I. Programação Linear (PL)

1. Introdução

A Programação Linear é, no campo mais vasto da Programação Matemática, uma das variantes de aplicação generalizada em apoio da Decisão.

O termo "Programação" deve entender-se como "Planeamento" e a qualificação "Linear" deixa antever que as relações matemáticas utilizadas são funções lineares.

Tendo em atenção que se Decide para atingir um Objectivo e que tal implica a *aplicação óptima dos recursos disponíveis para actividades alternativas* analise-se o exemplo de uma empresa que pretende Optimizar a produção mensal de dois bens "A" e "B" na situação seguinte:

Recursos críticos disponíveis:	Madeira	300 metros
	Horas de trabalho	110 horas

		Madeira (metros)	Horas de Trabalho (h)
Consumos unitários previstos:	Produto A	30	5
	Produto B	20	10

	Produto A	Produto B
Lucro unitário da venda (€)	6	8

Nesta situação é necessário atender a que:

- O Objectivo a alcançar é Maximizar o lucro total da venda da produção;
- os níveis de produção estão superiormente limitados pelos 300 metros de madeira e 110 horas de trabalho disponíveis;
- são possíveis vários níveis de produção (exº: 1 unidade de A e 2 unidades de B etc.);
- do leque dos possíveis níveis de produção é necessário conhecer qual ou quais podem classificar-se de óptimos à luz do Objectivo a atingir;

Como programar matematicamente esta situação (Modelo Matemático Linear) para obter informação quantificada para o Decisor ?

A formalização matemática é um trabalho laborioso tanto mais difícil quanto mais complexa é a situação de partida, as condicionantes impostas e o objectivo a alcançar, pelo que requer **conhecimento e habilidade.**

Não há regras estabelecidas mas se na situação proposta exercitarmos a nossa curiosidade somos forçosamente conduzidos a interrogarmo-nos sucessivamente como a seguir se expõe:

Primeira pergunta elementar: *Quantas unidades de A e B podem produzir-se nestas condições ?*

Resposta matemática: recorrer a duas **Variáveis de Decisão Não Negativas**:

x_1 = número de unidades de A a produzir

x_2 = número de unidades de B a produzir

Segunda pergunta elementar: *Que valores se podem admitir para as variáveis de Decisão x_1 e x_2 ?*

Resposta matemática:

- em x_1 unidades de A consomem-se $30x_1$ metros de madeira;
- em x_2 unidades de B consomem-se $20x_2$ metros de madeira;
  - não podendo ultrapassar os 300 metros de madeira disponíveis então $30x_1 + 20x_2 \leq 300$
- em x_1 unidades de A consomem-se $5x_1$ horas de trabalho;
- em x_2 unidades de B consomem-se $10x_2$ horas de trabalho;
  - não podendo ultrapassar as 110 horas de trabalho disponíveis então $5x_1 + 10x_2 \leq 110$
  - dada a natureza do problema os valores de x_1 e x_2 devem ser não negativos

Terceira pergunta elementar: *Qual o Objectivo a atingir com a produção de A e B ?*

Resposta matemática:

- o lucro da venda de 1 unidade de A é de 6 € pelo que para x_1 unidades de A é de $6x_1$ euros
- o lucro da venda de 1 unidades de B é de 8 € pelo que para x_2 unidades de B é de $8x_2$ euros
  - o lucro total da venda de x_1 unidades de A e de x_2 unidades de B é de $6x_1 + 8x_2$
  - o Objectivo é conhecer o maior valor que é possível atingir o lucro total "$6x_1 + 8x_2$" ou seja é necessário calcular o extremo superior (condicionado) de uma função linear $f(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2$

Das respostas ensaiadas, obtém-se um Modelo Matemático que pode sistematizar-se do seguinte modo:

OBJECTIVO : Maximizar o Lucro Total da Venda

Max $f(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2$ sendo $f(x_1, x_2)$ a **Função Objectivo do modelo**

RESTRIÇÕES (CONDICIONAMENTOS) TÉCNICAS

Madeira : $30x_1 + 20x_2 \leq 300$

Horas de trabalho : $5x_1 + 10x_2 \leq 110$

RESTRIÇÕES (CONDICIONAMENTOS) LÓGICAS

$x_1, x_2 \geq 0$

2. Geometria do modelo de Programação Linear

Considere-se um sistema de eixos cartesianos com o eixo das abcissas associado a x_1 (produção de A) e o eixo das ordenadas associado a x_2 (produção de B).

Relaxando (enfraquecendo) a condição de desigualdade das restrições técnicas estas passam a ser equações que definem rectas. Cada uma destas rectas divide o espaço plano em duas regiões disjuntas verificando-se a relação de desigualdade apenas em pontos de uma das regiões (sub espaços).

Procedendo deste modo é possível, por intersecção, definir o conjunto de pontos-solução do problema dado e nestes determinar aquele ou aqueles onde a função objectivo tem o seu extremo.

a. Traçado das Rectas e Identificação do Espaço de Soluções admissíveis

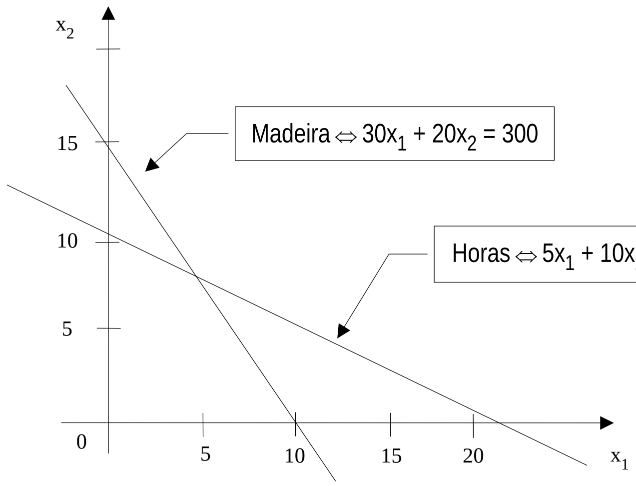
Recta associada a $30x_1 + 20x_2 = 300$:

- para $x_2 = 0$ intersecta o eixo das abcissas em $x_1 = 10$
- para $x_1 = 0$ intersecta o eixo das ordenadas em $x_2 = 15$

Recta associada a $5x_1 + 10x_2 = 110$:

- para $x_2 = 0$ intersecta o eixo das abcissas em $x_1 = 22$
- para $x_1 = 0$ intersecta o eixo das ordenadas em $x_2 = 11$

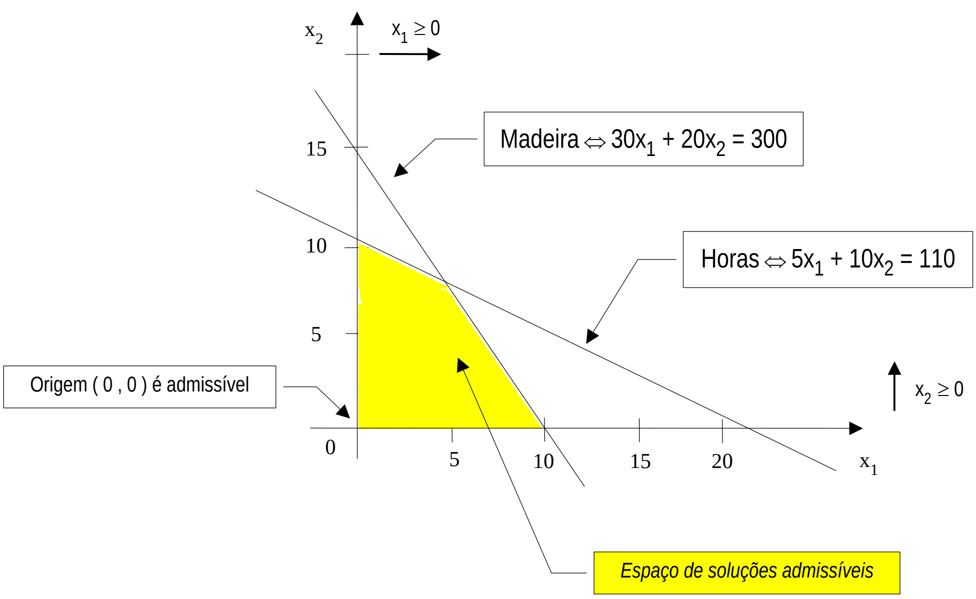
Na figura seguinte apresenta-se o sistema de eixos e as duas rectas:



Atendendo à condição de não negatividade (x_1 , $x_2 \geq 0$) só os pontos do 1º quadrante são solução admissível.

Atendendo a que o ponto origem (0 , 0) satisfaz a relação de desigualdade em cada uma das restrições técnicas, fica explícita a informação necessária para identificar o espaço das soluções admissíveis do problema.

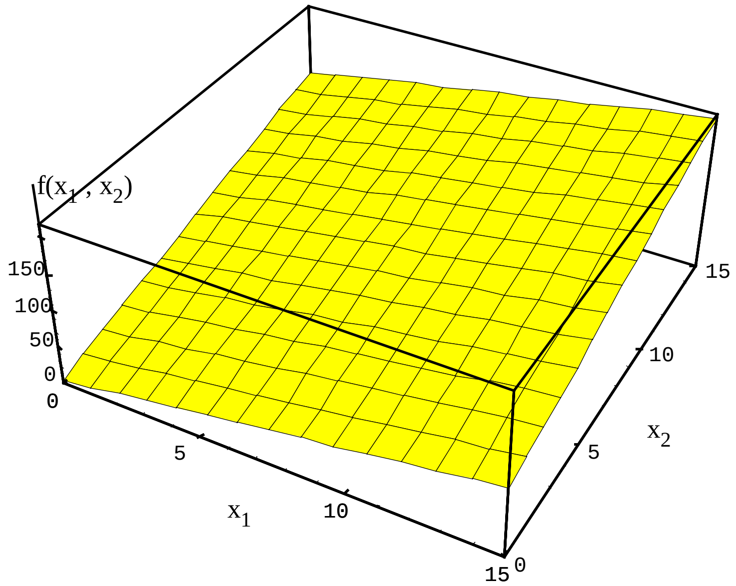
Na figura seguinte apresenta-se o espaço de solução agora identificado:



Qualquer dos pontos pertencentes ao espaço assinalado na figura *satisfaz quer as restrições técnicas quer as restrições lógicas* sendo agora necessário identificar em qual deles a função objectivo atinge o seu valor máximo.

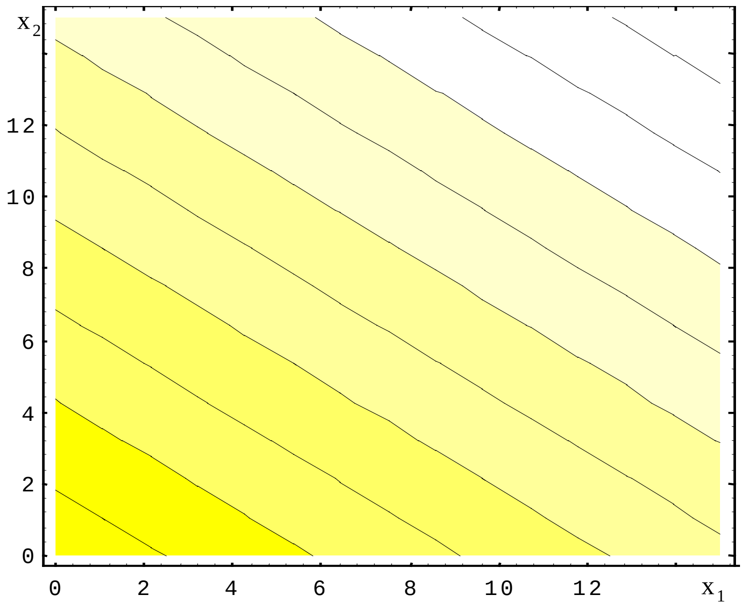
b. Determinação do Ponto Óptimo

O lugar geométrico dos valores possíveis para a função objectivo é o plano apresentado na figura seguinte:



Traçando planos paralelos ao plano horizontal, as intersecções com o plano da figura são rectas paralelas (rectas de nível do plano) onde a função tem o mesmo valor (rectas de isolucro).

Se de um ponto de vista acima do plano olharmos para este numa direcção perpendicular ao plano horizontal, a *imagem que temos é de um conjunto de rectas paralelas* (rectas de nível do plano) como mostra a figura seguinte:

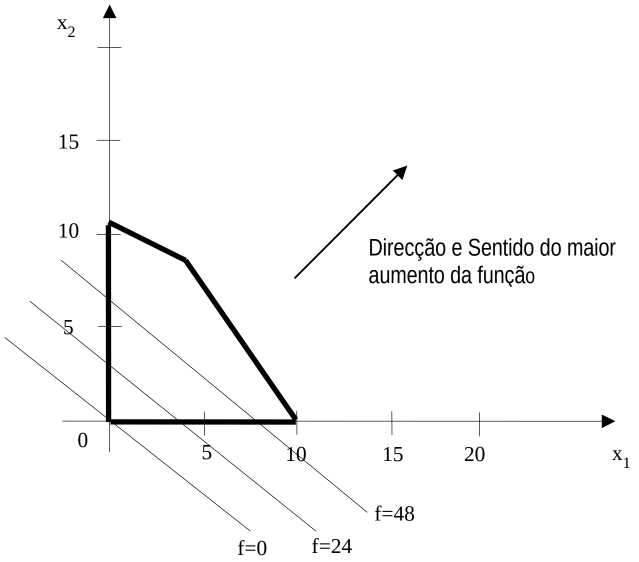


Tem-se assim que, no plano horizontal, podem graficar-se as rectas de isolucro.

De facto se, por exemplo, considerarmos que:

- a função tem valor 48, a equação desta recta de nível é $6x_1 + 8x_2 = 48$;
- a função tem valor 24, a equação desta recta de nível é $6x_1 + 8x_2 = 24$;

Na figura seguinte, tem-se o espaço de solução e as duas rectas de nível agora definidas:

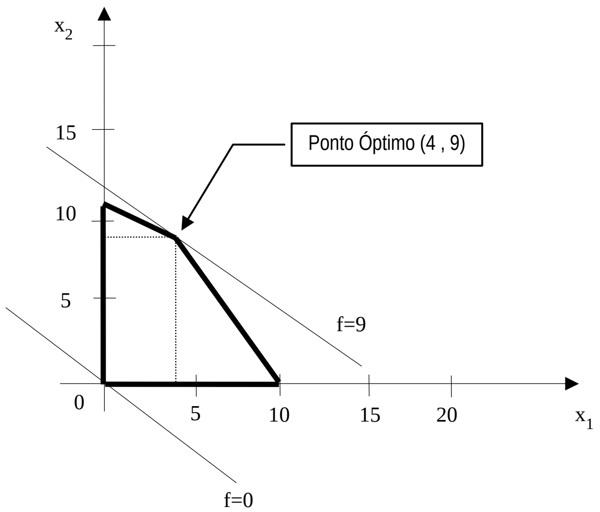


Na figura foi também traçada a recta de nível zero pois passa na origem ($6x_1 + 8x_2 = 0$) e é paralela às rectas anteriormente definidas (família de rectas de nível do plano).

Da análise da figura, verifica-se que o valor da função é tanto maior quanto mais nos afastamos da origem pelo que a última das rectas de nível que se pode traçar contendo um ponto do espaço de solução admissível é a correspondente ao máximo da função. Aquele ponto denomina-se Ponto Óptimo ou Solução Óptima.

Notar que se a esta última recta pertencer mais do que um ponto daquele espaço, haverá várias soluções óptimas alternativas dizendo-se que a solução óptima é Indeterminada ou Múltipla.

A figura seguinte mostra que o ponto de intersecção das rectas $30x_1 + 20x_2 = 300$ e $5x_1 + 10x_2 = 110$ é o Ponto Óptimo com coordenadas $x_1 = 4$ e $x_2 = 9$ sendo o Máximo da função igual a 6(4) + 8(9) = 96 €:



O Plano Óptimo de Produção é portanto de 4 unidades de A e 9 unidades de B a que está associado o lucro máximo de 96 euros.

Veja-se agora outro método para identificação geométrica do ponto óptimo.

Derivando $f(x_1 , x_2) = 6x_1 + 8x_2$ em ordem a cada uma das variáveis obtêm-se as taxas de variação da função em ordem à variação marginal de cada uma das variáveis.

Por definição $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 8$ cujo significado é o seguinte (notar que estamos em espaço linear):

- se x_1 tem um *acréscimo* "k_1" , mantendo-se x_2 constante, a função *aumenta* 6 vezes "k_1" euros
- se x_2 tem um *acréscimo* "k_2" , mantendo-se x_1 constante, a função *aumenta* 8 vezes "k_2" euros

O conjunto das derivadas parciais da função $f(x_1,x_2)$ constitui o GRADIENTE da função (vector):

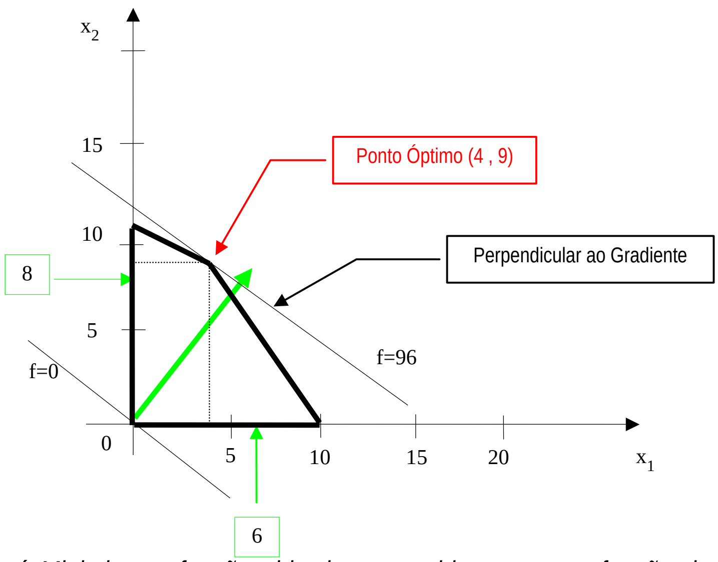
$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Em qualquer ponto $P(x_1 , x_2)$ o Gradiente é perpendicular ao lugar geométrico dos pontos do espaço onde a função tem o mesmo valor que tem em P, ou seja, *o Gradiente da função é perpendicular às rectas de nível da função e indica a direcção e sentido em que a função aumenta mais rapidamente. Pode portanto utilizar-se para identificar o ponto óptimo no espaço de solução admissível.*

Retomando o exemplo precedente, no sistema de eixos grafica-se o Gradiente da função objectivo e traçam-se sucessivas rectas de nível enquanto as mesmas contiverem, pelo menos, um ponto do conjunto de soluções admissíveis.

A última recta que se pode graficar indica o ponto ou pontos em que a função atinge o seu máximo.

Na figura seguinte pode ver-se o Espaço de solução admissível, o Gradiente da função e as Rectas de nível na origem dos eixos (função com valor nulo) e no ponto óptimo (função com valor 96):



Nota: Se o objectivo é Minimizar a função objectivo o sentido em que a função decresce é oposto ao indicado pelo gradiente.

3. Formulação Matemática do Modelo de PL

Um modelo de Programação Linear engloba:

- **"n"** variáveis reais x_1 , x_2 , ... , x_n denominadas Variáveis de Decisão (principais ; controláveis);
- **"m"** condições lineares (m<n) denominadas **Restrições Técnicas** (funcionais) relacionando as Variáveis de Decisão de um dos seguintes modos:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$	$\leq$	b_1
....	ou	.....
....	$=$	.....
....	ou	.....
$a_m x_1 + a_m x_2 + ... + a_m x_n$	$\geq$	b_m

  A matriz de coeficientes das variáveis de decisão denomina-se Matriz Técnica (tecnológica) e o vector-coluna dos termos independentes denomina-se Vector dos Termos Independentes (recursos).

- **"n"** restrições, estabelecendo o conjunto de valores admissíveis (viáveis; aceitáveis) para cada uma das variáveis de decisão, denominadas Restrições Lógicas ($x_j \leq 0$; $x_j \geq 0$; x_j livre ; x_j binária; x_j inteira são exemplos de restrições lógicas);
- **uma Função Linear** das variáveis de decisão $f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$ denominada **Função Objectivo** (expressa um critério pois permite hierarquizar a importância relativa de cada uma das soluções do problema) de que se pretende o **Máximo ou Mínimo.**

  Os coeficientes c_1 , c_2 , ..., c_n das variáveis de decisão denominam-se **Coeficientes da função Objectivo**;

Nos modelos de Maximização as restrições técnicas Típicas são do tipo " $\leq$ "

Nos modelos de Minimização as restrições técnicas Típicas são do tipo " $\geq$ "

A restrição lógica Típica é a condição de não negatividade ($x_j \geq 0$).

(Típica, no sentido de mais frequente)

Nota:

O estudo da programação matemática linear deve ser efectuado recorrendo ao software do autor especificamente desenhado para apoio pedagógico.