XI. PÓS-OPTIMIZAÇÃO

O recurso a modelos de PL, para quantificar informação necessária ao processo de decisão, é hoje de uso generalizado mas carece de ponderação que evite a "tentação" de considerar tal informação como definitiva.

Qualquer modelo matemático encerra sempre simplificações e imprecisões e mesmo quando "ajustado" à situação real que busca representar, há que ter em conta que esta não sendo estática obriga à revisão e adaptação do modelo com maior ou menor frequência.

A construção do modelo recorre a parâmetros (coeficientes técnicos, disponibilidade de recursos e coeficientes da função objectivo) cuja exactidão não é fácil garantir apesar do progresso alcançado em métodos quantitativos. Por outro lado, as previsões que constituem pressupostos na construção do modelo mais ou menos rapidamente carecem de revisão.

Resulta assim que a dinâmica dos processos reais obriga a considerar a solução óptima de um modelo de PL como o fulcro onde deve assentar a análise de modalidades de acção (modos diferentes de cumprir uma missão) para delas retirar as potencialidades e vulnerabilidades associadas. Para tal fixam-se "cenários" no ambiente dos quais se estuda o comportamento do modelo e em particular da solução óptima disponível. Este "jogo", porque permite obter uma visão alargada do problema, "facilita" a decisão, permite decidir de forma consistente e fornece ao decisor flexibilidade (capacidade de rapidamente adaptar os meios a situações inesperadas) porque dispõe de conhecimento.

O estudo das consequências na solução óptima de *alterações discretas nos parâmetros do modelo* (coeficientes técnicos, segundos membros, coeficientes da função objectivo, introdução de novas restrições ou variáveis decisionais) denomina-se *Pós-Optimização.*

Sem perda de generalização, neste capítulo, considera-se para estudo o seguinte modelo de PL :

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max } f(x_1 , x_2 , \dots , x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n & \\
\text{s.a.} \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1 & \\
\qquad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \le b_2 & \\
\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\qquad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m & \\
\qquad x_1 , x_2 , \dots , x_n \ge 0 &
\end{array}
$$

ou na forma matricial :

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } f(X) = CX \\
\text{s.a.} \\
\quad AX \le B \\
\quad B \ge 0 \\
\quad X \ge 0
\end{array}
$$

Considere-se o seguinte modelo de PL (produção de “A” e “B” em quantidades x_1 e x_2, respectivamente):

$$\text{Max } f(X) = 6x_1 + 8x_2 \quad \text{(função de lucro)}$$

$$\begin{array}{lcccccl} \text{sujeito a:} & 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 & \text{(metros de madeira)} \\ & 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 & \text{(horas de trabalho)} \\ & & & x_1 , x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

O quadro óptimo é o seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

Um dos aspectos essenciais na programação linear é saber "como" se altera esta solução óptima se sujeitarmos o modelo a alterações (isoladamente consideradas) do tipo seguinte:

- considerar a disponibilidade de mão de obra aumentada para 160 horas;
- considerar o coeficiente de lucro unitário de A igual a 3 u.m.;
- considerar que melhorando a produtividade se reduz para 7 horas o tempo necessário à produção de uma unidade de B;
- considerar a produção adicional do bem C com consumos de 40 metros de madeira e 12 horas de trabalho , por unidade, com lucro de 12 u.m. ;
- considerar a produção de B no mínimo igual a 5 vezes o número de unidade produzidas de A;

Estas alterações *discretas* de parâmetros do modelo de PL e as suas consequências resumem-se no quadro seguinte:

	Modificação no problema Primal	Consequências Possíveis
1.	Segundos membros (recursos)	Afectar a Admissiblidade do Primal
2.	Coeficientes da F. objectivo	Afectar a Regra de Paragem do Primal
3.	Coeficientes técnicos	Afectar a Admissiblidade / Regra de Paragem do Primal
4.	Novas Variáveis de Decisão	Afectar a Admissiblidade / Regra de Paragem do Primal
5.	Novas Restrições técnicas	Afectar a Admissiblidade / Regra de Paragem do Primal

Poder-se-ia actuar directa e casuisticamente aplicando o método do Simplex ao modelo alterado mas tal conduziria ao aumento significativo do tempo necessário à obtenção de conclusões nomeadamente se o modelo envolve número apreciável de variáveis e restrições. Por isso, na prática, recorre-se à versão matricial do método Simplex (ver capítulo VI), às relações Primal-Dual (ver capítulo VII) e ao método Dual-Simplex (ver capítulo VIII).

Vejamos seguidamente como actuar em cada uma das situações tipificadas.

1. Alteração discreta dos segundos membros das restrições

Atendendo a que a versão matricial do quadro Simplex é:

VB	X_a^T	X_i^T	VSM
Base	$A_m^{-1}A$	A_m^{-1}	$A_m^{-1}B$
f(X)	$C_mA_m^{-1}A - C_a$	$C_mA_m^{-1}$	$C_mA_m^{-1}B$

A alteração discreta de um ou mais dos segundos membros das restrições técnicas (matriz "B") altera os produtos matriciais $A_m^{-1}B$ e $C_mA_m^{-1}B$ pelo que a nova solução pode não ser admissível.

a. Pós Optimização : Disponibilidade de madeira aumentada para 420 metros

A alteração da matriz de recursos "B", obriga a actualizar as matrizes $A_m^{-1}B$ e $C_mA_m^{-1}B$ no quadro-óptimo corrente:

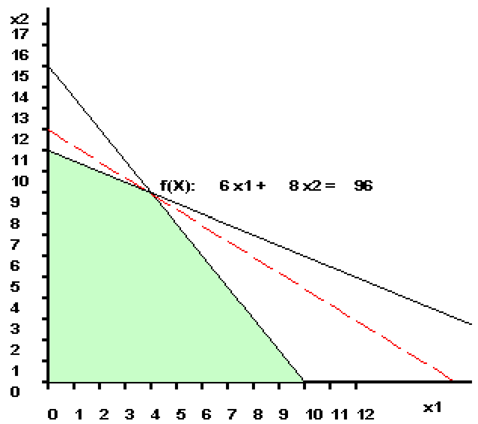
- nova matriz $B = \begin{bmatrix} 420 \\ 110 \end{bmatrix}$
- nova matriz (solução) $A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 420 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$
- novo valor da função f(X) = $C_mA_m^{-1}B$ = 108 u.m.

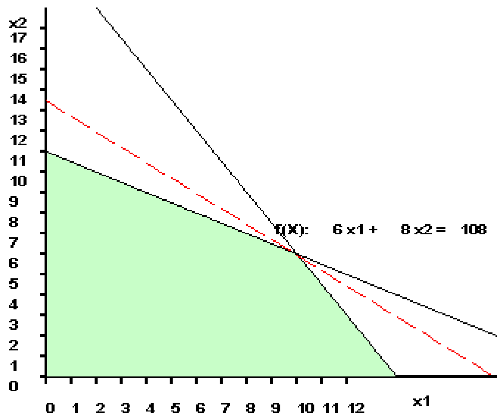
Novo quadro Simplex:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	10
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	6
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	108

A solução é admissível pelo que a estrutura da base óptima não sofre alteração (x_1 e x_2 mantêm-se VB).

Há novo programa de produção: 10 unidades de A; 6 unidades de B; lucro máximo de 108 u.m. (ver figura).





b. Pós Optimização : Disponibilidade de Horas de trabalho aumentada para 160 horas

- nova matriz $B = \begin{bmatrix} 300 \\ 160 \end{bmatrix}$

- nova matriz (solução) $A_m^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{33}{2} \end{bmatrix}$

- novo valor da função f(X) = $C_m A_m^{-1} B$ = 126 u.m.

Novo quadro Simplex:

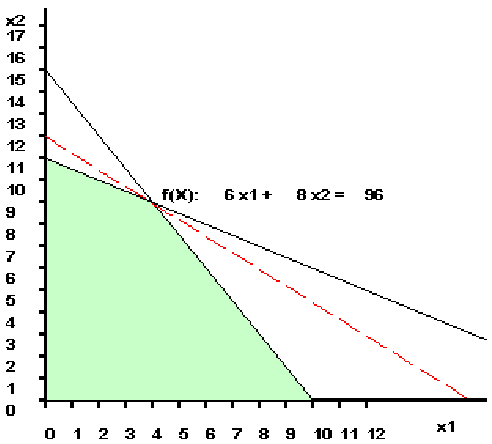
VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	-1
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	$^{33}/_2$
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	126

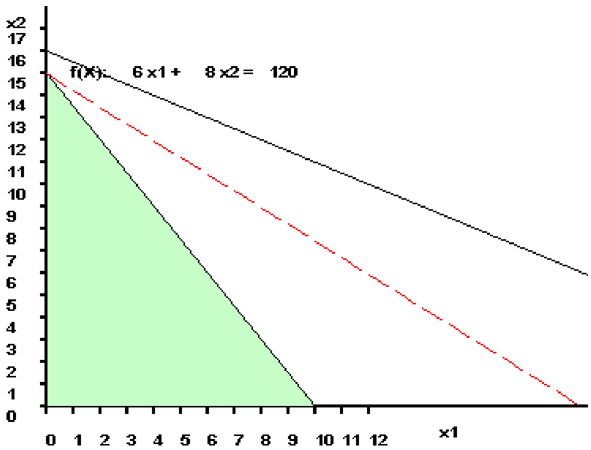
A solução do Primal não é admissível (SBNAP). A solução Dual é admissível (SBAD).

Aplicando o método Dual-Simplex (sai x_1 ; entra F_2) obtém-se a solução óptima com base diferente:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_2	-10	0	$^{-1}/_2$	1	10
x_2	$^3/_2$	1	$^1/_{20}$	0	15
f(X)	6	0	$^2/_5$	0	120

Há novo plano de produção: 15 unidades de B; lucro máximo de 120 u.m. (ver figura).





A modificação do 2º membro da restrição de mão de obra *alterou o convexo de soluções*.

O ponto óptimo passou a ter as coordenadas (0,15) . Atendendo a que este ponto não pertence à recta $5x_1 + 10\,x_2 = 160$ esta restrição não está saturada pelo que $F_2 = 10$ horas.

2. Alteração discreta dos coeficientes da função-objectivo

Atendendo a que a versão matricial do quadro Simplex é:

VB	X_a^T	X_i^T	VSM
Base	$A_m^{-1}A$	A_m^{-1}	$A_m^{-1}B$
f(X)	$C_mA_m^{-1}A - C_a$	$C_mA_m^{-1}$	$C_mA_m^{-1}B$

A alteração discreta de um ou mais coeficientes da função objectivo (matriz "C_a") altera o produto matricial $C_mA_m^{-1}A - C_a$. Se a alteração é feita em coeficiente(s) de Variáveis básicas é também alterado o produto matricial $C_mA_m^{-1} - C_i$.

Quer num caso quer noutro a regra de paragem pode ser violada e a solução deixa de ser óptima.

a. Pós Optimização : Lucro unitário da venda do produto "A" alterado de 6 u.m. para 5 u.m.

A alteração do coeficiente de x_1 na função objectivo modifica a matriz "C_a".

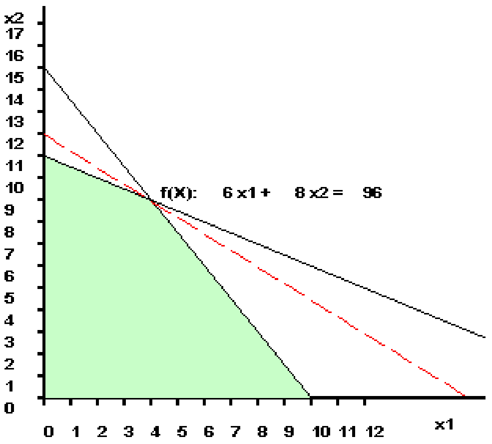
Dado que x_1 é VB no óptimo, também se altera a matriz C_m , pelo que é necessário actualizar no quadro óptimo corrente as matrizes associadas.

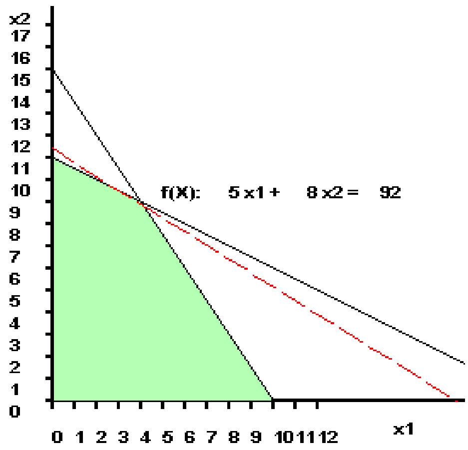
- nova matriz $C_a = [c_1 \quad c_2] = [5 \quad 8]$
- nova matriz $C_m = [c_1 \quad c_2] = [5 \quad 8]$ (notar que x_1 é VB no óptimo corrente)
- nova matriz $C_mA_m^{-1}A - C_a = [0 \quad 0]$ que não sofre alteração
- nova matriz $C_mA_m^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$
- novo valor da função f(X) = $C_mA_m^{-1}B$ = 92 u.m.

Novo quadro Simplex:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$1/20$	$-1/10$	4
x_2	0	1	$-1/40$	$3/20$	9
f(X)	0	0	$1/20$	$7/10$	92

A modificação introduzida *não alterou* a solução óptima corrente do problema Primal (excepto o novo valor máximo da função).





Notar que o espaço de soluções se manteve. A rotação do gradiente de f(X) (no sentido contrário do movimento dos ponteiros do relógio) não foi suficiente para alterar a posição do ponto óptimo.

b. Pós Optimização : Lucro unitário da venda do produto “A” alterado de 6 u.m. para 3 u.m.

A alteração do coeficiente de x_1 na função objectivo modifica a matriz "C_a " .

Dado que x_1 é VB no óptimo, também se altera a matriz C_m , pelo que é necessário actualizar no quadro óptimo corrente as matrizes associadas a estas.

- nova matriz $C_a = [c_1 \quad c_2] = [3 \quad 8]$
- nova matriz $C_m = [c_1 \quad c_2] = [3 \quad 8]$ (notar que x_1 é VB no óptimo corrente)
- nova matriz $C_m A_m^{-1} A - C_a = [0 \quad 0]$ que não sofre alteração
- nova matriz $C_m A_m^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{20} & \dfrac{9}{10} \end{bmatrix}$
- novo valor da função f (X) = $C_m A_m^{-1} B$ = 84 u.m.

Novo quadro Simplex:

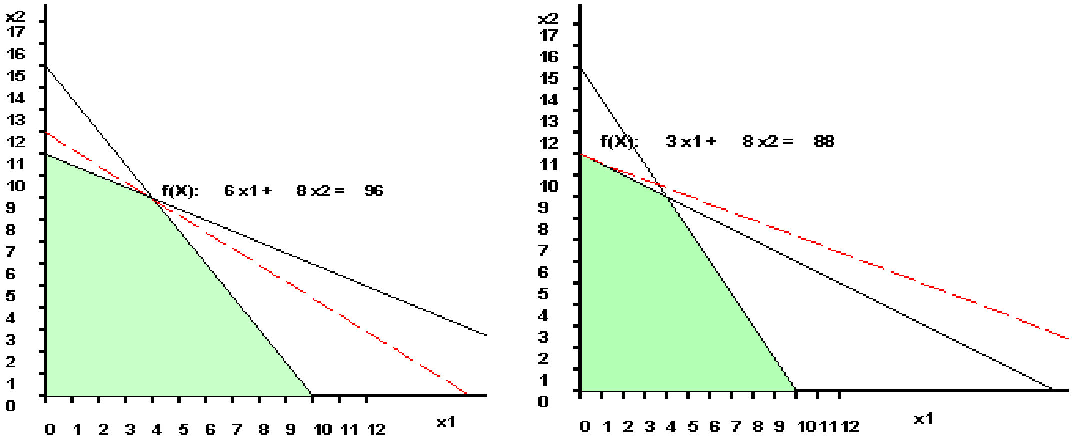
VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^{-1}/_{20}$	$^9/_{10}$	84

Esta solução é admissível **mas não satisfaz a regra de paragem** (é uma solução básica não admissível do Dual).

Aplicando o método Primal-Simplex (entra F_1 ; sai x_1) obtém-se a solução óptima com base diferente:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	20	0	1	-2	80
x_2	$^1/_2$	1	0	$^1/_{10}$	11
f(X)	1	0	0	$^4/_5$	88

Há novo plano de produção: 15 unidades de B; lucro máximo de 88 u.m. (ver figura).



Notar que o espaço de soluções se manteve. A rotação do gradiente de f(X) (no sentido contrário do movimento dos ponteiros do relógio) foi suficiente para alterar a posição do ponto óptimo.

3. Alteração discreta de coeficientes técnicos das Variáveis de decisão

A alteração discreta de um ou mais dos coeficientes técnicos das variáveis de decisão (matriz tecnológica "A") modifica os produtos matriciais $A_m^{-1}A$ e $C_mA_m^{-1}A-C_a$.

Se a alteração é feita em coeficiente(s) de Variáveis básicas, altera-se ainda A_m e o produto matricial $C_mA_m^{-1}-C_i$.

Destas alterações pode resultar a violação da regra de paragem e/ou da admissibilidade da solução situações em que é necessário reoptimizar.

a. Pós Optimização : Alterar o consumo de horas por unidade de "B" de 10 h para 7 h

A alteração do coeficiente de x_2 na 2ª restrição modifica a matriz tecnológica "A".

Dado que x_2 é VB no óptimo, também se altera a matriz A_m pelo que é necessário actualizar no quadro óptimo corrente todos os produtos matriciais associados a "A" e "A_m".

- nova matriz $A=\begin{bmatrix}30 & 20\\ 5 & 7\end{bmatrix}$
- nova matriz $A_m=\begin{bmatrix}30 & 20\\ 5 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow A_m^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{7}{110} & -\frac{2}{11}\\ -\frac{1}{22} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}$
- nova matriz $A_m^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (não se altera)
- nova matriz $A_m^{-1}B=\begin{bmatrix}-\frac{10}{11}\\ \frac{180}{11}\end{bmatrix}$
- nova matriz $C_mA_m^{-1}A-C_a=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$ (não se altera)
- nova matriz $C_mA_m^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{55} & \frac{12}{11}\end{bmatrix}$
- novo valor da função f (X) = $C_mA_m^{-1}B=\frac{1380}{11}$ u.m.

Novo quadro Simplex:

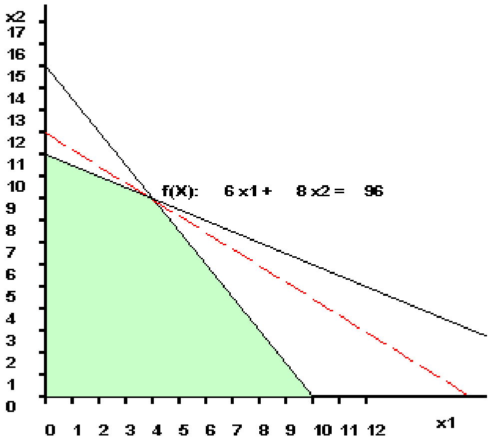
VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^{7}/_{110}$	$^{-2}/_{11}$	$^{-10}/_{11}$
x_2	0	1	$^{-1}/_{22}$	$^{3}/_{11}$	$^{180}/_{11}$
f(X)	0	0	$^{1}/_{55}$	$^{12}/_{11}$	$^{1380}/_{11}$

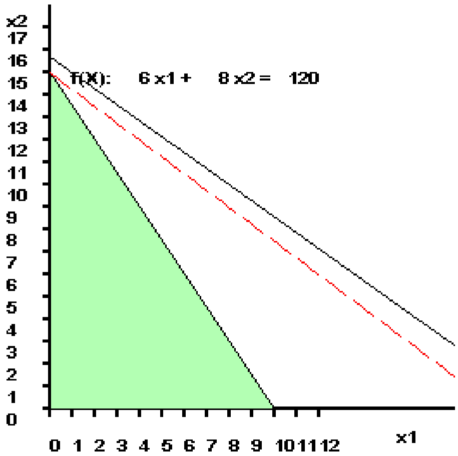
A solução não é admissível (x_1 < 0) mas satisfaz a regra de paragem (SBNAP e SBAD).

Aplicando o método Dual-Simplex (sai x_1 ; entra F_2) obtém-se a solução óptima com base diferente:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_2	$^{-11}/_{2}$	0	$^{-7}/_{20}$	1	5
x_2	$^{3}/_{2}$	1	$^{1}/_{20}$	0	15
f(X)	6	0	$^{2}/_{5}$	0	120

Há novo plano de produção: 15 unidades de B; lucro máximo de 120 u.m. (ver figura).





Notar a alteração do espaço de soluções e a localização do novo ponto óptimo.

4. Introdução de novas variáveis de Decisão

A introdução de novas Variáveis de decisão modifica as matrizes "A" e "C_a" com impacto nos produtos matriciais $A_m^{-1}A$ e $C_m A_m^{-1} A - C_a$.

A regra de paragem pode ser violada e a solução deixa de ser óptima.

A cada uma das novas Variáveis de Decisão está associada uma nova restrição técnica do problema Dual.

- Se a solução corrente do Dual satisfizer estas novas restrições conclui-se que são redundantes (não há alteração do plano óptimo corrente)
- Se a solução corrente do Dual não satisfizer estas novas restrições há que alterar o quadro Simplex corrente e reoptimizar aplicando o método Primal-Simplex

a. Pós Optimização : Considerar a produção de novo bem "C"

A produção unitária de "C" necessita de 40 metros de madeira e 12 horas de trabalho sendo vendida com lucro de 12 u.m.

O modelo original é <u>modificado para</u>:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2 + 12x_3$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcrcl} 30x_1 & + & 20x_2 & + & 40x_3 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & + & 12x_3 & \leq & 110 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Na solução óptima corrente os valores óptimos das variáveis Duais são $y_1 = \frac{1}{10}; y_2 = \frac{3}{5}$.

Teste da nova restrição do problema Dual:

$40y_1 + 12y_2 \geq 12 \Rightarrow 40(\frac{1}{10}) + 12(\frac{3}{5}) \geq 12$ Falso. Não satisfeita. Necessário reoptimizar.

Podemos calcular de imediato o valor da anti economia associada à produção de "C" recorrendo à restrição Dual na forma-padrão:

$40y_1 + 12y_2 - y_5 = 12$

O valor de $y_5 = -\frac{4}{5}$ pertence à *nova matriz* $C_m A_m^{-1} A - C_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ onde se conclui que a regra de paragem não é observada.

Para reorganizar o quadro Simplex corrente calcula-se matricialmente o vector da nova variável x_3 :

- Novo vector: $A_m^{-1} P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{40} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

Novo quadro Simplex:

VB	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^4/_5$	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^4/_5$	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^{-4}/_5$	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

Esta solução é admissível **mas não satisfaz a regra de paragem** (é uma solução básica não admissível do Dual).

Aplicando o método Primal-Simplex (entra x_3 ; sai x_1) obtém-se a solução óptima com <u>base diferente</u>:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	VSM
x_3	$^5/_4$	0	1	$^1/_{16}$	$^{-1}/_8$	5
x_2	-1	1	0	$^{-3}/_{40}$	$^1/_4$	5
f(X)	1	0	0	$^3/_{20}$	$^1/_2$	100

Alterou-se o espaço de soluções (é agora tridimensional) e a localização do novo ponto óptimo.

Há novo plano de produção: 5 unidades de B; 5 unidades de C ; lucro máximo de 100 u.m.

5. Introdução de novas Restrições Técnicas

A introdução de novas Restrições técnicas altera as matrizes "A" e "B" com impacto nos produtos matriciais $A_m^{-1}A$, $A_m^{-1}B$ e $C_m A_m^{-1} A - C_a$.

- Se a solução corrente satisfizer as novas restrições técnicas conclui-se que estas são redundantes (não há alteração do plano óptimo corrente)
- Se a solução corrente não satisfizer as novas restrições técnicas há que recalcular o quadro Simplex corrente e reoptimizar aplicando o ou os métodos Primal-Simplex e Dual-Simplex-

A alteração do quadro óptimo corrente vai ser executada directamente para evitar o cálculo moroso dos novos produtos matriciais.

a. Exemplo da introdução de Nova Restrição Técnica

Considerar o modelo de PL (já apresentado):

Max f(X) = $6x_1 + 8x_2$ (função de lucro)

sujeito a:

$$
\begin{array}{lcllcl}
30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 & \text{(metros de madeira)} \\
5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 & \text{(horas de trabalho)} \\
 & & x_1 , x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

O quadro óptimo é o seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	9
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	96

"Admitir que a produção de B deve ser, pelo menos, 5 vezes superior à produção de A".

O modelo original é modificado para:

Max f(X) = $6x_1 + 8x_2$

sujeito a:

$$
\begin{array}{lcllcl}
30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 & \\
5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 & \\
5x_1 & - & x_2 & \leq & 0 & \text{(nova restrição)} \\
 & & x_1 , x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Teste da nova restrição do problema Primal com os valores óptimos correntes de x_1 e x_2:

$5x_1 - x_2 \leq 0 \Rightarrow 5(4) - 9 \leq 0$. Não satisfeita. Necessário reoptimizar.

Podemos calcular de imediato o valor da folga na equação desta restrição:

$5x_1 - x_2 + F_3 = 0 \Rightarrow 5(4) - 9 + F_3 = 0 \Rightarrow F_3 = -11$ (não admissível)

Sabemos já que a solução corrente deixa de ser admissível e será necessário reoptimizar.

Comecemos por examinar o quadro Simplex corrente aumentado com a equação padrão da nova restrição:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM	Obs.
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	0	4	
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	0	9	
F_3	5	-1	0	0	1	0	(nova restrição)
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	0	96	

Verificamos que a matriz da base não é uma matriz Identidade sendo necessário transformar linearmente a nova equação.

Para tal é necessário:

- multiplicar por (-5) a 1ª equação

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM
- 5(1ª equação)	-5	0	$^{-5}/_{20}$	$^5/_{10}$	0	-20

- multiplicar por (1) a 2ª equação

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM
+ 1(2ªequação)	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	0	9

- somar os produtos anteriores à 3ª equação

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM
+ 3ª equação	5	-1	0	0	1	0

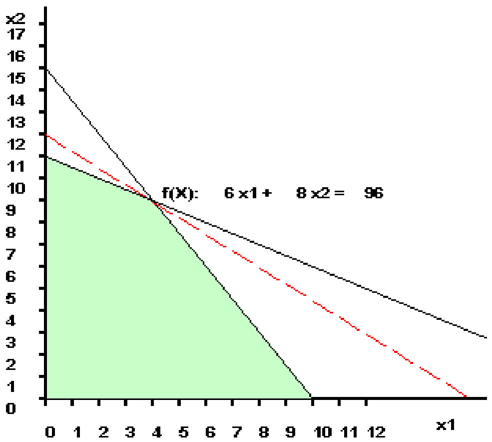
Soma (3ª equação p/ quadro)	0	0	$^{-11}/_{40}$	$^{13}/_{20}$	1	-11

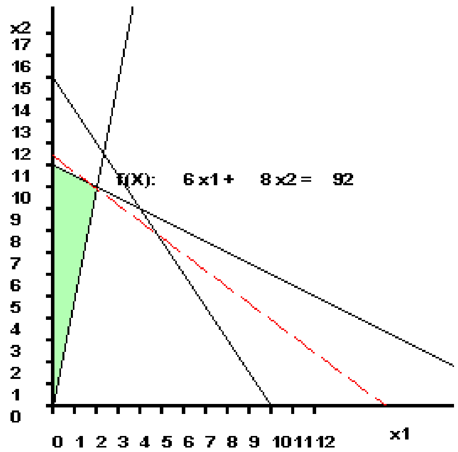
(Notar o valor "-11" para a VB F_3 tal como foi antecipado)

Esta transformação linear pode ser feita no próprio quadro Simplex para prosseguir de imediato com a reoptimização que o teste prévio mostrou ser necessária.

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM	Obs.
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	0	4	
x_2	0	1	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	0	9	
~~F_3~~	~~5~~	~~-1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	(a transformar linearmente)
F_3	0	0	$^{-11}/_{40}$	$^{13}/_{20}$	1	-11	(transformada linearmente)
f(X)	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	0	96	SBNAP; SBAD ; Dual-Simplex (sai F_3 ; entra F_1)
F_1	0	0	1	$^{-26}/_{11}$	$^{-40}/_{11}$	40	
x_1	1	0	0	$^1/_{55}$	$^2/_{11}$	2	
x_2	0	1	0	$^1/_{11}$	$^{-1}/_{11}$	10	
f(X)	0	0	0	$^{46}/_{55}$	$^4/_{11}$	92	Novo Óptimo

Há novo plano de produção: 2 unidades de A ; 10 unidades de B; lucro máximo de 92 u.m. (ver figura).





Notar a alteração do espaço de soluções e a localização do novo ponto óptimo.