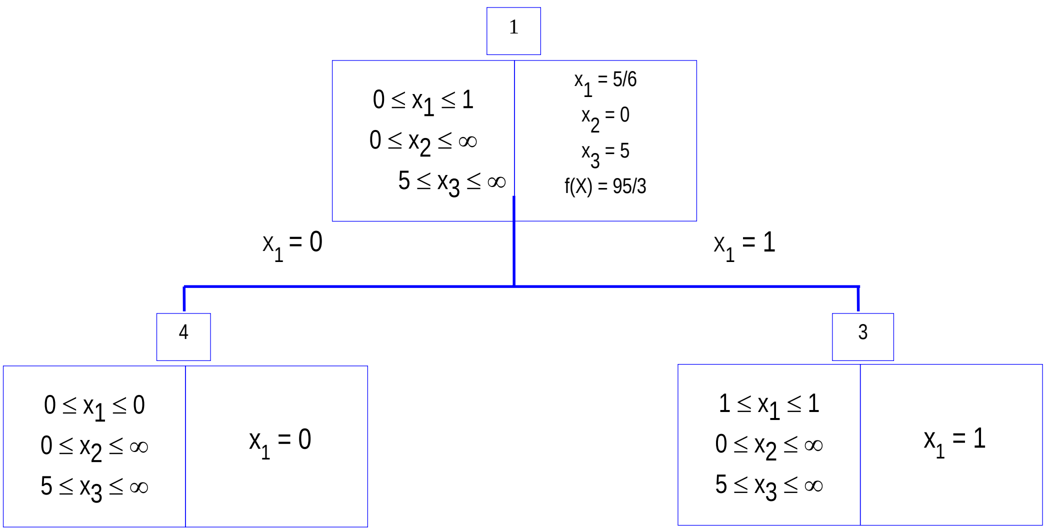
$$3x_1 \leq 2.5 \Rightarrow x_1 \leq {}^5/_6$$

A solução do sub problema 2 é então : $x_1 = {}^5/_6$; $x_2 = 0$; $x_3 = 5$; $f(X) = {}^{95}/_3$



A solução nº 2 é admissível pelo que $f(X) = 31$ é, agora, Limite Inferior.

A solução nº 1 não é admissível mas como $f(X) = {}^{95}/_3$ é superior ao Limite Inferior corrente vai ser objecto de partição na variável binária x_1 (notar que a partição só é efectuada em variáveis inteiras):



Sub problema 3 com $x_1 = 1$

$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 20 \Rightarrow 4x_2 + 3.5x_3 \leq 17$

O limite inferior de x_3 é 5 o que torna impossível satisfazer esta restrição. Este sub problema não tem solução.

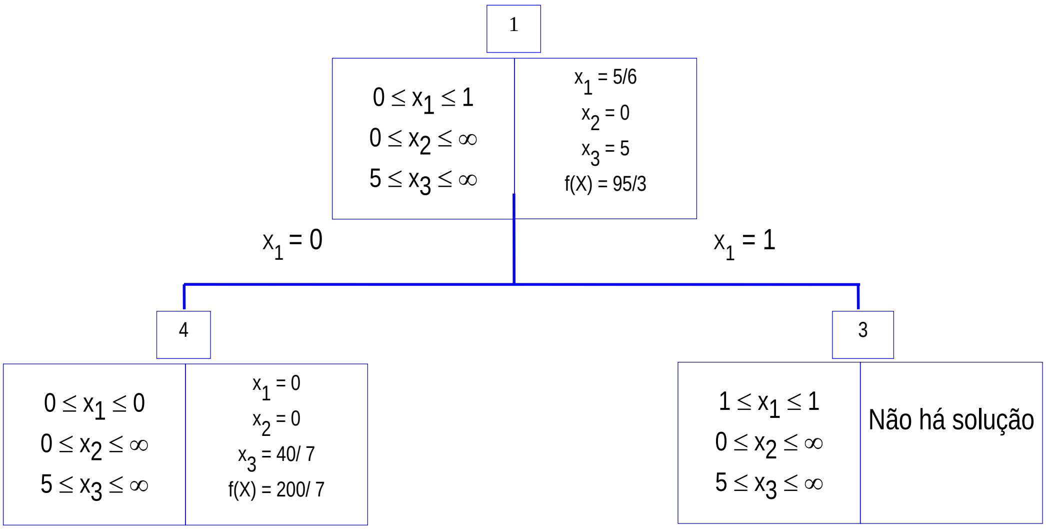
Sub problema 4 com $x_1 = 0$

$3x_1 + 4x_2 + 3.5x_3 \leq 20 \Rightarrow 4x_2 + 3.5x_3 \leq 20$

Notando que x_2 é uma variável contínua a variável inteira x_3 pode ter valor máximo:

$3.5x_3 \leq 20 \Rightarrow x_3 \leq {}^{40}/_{7}$ (admissível porque é maior do que o limite inferior 5)

A solução do sub problema 4 é então : $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = {}^{40}/_{7}$; $f(X) = {}^{200}/_{7}$



A solução do sub problema nº 4 não é admissível mas como $f(X) = {}^{200}/_{7}$ é inferior ao Limite Inferior corrente não é objecto de partição.

Não há mais sub problemas para analisar.

A solução óptima está associada ao Limite Inferior corrente (solução nº 2):

$x_1 = 1$; $x_2 = {}^{3}/_{4}$; $x_3 = 4$; Max $f(X) = 31$