X. Pós-Optimização

1. Introdução

O estudo das consequências na solução óptima de alterações discretas nos parâmetros do modelo (coeficientes técnicos, segundos membros, coeficientes da função objectivo, introdução de novas restrições ou variáveis decisionais) denomina-se Pós-Optimização.

2. Alteração Independente da Oferta

Considere-se o seguinte problema de minimização do custo total de transporte (Oferta e Procura em toneladas; custos em u.m.):

O/D	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	19	30	50	10	7
O2	70	30	40	60	9
O3	40	23	70	30	11
O4	12	25	30	25	7
Procura	5	8	7	14	

As soluções óptimas dos problemas Primal e Dual são as seguintes:

Minimização : terminada com f(X)= 808

O/D	D1	D2	D3	D4		Observações
					V.Dual Ui	Solução 3
O1				7	0	Solução Óptima Única
O2		2	7		27	
O3		6		5	20	
O4	5			2	15	
V.Dual Vj	-3	3	13	10		f(X)= 808

Estudar o problema admitindo ser de 10 toneladas a Oferta de O1.

Há um aumento de 3 toneladas na oferta sendo necessário reequilibrar o modelo criando, neste caso, um Destino Fictício (coluna nº 5).

Considera-se $x_{15} = 3$ e recalcula-se a solução Dual como mostra o quadro seguinte:

	D1	D2	D3	D4	Fictício	Var. Dual u_i
O1	19 +	30 +	50 +	10 7	0 3	0
O2	70 +	30 2	40 7	60 +	0 -27	27
O3	40 +	23 6	70 +	30 5	0 -20	20
O4	12 5	25 +	30 +	25 2	0 -15	15
Var. Dual v_j	-3	3	13	10	0	37 = 37

A solução não é óptima.

Mudança de base: Entra $x_{25} = 2$; Sai x_{22}

Nova solução:

	D1	D2	D3	D4	Fictício	Var. Dual u_i
O1	19 +	30 +	50 +	10 9	0 1	0
O2	70 +	30 +	40 7	60 +	0 2	0
O3	40 +	23 8	70 +	30 3	0 -20	20
O4	12 5	25 +	30 -25	25 2	0 -15	15
Var. Dual v_j	-3	3	40	10	0	37 = 37

A solução não é óptima.

Mudança de base: Entra $x_{43} = 1$; Sai x_{15}

Nova solução:

	D1	D2	D3	D4	Fictício	Var. Dual u_i
O1	19 +	30 +	50 +	10 10	0 +	0
O2	70 +	30 +	40 6	60 +	0 3	25
O3	40 +	23 8	70 +	30 3	0 +	20
O4	12 5	25 +	30 1	25 1	0 +	15
Var. Dual v_j	-3	3	15	10	-25	37 = 37

Solução óptima.

Min f(X) = 729 u.m. (custo total diminuiu 79 u.m.)

3. Alteração Independente da Procura

Procede-se de forma similar à da alteração da Oferta mas o reequilíbrio é feito numa Origem Fictícia (já existente ou a criar).

4. Aumento igual e simultâneo da Oferta de uma origem e da Procura de um destino

No modelo proposto, considerar o aumento de 1 tonelada na Oferta de O1 e na Procura de D1.

Comecemos por actualizar, no quadro óptimo corrente, os novos valores da Oferta e Procura:

	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	(19)	(30)	(50)	(10) 7	7 + 1
O2	(70)	(30) 2	(40) 7	(60)	9
O3	(40)	(23) 6	(70)	(30) 5	11
O4	(12) 5	(25)	(30)	(25) 2	7
Procura	5 + 1	8	7	14	35 = 35

O modelo mantém-se equilibrado mas as equações de O1 e D1 não são satisfeitas (solução não admissível).

Para obter uma solução admissível "simula-se a VNB x_{11} = -1" e percorre-se o seu circuito "Stepping Stone" "dizendo":

x_{11} : DESCE 1

x_{14} : SOBE 1

x_{44} : DESCE 1

x_{41} : SOBE 1

Deste modo os novos valores das VB x_{14} e x_{41} garantem o equilíbrio nas equações referidas.

	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	(19) +	(30) +	(50) +	(10) 8	7 + 1 (*)
O2	(70) +	(30) 2	(40) 7	(60) +	9
O3	(40) +	(23) 6	(70) +	(30) 5	11
O4	(12) 6	(25) +	(30) +	(25) 1	7
Procura	5 + 1 (*)	8	7	14	35 = 35

Não houve alteração da base pelo que esta nova solução é óptima com Min f(X) = 773 u.m. (reduz 35 u.m.).

Verifica-se que aumentou o total de carga transportada com redução do custo total o que sempre acontece se para o par "O_i - D_j" há reencaminhamento viável e " $u_i + v_j < 0$ ".

5. Redução igual e simultânea da Oferta de uma origem e da Procura de um destino

No modelo proposto, considerar a redução de 1 tonelada na Oferta de O3 e na Procura de D3.

Comecemos por actualizar, no quadro óptimo corrente, os novos valores da Oferta e Procura:

	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	19	30	50	10 7	7
O2	70	30 2	40 7	60	9
O3	40	23 6	70	30 5	11- 1 (*)
O4	12 5	25	30	25 2	7
Procura	5	8	7 – 1 (*)	14	33 = 33

O modelo mantém-se equilibrado mas as equações de O3 e D3 não são satisfeitas (solução não admissível).

Para calcular a nova solução óptima é necessário recorrer ao circuito da casa do par (O3, D3) onde se simula o aumento de 1 tonelada para provocar a redução do total nas mesmas linha e coluna (ver figura):

	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	19	30	50	10 7	7
O2	70	30 2 + 1	40 7 - 1	60	9
O3	40	23 6 - 1	70	30 5	11- 1 (*)
O4	12 5	25	30	25 2	7
Procura	5	8	7 – 1 (*)	14	33 = 33

Não houve alteração da base pelo que esta nova solução é óptima com Min f(X) = 775 u.m. (reduz 33 u.m.).

6. Aumento da Oferta de uma origem e Redução da Oferta de outra origem

No modelo proposto, considerar o aumento de 1 tonelada na Oferta de O2 e a redução de 1 tonelada na Oferta de O4.

Comecemos por actualizar, no quadro óptimo corrente, os novos valores da Oferta:

	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	[19]	[30]	[50]	[10] 7	7
O2	[70]	[30] 2	[40] 7	[60]	9 + 1 (*)
O3	[40]	[23] 6	[70]	[30] 5	11
O4	[12] 5	[25]	[30]	[25] 2	7 – 1 (*)
Procura	5	8	7	14	34 = 34

O modelo mantém-se equilibrado mas as equações de O2 e O4 não são satisfeitas (solução não admissível).

Para calcular a nova solução óptima é necessário estabelecer um caminho Elementar e Simples, com arcos sucessivos perpendiculares entre si, desde uma VB de O4 (onde há redução da oferta), até uma VB de O2 (onde há aumento da oferta). Ao longo deste caminho procede-se ao ajustamento do valor das VB pela forma usual como mostra a figura seguinte:

	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	[19]	[30]	[50]	[10] 7	7
O2	[70]	[30] 2 + 1	[40] 7	[60]	9 + 1 (*)
O3	[40]	[23] 6 - 1	[70]	[30] 5 + 1	11
O4	[12] 5	[25]	[30]	[25] 2 - 1	7 – 1 (*)
Procura	5	8	7	14	34 = 34

O impacto no valor do custo total é de $+u_2 - u_4 = 27-15 = +12$ u.m.

Não houve alteração da base pelo que esta nova solução é óptima com Min f(X) = 820 u.m.

7. Aumento da Procura de um destino e Redução da Procura de outro destino

No modelo proposto, considerar o aumento de 1 tonelada na Procura de D1 e a redução de 1 tonelada na Procura de D3.

Comecemos por actualizar, no quadro óptimo corrente, os novos valores da Procura:

	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	19	30	50	10 7	7
O2	70	30 2	40 7	60	9
O3	40	23 6	70	30 5	11
O4	12 5	25	30	25 2	7
Procura	5 + 1 (*)	8	7 - 1 (*)	14	34 = 34

O modelo mantém-se equilibrado mas as equações de D1 e D3 não são satisfeitas (solução não admissível).

Para calcular a nova solução óptima é necessário estabelecer um caminho Elementar e Simples, com arcos sucessivos perpendiculares entre si, desde uma VB de D3 (onde há redução da procura), até uma VB de D1 (onde há aumento da procura). Ao longo deste caminho procede-se ao ajustamento do valor das VB pela forma usual como mostra a figura seguinte:

	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	19	30	50	10 7	7
O2	70	30 2 + 1	40 7 - 1	60	9
O3	40	23 6 - 1	70	30 5 + 1	11
O4	12 5 + 1	25	30	25 2 - 1	7
Procura	5 + 1	8	7 - 1	14	34 = 34

Nota: Em D3, só x_{23} permite iniciar um caminho que conduza à coluna 1 mantendo a base admissível.

8. Alteração de um custo unitário de transporte

No modelo proposto, considerar c_{14} = 33 u.m./ton.

Comecemos por actualizar, no quadro óptimo corrente, o novo custo unitário de transporte:

	D1	D2	D3	D4	Var. Dual u_i
O1	19 +	30 +	50 +	33 7	0
O2	70 +	30 2	40 7	60 +	27
O3	40 +	23 6	70 +	30 5	20
O4	12 5	25 +	30 +	25 2	15
Var. Dual v_j	-3	3	13	10	34 = 34

Notar que na VB x_{14} não é satisfeita a igualdade Dual $c_{14} = u_1 + v_4$ pelo que é necessário recalcular a solução Dual:

	D1	D2	D3	D4	Var. Dual u_i
O1	19 -1	30 +	50 +	33 7	0
O2	70 +	30 2	40 7	60 +	4
O3	40 +	23 6	70 +	30 5	-3
O4	12 5	25 +	30 +	25 2	-8
Var. Dual v_j	20	26	36	33	34 = 34

A solução não é óptima.

Mudança de base: Entra x_{11} = 5 ; Sai x_{41}

Nova solução:

	D1	D2	D3	D4	Var. Dual u_i
O1	19 5	30 +	50 +	33 2	0
O2	70 +	30 2	40 7	60 +	4
O3	40 +	23 6	70 +	30 5	-3
O4	12 +	25 +	30 +	25 7	-8
Var. Dual v_j	19	26	36	33	34 = 34

Solução óptima.

Min f(X) = 964 u.m.