X. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE – PARAMETRIZAÇÃO

Considere-se uma fábrica que produz os bens “A” e “B” que vende com lucro unitário de 3 e 4 € respectivamente.

Na produção intervêm duas das secções da empresa onde os tempos necessários à produção unitária de “A” e “B” são os seguintes:

	Secção nº1 (horas)	Secção nº2 (horas)
A	2	4
B	3	1

Admitindo as disponibilidades de 6 horas na secção nº 1 e de 8 horas na secção nº 2 o modelo de programação linear para optimizar a produção é o seguinte:

$$
\begin{aligned}
&Max\ f(X) = 3x_1 + 4x_2 \\
&s.a. \\
&2x_1 + 3x_2 \le 6 \\
&4x_1 + x_2 \le 8 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

No modelo as variáveis x_1 e x_2 representam os níveis de produção de “A” e “B” respectivamente.

1. Técnica para a parametrização de um segundo membro de uma restrição técnica

Admita-se que o departamento de gestão da produção necessita estudar todos os cenários admissíveis no intervalo de 4 a 16 horas de disponibilidade da secção nº 2.

Esta necessidade de estudar o modelo em função da <u>alteração contínua</u> de um termo independente (segundo membro) implica expressar este na dependência de uma variável independente (“λ” por exemplo) do seguinte modo:

$$\boxed{\overline{b_i} = b_i + \lambda t}$$

em que “b_i” é a ordenada na origem de uma recta, “λ” é a variável independente e “t” é o declive da recta.

Assim, para a variação de “b_2” no intervalo de 4 a 16 horas podemos utilizar:

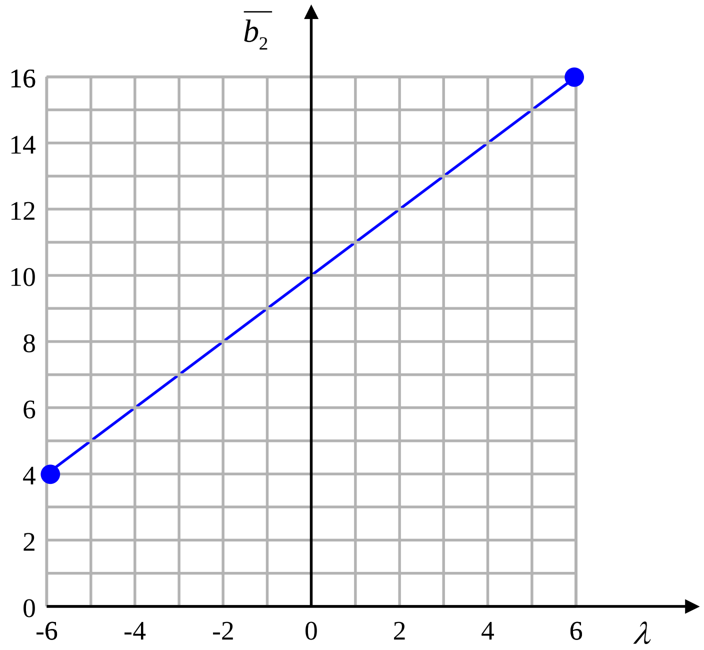
$\overline{b_2} = 10 + \lambda$ $-6 \le \lambda \le 6$	$\Rightarrow\ 4x_1 + x_2 \le 10 + \lambda$

Definiu-se uma recta com declive unitário (t=1) e ordenada na origem igual a 10.

O método Simplex será utilizado partindo do seguinte quadro inicial:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	2	3	1	0	6
F_2	4	1	0	1	$10 + \lambda$
f(X)	-3	-4	0	0	0

Notar que para "λ = -6" e "λ = 6" temos "b_2 = 4 horas" e "b_2 = 16 horas" respectivamente. Fazendo variar "λ" no intervalo $[-6 \quad 6]$ obter-se-ão valores para "b_2" no intervalo $[4 \quad 16]$ como mostra a figura seguinte:



2. Técnica para a parametrização de um coeficiente da função objectivo

Admita-se que o departamento de gestão da produção necessita estudar todos os cenários admissíveis no intervalo de 1 a 5 euros para o lucro unitário da venda do produto "A".

Tal como no caso do segundo membro da restrição utiliza-se a expressão geral:

$$\boxed{\overline{c_j} = c_j + \lambda t}$$

em que "c_j" é a ordenada na origem de uma recta, "λ" é a variável independente e "t" é o declive da recta.

Assim, para a variação de "c_1" no intervalo de 1 a 5 horas podemos utilizar:

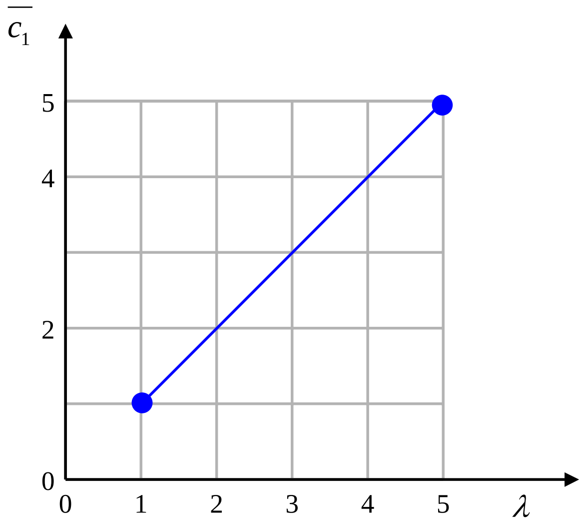
$\overline{c_1} = \lambda$ $1 \leq \lambda \leq 5$	$\Rightarrow$ f(X) = $\lambda x_1 + 4x_2$

O estudo é feito percorrendo uma recta com declive unitário (t =1) e ordenada nula na origem.

O quadro inicial para aplicar o método Simplex é o seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM
F_1	2	3	1	0	6
F_2	4	1	0	1	8
f(X)	-λ	-4	0	0	0

Notar que, neste caso, se adoptou o intervalo de variação de "λ" coincidente com o intervalo do coeficiente de lucro que se pretende analisar (ver a figura seguinte):



Nas secções seguintes apresenta-se separadamente o emprego do método Simplex na parametrização de coeficientes da função objectivo e dos segundos membros das restrições técnicas.

3. Método Simplex - Parametrização dos Coeficientes da Função Objectivo

Considere-se o modelo de produção dos bens “A” e “B” já utilizado anteriormente:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$

$$
\text{sujeito a:}\quad
\begin{array}{rcrcr}
30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\
5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\
 & & x_1 , x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Admita-se a necessidade de estudar a variação do lucro unitário de “A” no intervalo [2 , 16].

O coeficiente pode ser expresso em função de " λ " recorrendo a uma recta com t =1, e ordenada na origem igual ao coeficiente corrente (6):

$$
\boxed{\begin{array}{l} \overline{c_1} = 6 + \lambda \\ -4 \leq \lambda \leq 10 \end{array}}
$$

O modelo para o estudo é então:

Max $f(X) = (6 + \lambda)x_1 + 8x_2$

$$
\text{sujeito a:}\quad
\begin{array}{rcrcr}
30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\
5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\
 & & x_1 , x_2 & \geq & 0 \\
 & & -4 \leq \lambda \leq 10 & &
\end{array}
$$

Para aplicar o método Simplex, podemos iniciar o cálculo em qualquer ponto do intervalo do parâmetro " λ " mas é tecnicamente aconselhável percorrer o intervalo no sentido crescente ou seja, no caso presente, começamos por estudar a solução óptima para “λ = - 4” ou seja “c_1 = 2”.

Quadro inicial do Simplex (λ = -4)

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_1	30	20	1	0	300	Valor corrente de λ = -4
F_2	5	10	0	1	110	-6 - λ = -6 - (-4) = -2
f(X)	(- 6 - λ)	-8	0	0	0	

A solução não é óptima porque há coeficientes negativos na equação de f(X).

Há que fazer a mudança da base, mantendo-nos no mesmo ponto com “λ = -4”.

As variáveis x_1 e x_2 têm, em f(X), coeficientes “-2” e “-8” pelo que a mudança de base a efectuar é a seguinte:

- Entra para a base a variável x_2
- Sai da base a variável F_2

A nova solução é a seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
x_2	$^1/_2$	1	0	$^1/_{10}$	11	Valor corrente de λ = -4
F_1	20	0	1	-2	80	Nota: -2 - λ = -2 - (-4) = 2
f(X)	-2 - λ	0	0	$^4/_5$	88	Solução óptima

Em f(X) todas as variáveis têm coeficiente positivo pelo que esta base é óptima (notar que para λ = -4 o coeficiente de x_1 é igual a 2).

$$1^{\text{a}}\ solução\ óptima : X_1^* = \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 11 \\ F_1 = 80 \\ F_2 = 0 \end{bmatrix} ; Max\ \ f(X_1^*) = 88$$

A estrutura desta base mantém-se enquanto satisfizer a regra de paragem ou seja, neste caso, enquanto o valor de "-2-λ" se mantiver não negativo. O <u>limite superior</u> de " λ " é portanto:

$$-2-\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq -2$$

1ª Base Óptima

VB: x_2 e F_2

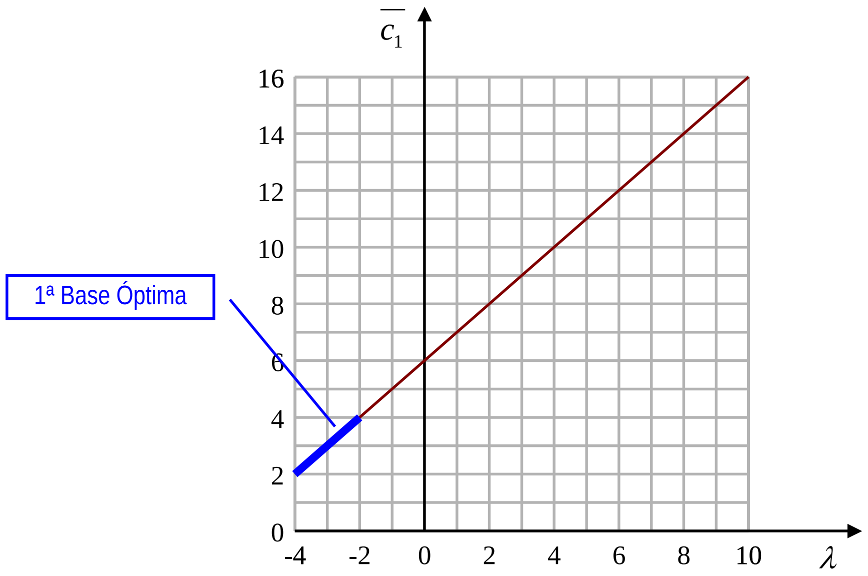
Intervalo admissível de "λ": [-4 -2]

Intervalo admissível de $c_1 = 6 + \lambda$: [2 4]

Conclusão: Esta base óptima mantém-se para lucros unitários do bem "A" desde 2€ a 4€.

Repare que esta solução básica seria obtida se fosse usada a função objectivo f(X) = $2x_1 + 8x_2$ e analisada a sensibilidade do modelo à variação do coeficiente deste lucro "c_1".

Geometricamente temos:



O extremo superior do intervalo de "λ" ainda não foi atingido sendo necessário prosseguir o estudo.

Se o valor de " λ " for superior a " -2", o coeficiente, em f(X), "- 2 - λ" terá valor negativo e a base corrente deixa de ser óptima (notar que o coeficiente que passa a ser negativo é sempre aquele que permitiu calcular o limite superior do parâmetro).

Vamos pois continuar o estudo no quadro Simplex corrente sabendo que:

- o valor corrente de "λ" passa a ser "-2"
- a variável que, em f(X), passa a ter coeficiente negativo é x_1 pelo que a mudança de base a efectuar é a seguinte:
  - entra para a base a variável x_1
  - sai da base a variável F_1

A nova solução é a seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
x_1	1	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	4	Valor corrente de λ = -2
x_2	0	1	$^1/_{40}$	$^3/_{20}$	9	
f(X)	0	0	$^1/_{10} + {}^{\lambda}/_{20}$	$^3/_5 - {}^{\lambda}/_{10}$	96 + 4λ	

Em f(X) todas as variáveis têm coeficiente positivo pelo esta base é óptima (notar que para λ= -2 os coeficientes, em f(X), de x_1 e x_2 são, respectivamente, 0 e $^4/_5$).

$$2^{\text{a}}\ \textit{solução óptima} : X_2^* = \begin{bmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 9 \\ F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{bmatrix} ;\ Max\ f(X_2^*) = 96 + 4\lambda\ €$$

A estrutura desta base mantém-se enquanto satisfizer a regra de paragem ou seja, neste caso, enquanto em f(X) os valores de "$^1/_{10} + {}^{\lambda}/_{20}$" e "$^3/_5 - {}^{\lambda}/_{10}$" se mantiverem não negativos. O limite superior de " λ " é portanto:

$$\left|\begin{array}{l} ^1/_{10} + {}^{\lambda}/_{20} \geq 0 \ \Rightarrow\ \lambda \geq -2 \\ ^3/_5 - {}^{\lambda}/_{10} \geq 0 \ \Rightarrow\ \lambda \leq 6 \ \text{(limite superior)} \end{array}\right.$$

2ªBase Óptima

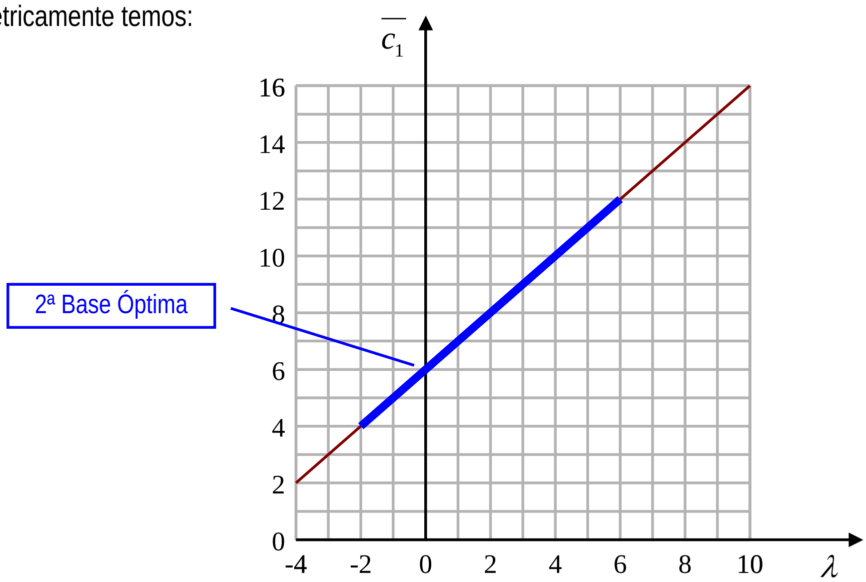
VB: x_1 e x_2

Intervalo admissível de "λ": [-2   6]

Intervalo admissível de c_1 = 6 + λ : [4   12]

Conclusão: Esta base óptima mantém-se para lucros unitários do bem "A" desde 4€ a 12€.

Geometricamente temos:



O extremo superior do intervalo de "λ" ainda não foi atingido sendo necessário prosseguir o estudo. Se o valor de " λ " for superior a " 6", o coeficiente "$^3/_5$ - $^{\lambda}/_{10}$" (que estabeleceu o limite superior de "λ"), terá valor negativo e a solução corrente deixa de ser óptima. Vamos pois continuar o estudo no quadro Simplex corrente sabendo que:

- o valor corrente de "λ" passa a ser "6"
- a variável que, em f(X), passa a ter coeficiente negativo é F2 pelo que a mudança de base a efectuar é a seguinte:
  - entra para a base a variável F_2
  - sai da base a variável x_2

A nova solução é a seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_2	0	$^{20}/_3$	$^{-1}/_6$	1	60	Valor corrente de λ = 6
x_1	1	$^2/_3$	$^1/_{30}$	0	10	
f(X)	0	$-4 + {}^{2\lambda}/_3$	$^1/_5 + {}^{\lambda}/_{30}$	0	60 + 10λ	

Em f(X) todas as variáveis têm coeficiente positivo pelo que esta base é óptima (notar que para λ ≥ 6 todos os coeficientes, na equação de f(X) são não negativos).

$$3^a\ solução\ óptima: X_2^* = \begin{bmatrix} x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \\ F_1 = 0 \\ F_2 = 60 \end{bmatrix}; Max\ f(X_2^*) = 60 + 10\lambda$$

Foi atingido o limite superior do parâmetro "λ " pelo que o estudo está terminado.

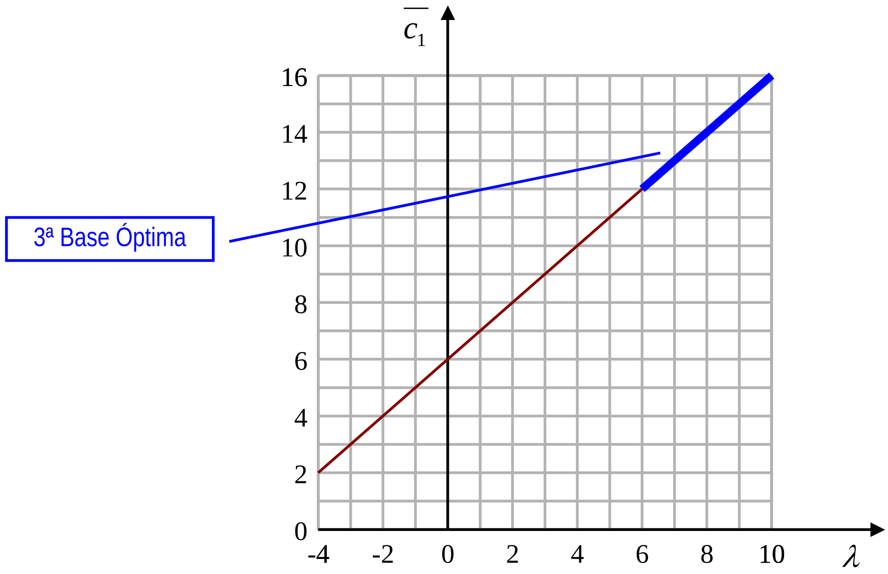
3ª Base Óptima

VB: x_1 e F_2

Intervalo admissível de "λ": $\geq$ 6

Intervalo admissível de $c_1 = 6 + \lambda$: ≥ 12

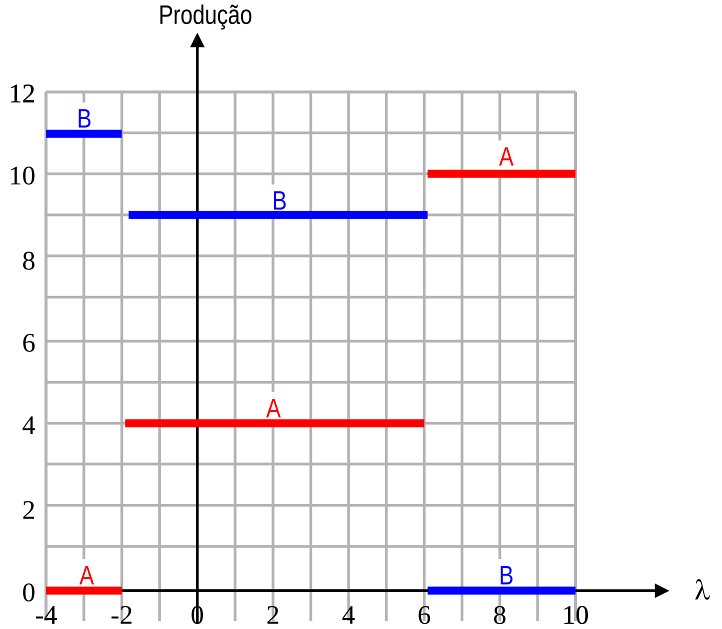
Geometricamente temos:

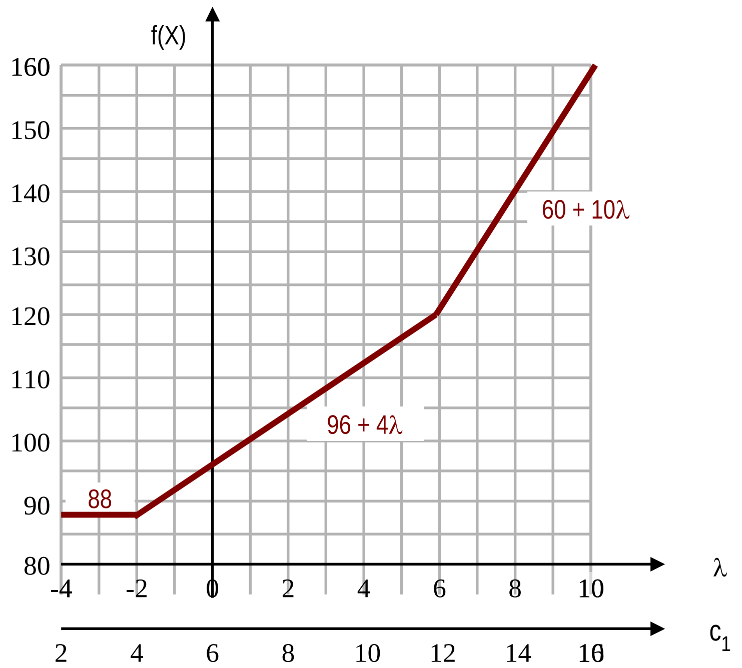


Conclusões da Parametrização do coeficiente de lucro do produto "A" (2 a 16 €)

Parâmetro "λ"	Lucro Unitário de venda (€) ($6 + \lambda$)	Produção óptima	Lucro total (€)
-4 a -2	2 a 4	"A"	88
-2 a 6	4 a 12	"A" e "B"	$96 + 4\lambda$
≥ 6	≥ 12	"B"	$60 + \lambda$

Nas figuras seguintes pode visualizar o resultado do estudo.





Ao longo do processo iterativo foi necessário, *para cada uma das bases óptimas,* estabelecer o limite superior do parâmetro "λ" a fim de definir o sub intervalo deste onde uma dada base óptima se mantém.

Para tal, estabeleceu-se sempre a regra de paragem a observar pelos coeficientes, em f(X), do tipo " $\alpha + \beta\lambda$ " para calcular o limite superior de "λ" dado que o estudo foi realizado percorrendo, no sentido crescente, o intervalo deste parâmetro.

4. Método Simplex - Parametrização dos Segundos Membros de Restrições Técnicas

O estudo de termos independentes é similar ao apresentado anteriormente para os coeficientes da função objectivos. Obtida uma solução óptima é calculado o limite superior do parâmetro "λ" onde a solução se mantém *admissível* do que resulta a identificação da variável que deixa de observar a restrição lógica associada (não admissibilidade no Primal). Como, nesta situação, a solução corrente se mantém admissível no Dual, recorre-se ao método Dual-Simplex para prosseguir o cálculo de novas soluções óptimas, caso existam.

Retomemos o exemplo já utilizado anteriormente:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcl} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Admitamos a necessidade de estudar a variação da mão-de-obra entre 30 e 200 horas.

O termo independente pode ser expresso em função de " λ " recorrendo a uma recta com t =1, e ordenada na origem igual ao coeficiente corrente (110):

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{b_2} = 110 + \lambda \\ -80 \leq \lambda \leq 90 \end{array}}$$

O modelo para o estudo é então:

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{array}{rcrcl} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 300 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 + \lambda \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & -80 \leq \lambda \leq 90 & & \end{array}$$

Recorrendo ao método do Simplex tem-se:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_1	30	20	1	0	300	Valor corrente de λ = -80
F_2	5	10	0	1	$110 + \lambda$	= 30 para λ = -80
f(X)	- 6	-8	0	0	0	(não satisfaz critério do óptimo)
x_2	$^1/_2$	1	0	$^1/_{10}$	$11 + \lambda/10$	= 3 para λ = -80
F_1	20	0	1	-2	$80 - 2\lambda$	= 240 para λ = -80
f(X)	-2	0	0	$^4/_5$	$88 + 4\lambda/5$	(não satisfaz critério do óptimo)
x_1	1	2	0	$^1/_5$	$22 + \lambda/5$	= 6 para λ = -80
F_1	0	-40	1	-6	$-360 - 6\lambda$	= 120 para λ = -80
f(X)	0	4	0	$^6/_5$	$132 + 6\lambda/5$	(1ª base óptima)

Para λ = -80 os segundos membros são admissíveis e porque todos os coeficientes na equação da função são não negativos esta base é óptima:

$$1^{a}\ solução\ óptima : X_1^* = \begin{bmatrix} x_1 = 22 + \frac{1}{5}\lambda \\ x_2 = 0 \\ F_1 = -360 - 6\lambda \\ F_2 = 0 \end{bmatrix} ; Max\ f(X_1^*) = 132 + \frac{6}{5}\lambda$$

O <u>limite superior</u> de "λ" que mantém esta base óptima é:

$22 + \lambda/5 \geq 0$ (não estabelece limite superior)
$-360 - 6\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq -60$ (limite superior)

A 1ª base óptima mantém-se no intervalo $-80 \leq \lambda \leq -60$ ou seja, atendendo a que $b_2 = 110 + \lambda$, para valores de b_2 tal que $30 \leq b_2 \leq 50$.

$$b_i = b_i + \lambda t = 110 + \lambda$$

30 ———————————— 50

1º sub intervalo de λ

-80 ———————————— -60

Para valores de " λ " superiores a " -60", o segundo membro " -360 - 6λ " fica negativo e a solução corrente deixa de ser admissível.

Como ainda não foi atingido o limite superior do parâmetro "λ" há que prosseguir no estudo efectuando nova mudança de base recorrendo ao método Dual-Simplex.

Mudança de base a efectuar : sai da base a variável F_1 ; entra para a base a variável x_2 .

Valor corrente de "λ" passa a ser agora de "-60":

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
x_2	0	1	$-1/40$	$3/20$	$9 + 3\lambda/20$	= 0 para λ = -60
x_1	1	0	$1/20$	$-1/10$	$4 - \lambda/10$	= 10 para λ = -60
f(X)	0	0	$1/10$	$3/5$	$96 + 3\lambda/5$	(2ª base óptima)

Para λ= -60 os segundos membros são admissíveis. Porque todos os coeficientes na equação da função são não negativos temos uma nova base óptima:

$$2^{a}\ solução\ óptima : X_1^* = \begin{bmatrix} x_1 = 4 - \frac{1}{10}\lambda \\ x_2 = 9 + \frac{3}{20}\lambda \\ F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{bmatrix} ; Max\ f(X_1^*) = 96 + \frac{3}{5}\lambda$$

O <u>limite superior</u> de " λ " que mantém a admissibilidade desta segunda base óptima é:

$4 - \lambda/10 \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq 40$ (limite superior)
$9 + 3\lambda/20 \geq 0$ (não estabelece limite superior)

A 2ª base óptima mantém-se para $-60 \le \lambda \le 40$ ou seja, atendendo a que $b_2 = 110 + \lambda$, para valores de b_2 tal que $50 \le b_2 \le 150$.

$$b_i = b_i + \lambda t = 110 + \lambda$$

50 150

2º sub intervalo de λ

-60 40

Para valores de " λ " superiores a " 40", o segundo membro " $4 - {}^{\lambda}/_{10}$ " fica negativo e a base corrente deixa de ser admissível.

Como ainda não foi atingido o limite superior do parâmetro "λ" há que prosseguir no estudo efectuando nova mudança de base recorrendo ao método Dual-Simplex.

Mudança de base a efectuar : sai da base a variável x_1 ; entra para a base a variável F_2 .

Valor corrente de "λ" passa a ser, agora, "40":

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_2	-10	0	$-{}^{1}/_{2}$	1	$-40 + \lambda$	= 0 para λ = 40
x_2	${}^{3}/_{2}$	1	${}^{1}/_{20}$	0	15	
f(X)	6	0	${}^{2}/_{5}$	0	120	(3ª base óptima)

Na solução não há valores com coeficiente negativo em "λ " pelo que o limite superior deste sub intervalo é $+\infty$ (*termina o estudo*):

$$b_i = b_i + \lambda t = 110 + \lambda$$

150 200

3º sub intervalo de λ

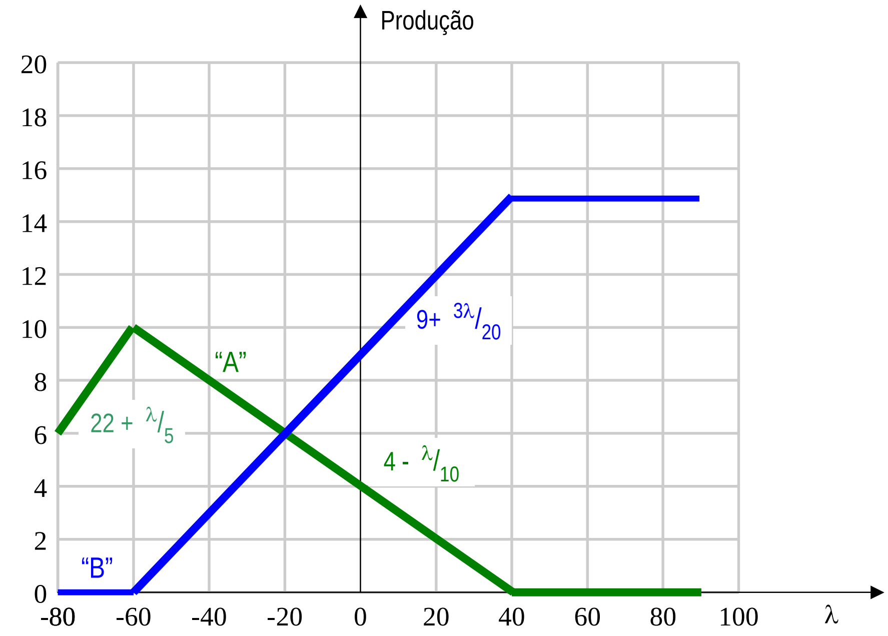
40 90

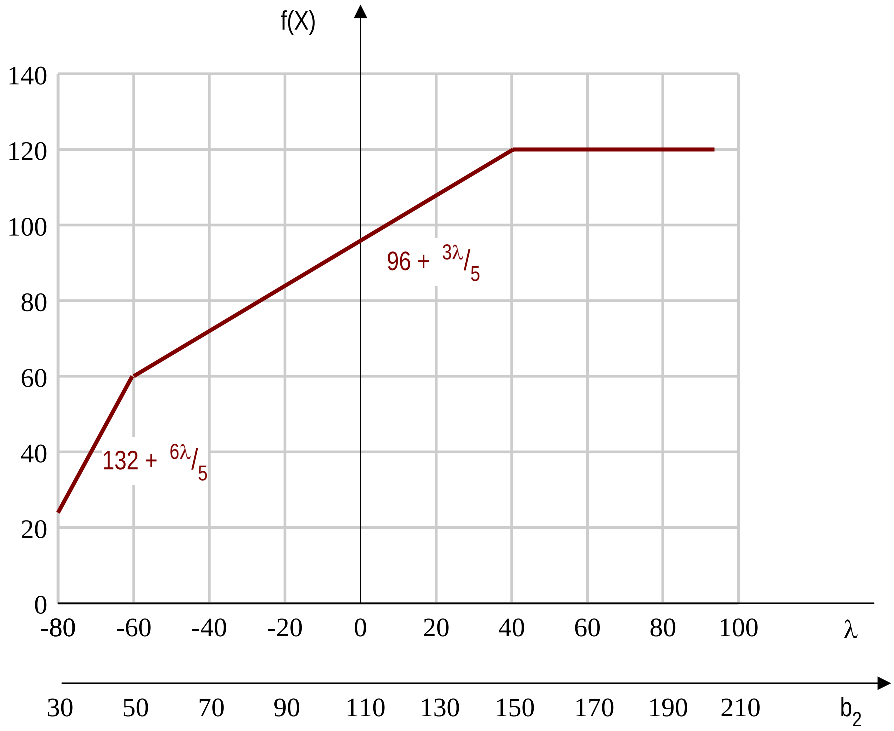
A 3ª base óptima mantém-se para $40 \le \lambda \le +\infty$.

Conclusões da Parametrização das horas de trabalho disponíveis (30 a 200 horas)

Parâmetro "λ"	Horas de trabalho ($110 + \lambda$)	Produção óptima	Lucro total (€)
-80 a -60	30 a 50	"A" = $22 + {}^{\lambda}/_{5}$	$132 + {}^{6\lambda}/_{5}$
-60 a 40	50 a 150	"A" = $4 - {}^{\lambda}/_{10}$ "B" = $9 + {}^{3\lambda}/_{20}$	$96 + {}^{3\lambda}/_{5}$
≥ 40	≥ 150	"B" = 15	120

Nas figuras seguintes pode visualizar o resultado do estudo.





5. Auto Teste nº 1 - Parametrização de coeficiente de função objectivo

Uma empresa dispõe mensalmente de 170 horas de uma dada máquina para produzir tintas "A" e "B".

A tinta "A" é produzida à cadência de 50 litros/hora enquanto a "B" é produzida à cadência de 80 litros/hora.

As vendas de "A" e "B" são efectuadas com lucro unitário de 3 € e 2 € respectivamente.

A procura limitada do mercado aconselha a não exceder, mensalmente, a produção de 7000 litros de "A" e 10000 litros de "B".

O modelo para optimizar a produção é:

Max $f(X) = 3x_1 + 2x_2$

$$
\text{sujeito a:} \quad \begin{array}{lcrcr}
x_1 & & & \leq & 7000 \\
 & & x_2 & \leq & 10000 \\
8x_1 & + & 5x_2 & \leq & 68000 \\
 & & x_1 , x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Nota: A 3ª restrição resulta de $\frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{80} \leq 170$

O quadro óptimo é o seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM
x_1	1	0	0	$-5/8$	$1/8$	2250
x_2	0	1	0	1	0	10000
F_1	0	0	1	$5/8$	$-1/8$	4750
f(X)	0	0	0	$1/8$	$3/8$	26750

Níveis óptimos de actividade:

- Produção de "A" = 2250 litros
- Produção de "B" = 10000 litros

Lucro máximo = 26750 €

Havendo dúvidas sobre a precisão do coeficiente de lucro da venda de "A" efectuar o estudo do comportamento do modelo considerando o lucro não negativo (≥ 0).

6. Solução do Auto Teste nº 1 - Parametrização de coeficiente de função objectivo

O coeficiente de lucro da venda de "A" pode ser expresso na dependência linear de " λ " , considerando-o igual a " $3 + 3\lambda$ " com $-1 \le \lambda \le +\infty$:

$$\bar{c}_1 = c_1 + \lambda t = 3 + 3\lambda$$

0 ———————————————— $+\infty$

$$\lambda$$

-1 ———————————————— $+\infty$

A função objectivo a maximizar é $f(X) = (3 + 3\lambda)x_1 + 2x_2$

O "novo" coeficiente de x_1 é $c_1 = 3 + 3\lambda$ do que resultam "novas matrizes" $C_m A_m^{-1} - C_i$ e $C_m A_m^{-1} B$ que, após calculadas, actualizam o quadro corrente para:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM	Obs.
x_1	1	0	0	$-^5/_8$	$^1/_8$	2250	$\lambda = -1$
x_2	0	1	0	1	0	10000	
F_1	0	0	1	$^5/_8$	$-^1/_8$	4750	
f(X)	0	0	0	$^1/_8 - {}^{15\lambda}/_8$	$^3/_8 + {}^{3\lambda}/_8$	$26750 + 6750\lambda$	

Para $\lambda = -1$ a base é óptima mantendo-se enquanto $\lambda \le {}^1/_{15}$ (1ª base óptima).

Se $\lambda > {}^1/_{15}$ o coeficiente da variável F_2, na equação da função, fica negativo pelo que se efectua uma mudança de base, entrando a variável F_2 por troca com F_1.

A solução para a nova base é a seguinte:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM	Obs.
F_3	0	0	$^8/_5$	1	$-^1/_5$	7600	$\lambda = {}^1/_{15}$
x_1	1	0	1	0	0	7000	
x_2	0	1	$-^8/_5$	0	$^1/_5$	2400	
f(X)	0	0	$-^1/_5 + 3\lambda$	0	$^2/_5$	$25800 + 21000\lambda$	

Para $\lambda = {}^1/_{15}$ a base é óptima mantendo-se até $\lambda = +\infty$ (estudo terminado).

O conjunto de soluções óptimas é então:

λ	-1		$^1/_{15}$		$+\infty$
c_1	0 €	Solução	3.2 €	Solução	$+\infty$
x_1		2250 litros		7000 litros	
x_2		10000 litros		2400 litros	
f(X)		$26750 + 6750\lambda$		$25800 + 21000\lambda$	

7. Auto Teste nº 2 - Parametrização de Segundo membro de restrição técnica

Considerar o problema anterior.

Havendo dúvidas sobre a precisão do número de horas/máquina disponíveis estudar o comportamento do modelo considerando a disponibilidade de horas não negativa e no máximo 510 horas.

8. Solução do Auto Teste nº 2 - Parametrização de Segundo membro de restrição técnica

A disponibilidade em horas/máquina pode ser expressa na dependência linear de " λ " , considerando:

$$b_i = b_i + \lambda t = 170 + 170\lambda$$

0	510

λ

-1	2

Do "novo segundo membro da 3ª restrição" resultam novos valores para $A_m^{-1}B$ e $C_m A_m^{-1}B$ que são calculados e registados no quadro da base corrente:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	VSM	Obs.
x_1	1	0	0	$-5/8$	$1/8$	2250 + 8500λ	λ = -1
x_2	0	1	0	1	0	10000	SBNAP
F_1	0	0	1	$5/8$	$-1/8$	4750 - 8500λ	
f(X)	0	0	0	$1/8$	$3/8$	26750 + 25500λ	
F_2	$-8/5$	0	0	1	$-1/5$	-3600 - 13600λ	λ = -1
x_2	$8/5$	1	0	0	$1/5$	13600 + 13600λ	1ª Base óptima
F_1	1	0	1	0	0	7000	até λ = $-9/34$
f(X)	$1/5$	0	0	0	$2/5$	27200 + 27200λ	
x_1	1	0	0	$-5/8$	$1/8$	2250 + 8500λ	λ = $-9/34$
x_2	0	1	0	1	0	10000	2ª base óptima
F_1	0	0	1	$5/8$	$-1/8$	4750 - 8500λ	até λ = $19/34$
f(X)	0	0	0	1	$3/8$	26750 + 25500λ	
F_3	0	0	0	-5	1	-38000 + 68000λ	λ = $19/34$
x_1	1	0	0	0	0	7000	3ª base óptima
x_2	0	1	1	1	0	10000	até λ = + ∞
f(X)	0	0	0	$23/8$	0	41000	

O conjunto de soluções óptimas é então:

λ	-1	$-9/34$	$19/34$	2
b_3	0	125 h	265 h	510 h

	Solução	Solução	Solução
x_1	0	2250 + 8500λ	7000
x_2	13600 + 13600λ	10000	10000
f(X)	27200 + 27200λ	26750 + 25500λ	41000

9. Caso Particular de Parametrização (f(X) ilimitada em parte(s) do intervalo de variação)

Admita-se o seguinte problema de PL:

Max $f(X) = (1 - 2\lambda)x_1 + (1 - \lambda)x_2$

$$\text{sujeito a:} \quad \begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & \multicolumn{3}{l}{-1 \leq \lambda \leq 4} \end{array}$$

Quadro inicial:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_1	-1	1	1	0	4	$\lambda = -1$
F_2	-1	2	0	1	6	
f(X)	$-1 + 2\lambda$	$-1 + \lambda$	0	0	0	(não satisfaz critério do óptimo)

As variáveis x_1 e x_2 , com coeficiente $(-1 + 2\lambda) = -3$ e $(-1 + \lambda) = -2$ respectivamente, são seleccionáveis para entrada na base. Se a escolha recair sobre x_1 não é possível anular qualquer das VB correntes pois não há limite superior para x_1 concluindo-se que f(X) é ILIMITADA .

Nesta situação importa definir o 1º sub intervalo de "λ" onde esta situação se verifica. Para tal calcula-se o valor de "$\lambda = {}^1/_2$" que anula o coeficiente $(-1 + 2\lambda)$ concluindo-se que para $-1 \leq \lambda \leq {}^1/_2$ a função tem valor ilimitado.

Vejamos agora o <u>valor dos coeficientes no quadro</u> para $\lambda = {}^1/_2$:

- $(-1 + 2\lambda) = 0$; satisfaz a regra de paragem
- $(-1 + \lambda) = -{}^1/_2$; não satisfaz a regra de paragem

A mudança de base é feita por entrada de x_2 e saída de F_2 obtendo-se:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
x_2	$-{}^1/_2$	1	0	${}^1/_2$	3	$\lambda = {}^1/_2$
F_1	$-{}^1/_2$	0	1	$-{}^1/_2$	1	
f(X)	$-{}^3/_2 + {}^{5\lambda}/_2$	0	0	${}^1/_2 - {}^{\lambda}/_2$	$3 - 3\lambda$	

Para $\lambda = {}^1/_2$ o valor dos coeficientes na equação da função é:

- $-{}^3/_2 + {}^{5\lambda}/_2 = -{}^1/_4$; não satisfaz a regra de paragem
- ${}^1/_2 - {}^{\lambda}/_2 = {}^1/_4$; satisfaz a regra de paragem

A nova mudança de base implica a entrada de x_1 , voltando a não ser possível estabelecer "ratio" finita não negativa concluindo-se que f(X) é ILIMITADA.

Repetindo o procedimento anteriormente adoptado, define-se o 2º sub intervalo de "λ" onde esta situação se verifica, obtendo-se o valor de "$\lambda = {}^3/_5$" que anula o coeficiente $(-{}^3/_2 + {}^{5\lambda}/_2)$.

Temos assim que no intervalo ${}^1/_2 \leq \lambda \leq {}^3/_5$ a função continua com valor ilimitado.

Para $\lambda = {}^3/_5$ o valor dos coeficientes na equação da função é:

- $-{}^3/_2 + {}^{5\lambda}/_2 = 0$; satisfaz a regra de paragem
- ${}^1/_2 - {}^{\lambda}/_2 = {}^1/_5$; satisfaz a regra de paragem

pelo que a **solução** $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $f(X) = 3 - 3\lambda$ **é uma solução óptima.**

Esta solução mantém-se até ao limite superior de "$\lambda = 1$ ".

Temos assim o 3º sub intervalo: ${}^3/_5 \leq \lambda \leq 1$.

Para $\lambda > 1$ a solução deixa de satisfazer o critério do óptimo havendo que efectuar nova mudança de base entrando F_2 por troca com x_2 obtendo-se:

VB	x_1	x_2	F_1	F_2	VSM	Obs.
F_1	-1	1	1	0	4	$\lambda = 1$
F_2	-1	2	0	1	6	
f(X)	$-1 + 2\lambda$	$-1 + \lambda$	0	0	0	

Porque os coeficientes em f(X) são não negativos para $\lambda = 1$ esta base é óptima até "$\lambda = +\infty$" pelo que o estudo termina.

No intervalo $-1 \leq \lambda \leq 4$ tem-se então:

λ	-1		${}^3/_5$		1		4
$c_1 = 1 - 2\lambda$	3		$-{}^1/_5$		-1		-7
$c_2 = 1 - \lambda$	2		${}^2/_5$		0		-3

	Solução	Solução	Solução
x_1		0	0
x_2		3	0
f(X)	Ilimitada	$3 - 3\lambda$	0

É de interesse analisar a situação em que *se dispõe de uma solução não óptima e não existe limite superior para a variável seleccionada para entrada na base.*

Nestas condições, sabendo-se que a função tem valor ilimitado é necessário calcular o limite superior do sub intervalo do parâmetro "λ" onde a situação permanece. Podendo este limite ser finito (situação que ocorreu no exemplo apresentado) ou infinito (situação em que o cálculo se considera terminado) importa deduzir como uma e outra situação podem ser reconhecidas por exame directo do quadro Simplex (maximização da função objectivo).

Para tal admita-se que $\underline{\text{para } \lambda = k}$ há um coeficiente $\alpha + \beta\lambda < 0$ de uma VNB com vector técnico só com elementos negativos e/ou nulos (situação de função com valor ilimitado).

Estude-se o coeficiente para as duas situações seguintes:

- $\underline{\beta \leq 0}$: para qualquer valor de $\lambda \geq k$ o coeficiente "$\alpha + \beta\lambda$" mantém-se negativo; a função objectivo é ilimitada para valores de $\lambda \geq k$

- <u>$\beta > 0$</u>: tem-se $\lambda < -\dfrac{\alpha}{\beta}$ e obtém-se um limite superior λ_1 para "λ". A função objectivo é ilimitada para $k \leq \lambda \leq \lambda_1$. Para $\lambda = \lambda_1$ tem-se " "$\alpha + \beta\lambda_1 = 0$" e a variável deixa de ser seleccionável para entrada na base prosseguindo a apreciação da solução corrente pelo método usual.

10. Auto Teste nº 3 - Parametrização

Considere-se o modelo de produção dos bens "A" e "B":

Max $f(X) = 6x_1 + 8x_2$

$$
\text{sujeito a:}\quad
\begin{array}{rcrcr}
30x_1 & + & 20x_2 & \leq & b_1 \\
5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 110 \\
x_1 & & & \geq & 5 \\
 & & x_1\,,\,x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Estudar o modelo para $b_1 \geq 0$.

11. Auto Teste nº 3 - Solução da Parametrização

Parametrizemos o segundo membro a estudar:

$$b_i = b_i + \lambda t = \lambda$$

0 $+\infty$

λ

0 $+\infty$

Quadro Inicial ($\lambda = 0$)

VB	x_1	x_2	E_3	F_1	F_2	A_3	VSM
F_1	30	20	0	1	0	0	λ
F_2	5	10	0	0	1	0	110
A_3	1	0	-1	0	0	1	5
f(A)	0	0	0	0	0	-1	0
f(A)	1	0	-1	0	0	0	5
x_1	1	$^2/_3$	0	$^1/_{30}$	0	0	$^\lambda/_{30}$
F_2	0	$^{20}/_3$	0	$^{-1}/_6$	1	0	$110 - {}^\lambda/_6$
A_3	0	$^{-2}/_3$	-1	$^{-1}/_{30}$	0	1	$5 - {}^\lambda/_{30}$
f(A)	0	$^{-2}/_3$	-1	$^{-1}/_{30}$	0	0	$5 - {}^\lambda/_{30}$

Está terminada a minimização da função artificial (todos os coeficientes na equação da função são não positivos).

O valor mínimo de f(A) não é nulo pois é igual a "$5 - {}^\lambda/_{30}$" que é "5" para $\lambda = 0$.

Nestas condições não se pode iniciar o 2º Passo pelo que concluímos que o problema não tem solução.

Percorrer o intervalo de "λ" quando se atinge o valor "150" temos $f(A) = 5 - {}^\lambda/_{30} = 0$ e a solução fica:

$$x_1 = 5 \; ; \; F_2 = 85 \; ; \; A_3 = 0$$

Conclusão : o problema não tem solução para $\lambda<150$ ou seja $b_3 < 150$.

Para $\lambda = 150$, há que retirar da base a variável artificial $A_3 = 0$ trocando-a por qualquer das VNB da forma-padrão do modelo (x_2 por exemplo).

Da troca de A_3 com x_2 obtém-se o quadro seguinte:

VB	x_1	x_2	E_3	F_1	F_2	A_3	VSM
x_2	0	1	$^3/_2$	$^1/_{20}$	0	$^{-3}/_2$	$^\lambda/_{20} - {}^{15}/_2$
x_1	1	0	-1	0	0	1	5
F_2	0	0	-10	$^{-1}/_2$	1	10	$160 - {}^\lambda/_2$
f(A)	0	0	0	0	0	-1	0

Estamos agora com λ = 150 pelo que a solução é admissível. Como f(A) = 0 damos início ao 2º Passo:

VB	x_1	x_2	E_3	F_1	F_2	A_3	VSM
x_2	0	1	$^3/_2$	$^1/_{20}$	0	$^{-3}/_2$	$^{\lambda}/_{20} - {}^{15}/_2$
x_1	1	0	-1	0	0	1	5
F_2	0	0	-10	$^{-1}/_2$	1	10	$160 - {}^{\lambda}/_2$
f(X)	-6	-8	0	0	0	0	0
f(X)	0	0	6	$^2/_5$	0	-6	$-30 + {}^{2\lambda}/_5$

A solução é admissível (para λ = 150) e satisfaz a regra de paragem pelo que esta é a primeira base óptima.

O limite superior de " λ " que mantém a admissibilidade é " λ = 320 ".

Para " λ > 320 " a variável F_2 tem valor negativo pelo que se efectua uma mudança de base recorrendo ao método Dual-Simplex, trocando F_2 pela variável E_3. A segunda base óptima é então:

VB	x_1	x_2	E_3	F_1	F_2	A_3	VSM
E_3	0	0	1	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	-1	$^{\lambda}/_{20} - 16$
x_2	0	1	0	$^{-1}/_{40}$	$^3/_{20}$	0	$^{-\lambda}/_{40} + {}^{33}/_2$
x_1	1	0	0	$^1/_{20}$	$^{-1}/_{10}$	0	$^{\lambda}/_{20} - 11$
f(X)	0	0	0	$^1/_{10}$	$^3/_5$	0	$^{\lambda}/_{10} + 66$

O limite superior de " λ " onde se mantém a optimalidade desta base é " 660".

Para " λ > 660 " a variável x_2 tem valor negativo pelo que se efectua uma mudança de base recorrendo ao método Dual-Simplex, trocando x_2 pela variável F_1.

A terceira base óptima é então:

VB	x_1	x_2	E_3	F_1	F_2	A_3	VSM
F_1	0	-40	0	1	-6	0	$\lambda - 660$
E_3	0	3	1	0	$^1/_5$	-1	17
x_1	1	2	0	0	$^1/_5$	0	22
f(X)	0	4	0	0	$^6/_5$	0	132

O limite superior de " λ " onde se mantém a optimalidade desta base é "+ ∞ " (estudo terminado).

Resumo do estudo da variação do segundo membro da 1ª restrição técnica ($b_1 \geq 0$)

$b_1 < 150$	$150 \leq b_1 \leq 320$	$320 \leq b_1 \leq 660$	$660 \leq b_1 \leq +\infty$
Problema não tem solução	$x_1 = 5$ $x_2 = {}^{\lambda}/_{20} - {}^{15}/_2$ $f(X) = {}^{2\lambda}/_5 - 30$	$x_1 = {}^{\lambda}/_{20} - 11$ $x_2 = {}^{-\lambda}/_{40} + {}^{33}/_2$ $f(X) = {}^{\lambda}/_{10} + 66$	$x_1 = 22$ $x_2 = 0$ $f(X) = 132$