INSTITUTO SUPERIOR DE GESTÃO

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

(Exercícios)

(Texto revisto para o ano lectivo 2001-2002)

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O. / ISG

Recomendações

1. **Fazer dez exercícios ou o mesmo exercício 10 vezes ?**

   Em regra obtém-se melhor rendimento executando várias vezes o mesmo exercício, com critério e sentido da descoberta, do que resolvendo vários exercícios com o objectivo enganador de “acertar na solução “.

2. **Exercício feito, tarefa pronta ?**

   Rever criticamente a “história” da execução de um exercício melhora substancialmente a capacidade pessoal de identificação dos problemas e de arquitectar o plano de aplicação do “ferramental” técnico necessário (o quê ; quando ; como).
   A Programação Matemática apela ao “engenho e arte” de quem quer mesmo utilizá-la.

3. **Sim ou não ao software da disciplina ?**

   O “passado escolar” ensina que o recurso intensivo ao software académico, desenhado especificamente para apoio do ensino desta disciplina, traduz-se rapidamente na melhoria do rendimento porque além de permitir exercitar a curiosidade intelectual (vertente fundamental) garante a obtenção rápida de respostas rigorosas e detalhadas para exercícios propostos pelo professor ou gizados pelo próprio aluno (aumento da produtividade).

1. *Métodos da Bissecção e do Gradiente*

1.1. Calcular o Máximo livre de $f(x) = -2x^6 - 3x^4 + 12x$ pelo Método da Bissecção (tolerância = 0.01)

1.2. Calcular o Máximo livre de $f(x) = -0.25x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x$ pelo Método da Bissecção (tolerância = 0.02)

1.3. Calcular o Máximo livre de $f(x_1,x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$ pelo Método do Gradiente

1.4. Calcular o Máximo livre de $f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$ pelo Método do Gradiente.

1.5. Calcular o Máximo livre de $f(x_1, x_2) = 8x_1 - x_1^2 - 12x_2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$ pelo Método do Gradiente.

1.6. Calcular o Mínimo livre de $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 4x_2$ pelo Método do Gradiente.

1.7. Elabore um fluxograma do Método da Bissecção.

1.8. Fundamente e descreva o Método do Gradiente.

2. *Método dos Multiplicadores de Lagrange*

2.1. Descrever o Método dos Multiplicadores de Lagrange à luz do respectivo Teorema.

2.2. Se (X,λ) são soluções das condições de Lagrange para um problema de PNL (maximização) só com restrições de igualdade, pode concluir-se que são todos pontos onde a função atinge o máximo ?

2.3. Calcular pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x_1,x_2) &= x_1x_2 + 2x_1 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + 2x_2 = 60 \end{aligned}$$

2.4. Deduza as condições de 1ª ordem para extremo de:

Max $f(x)$

s.a. $x \geq 0$

2.5. Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange deduza as condições de 1ª ordem para extremo de:

Max $f(x)$

s.a. $g(x) \leq b$

2.6. Calcular pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x_1,x_2) &= 5x_1 - 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

2.7. Calcular pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x_1,x_2) &= 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 - x_2 = 4 \end{aligned}$$

O ponto óptimo é extremo global da função ?

2.8. Calcular pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange o extremo da função:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x_1,x_2) \quad & x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

3. *Programação Não Linear (alguns conceitos fundamentais)*

3.1. Classifique e compare as soluções de modelos de PL e de PNL.

3.2. A solução óptima de um modelo de PNL pode ser atingida em ponto da fronteira do convexo de soluções ?

3.3. A solução óptima de um modelo de PNL pode ser atingida em ponto interior do convexo de soluções ?

3.4. Em PNL o espaço de solução pode não ser convexo ?

3.5. Partindo das respostas ás 4 questões anteriores, aponte as principais diferenças entre soluções de PL e PNL.

3.6. Considere o modelo de PNL:

Max $f(x_1, x_2, \ldots . x_n)$

$$
\begin{array}{llll}
\text{s.a.} & g_1 (x_1, x_2, \ldots . x_n) & (\leq, =, \geq) & b_1 \\
 & g_2 (x_1, x_2, \ldots . x_n) & (\leq, =, \geq) & b_2 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
 & g_m (x_1, x_2, \ldots . x_n) & (\leq, =, \geq) & b_m
\end{array}
$$

Admitindo que o espaço de soluções é convexo em que circunstâncias pode afirmar-se que um máximo local da função-objectivo é solução óptima do modelo de PNL?

3.7. Apresente a matriz Hessiana da função $f = (x_1^3 + 2x_1x_2 + x_2^4)$

3.8. Considere a função <u>não linear</u> $f(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ com <u>segundas derivadas parciais contínuas no conjunto “S”</u>.

Indique as condições a que deve obedecer a matriz Hessiana da função para poder concluir que esta é côncava.

3.9. Considere a função <u>não linear</u> $f(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ com <u>segundas derivadas parciais contínuas no conjunto “S”</u>.

Indique as condições a que deve obedecer a matriz Hessiana da função para poder concluir que esta é convexa.

3.10. Uma empresa produz dois modelos M_1 e M_2 da mesma máquina.

As funções de procura são as seguintes:

modelo M_1 : $150 - 2p_1 - p_2$

modelo M_2 : $200 - p_1 - 3p_2$

em que p_1 e p_2 são os preços de venda de cada um dos modelos.

Calcular os preços de venda que maximizam a receita.

3.11. Verificar se a função $f= x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$ é convexa.

3.12. Considere a função quadrática $f(x_1,x_2) = 2x_1 x_2 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2$

a. Calcular o gradiente da função no ponto $X_1 = (2,3)^T$.

b. Sendo f= 8 no ponto anterior, calcular o valor aproximado da função no ponto $X_2 = (2.1,3.2)^T$ com uma série de Taylor.

3.13. Considerar a função quadrática anterior.

Calcular o vector "V" resultante da diferença dos gradientes da função nos pontos X_1 e X_2 do problema anterior recorrendo exclusivamente à matriz hessiana da função.

3.14. Considere a função $f(x_1,x_2) = 15x_1 + 30x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$

a. Apresentar a função na forma quadrática.

4. *Condições de Karush-Kuhn-Tucker* *(condições KKT)*

4.1. Deduza as condições KKT a partir da função de Lagrange:

$$\text{Max } f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2$$
$$\text{s.a.} \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 4$$

4.2. Deduza as condições KKT a partir da função de Lagrange:

$$\text{Max } f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2$$
$$\text{s.a.} \quad 2x_1 + 2x_2 = 4$$

4.3. Deduza as condições KKT a partir da função de Lagrange e calcule a solução óptima.

$$\text{Min } f(x_1,x_2) \quad x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 5$$
$$\text{s.a.} \quad x_1 - 2 \leq 0$$
$$x_2 - 1 \leq 0$$
$$x_1,x_2 \geq 0$$

4.4. Considere o seguinte problema de programação não linear :

$$\text{Max } f(x_1,x_2) = l_n(x_1+1) + x_2$$
$$\text{s.a.} \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

a. Estabeleça as condições KKT

b. Calcule a solução óptima.

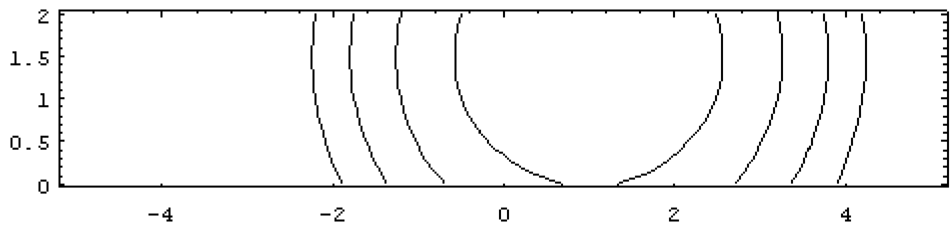
4.5. Considere o seguinte problema de programação não linear :

$$\text{Max } f(x_1,x_2) \quad 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2$$
$$\text{s.a.} \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1,x_2 \geq 0$$

a. Demonstre que o problema é de programação convexa.

b. Calcule a solução óptima pelo Método do Simplex modificado por Wolfe.

c. Verifique geometricamente a solução calculada (a figura apresenta a projecção horizontal das curvas de nível da função).



4.6. Considere o seguinte problema de programação não linear :

$$\text{Max } f(x_1,x_2) = 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$$

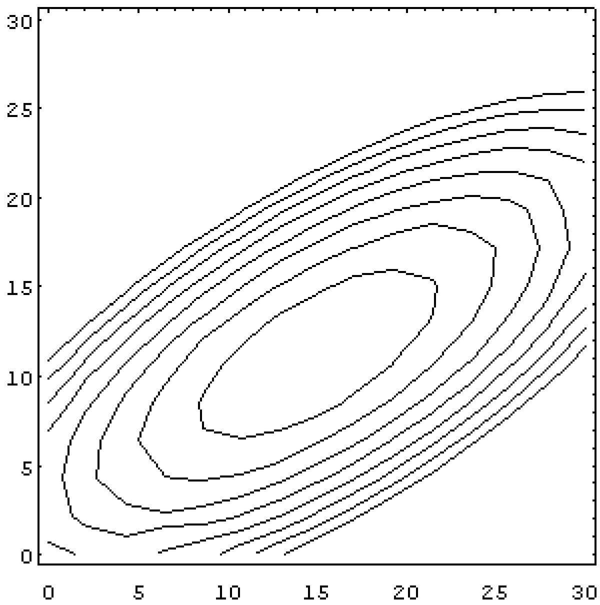
$$\text{s.a.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1,x_2 \geq 0$$

a. Demonstre que o problema é de programação convexa.

b. Calcule a solução óptima pelo Método do Simplex modificado por Wolfe.

c. Verifique geometricamente a solução calculada (a figura apresenta a projecção horizontal das curvas de nível da função).



4.7. Considere o seguinte problema de programação não linear :

$$\text{Max } f(x_1,x_2) = l_n\,(x_1 + 1) - x_2^2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

a. Demonstre que o problema é de programação convexa.

b. Estabeleça as condições KKT.

c. Demonstre que o ponto de coordenadas (3,0) é o ponto onde $f(x_1,x_2)$ atinge o máximo.

4.8. Considere o seguinte problema de programação convexa :

$$\text{Min } f(x_1,x_2x_3) = 2x_1 + x_2^3 + x_3^2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \geq 4$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1 \text{ a } 3)$$

a. Recorrendo ás condições KKT verifique se $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$ pode ser a solução óptima.

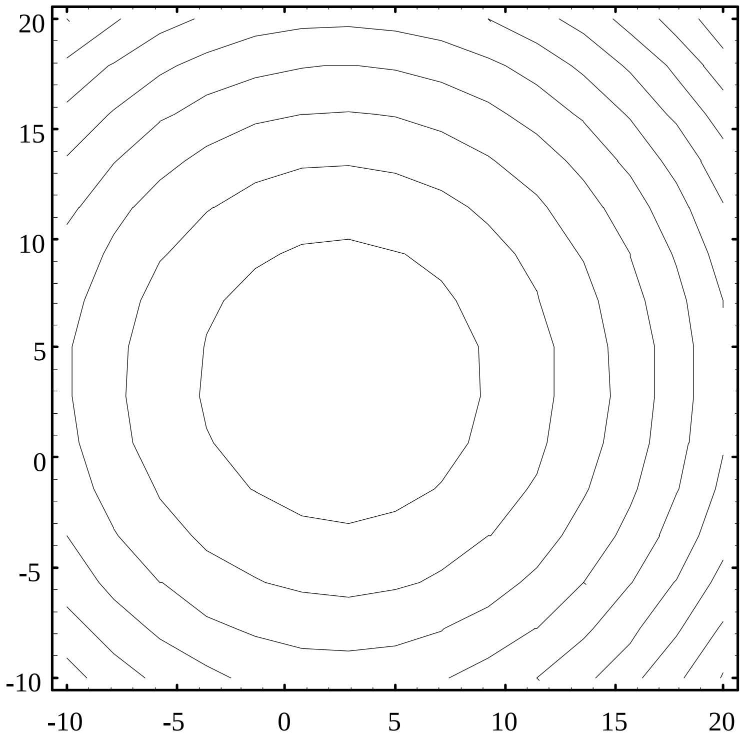
4.9. Descrever a solução óptima de Max f(x) para $a \leq x \leq b$ recorrendo ás condições KKT sabendo que f´(x) existe para qualquer valor no intervalo [a,b].

4.10. Considere o seguinte problema de programação não linear :

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{Min } f(x_1,x_2) & = & (x_1-1)^2 & + & (x_2-2)^2 & - & 3(x_1+x_2) \\ & \text{s.a.} & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\ & & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 \\ & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a. Sabendo que o ponto óptimo X* não pertence à fronteira do convexo de soluções, calcule a solução óptima com base nas condições KKT.

b. Verifique geometricamente a solução calculada (a figura apresenta a projecção horizontal das curvas de nível da função).



4.11. Considere o seguinte problema de programação convexa :

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{Min } f(x_1,x_2) & = & x_1^2 & + & 2x_1 & + & 2x_1x_2 & + & 4x_2^2 \\ & \text{s.a.} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 10 \\ & & & & x_1,x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a. Calcule a solução óptima pelo Método do Simplex modificado por Wolfe.

4.12. Considere o seguinte problema de programação não linear :

$$\text{Min } f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$$

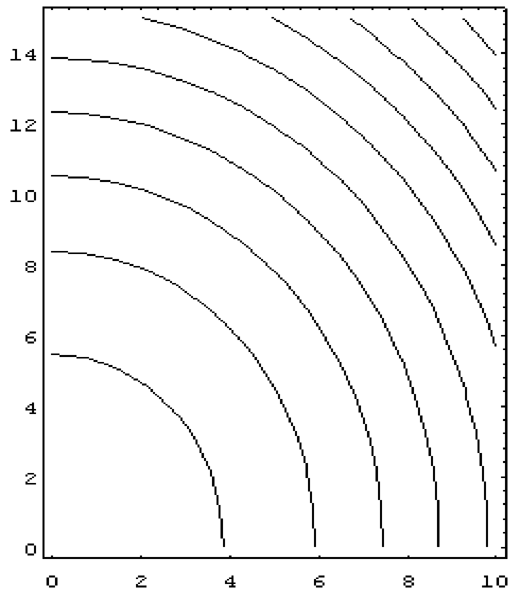
$$\text{s.a. } x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1,x_2 \geq 0$$

a. Demonstre que o ponto de coordenadas (10/3 , 20/3) é o ponto onde $f(x_1,x_2)$ atinge o mínimo.

b. Calcule a solução óptima pelo Método do Simplex modificado por Wolfe.

c. Verifique geometricamente a solução calculada (a figura apresenta a projecção horizontal das curvas de nível da função).



4.13. Considere o seguinte problema de PNL :

$$\text{Max } f(x_1,x_2) = 3x_1 + x_2$$

$$\text{s.a. } x_1^2 + x_2^2 \leq 5$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

a. Calcule a solução óptima recorrendo exclusivamente ás condições KKT.

4.14. Considere o seguinte problema de PNL :

$$\text{Max } f(x) = x_1$$

$$\text{s.a. } x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0$$

$$x_1,x_2 \geq 0$$

a. Verifique que as condições KKT “**falham** “no ponto óptimo e explique porquê.

4.15. Descreva o Método de Lemke (utilizado na Programação Quadrática.).

4.16. Calcule a solução óptima do exercício 4.5 utilizando o Método de Lemke.

4.17. Calcule a solução óptima do exercício 4.6 utilizando o Método de Lemke.

4.18. Calcule a solução óptima do exercício 4.11 utilizando o Método de Lemke.

5. *Métodos de Frank-Wolfe e SUMT*

5.1. Descreva e fundamente o método de Frank-Wolfe (direcções viáveis).

5.2. Considere o seguinte problema de programação convexa :

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x_1,x_2) &= x_1^2 - 6x_1 + x_2^3 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1,x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a. Determine a solução óptima pelo método de Frank-Wolfe.

5.3. Considere o seguinte problema de programação não linear:

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x_1,x_2) &= 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ x_1,x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a. Considere $x_1=5$ e $x_2=5$ como ponto tentativa inicial. Efectue 3 iterações do método de Frank-Wolfe.

5.4. Considere o seguinte problema de programação não linear :

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x_1,x_2) &= 32x_1 - x_1^4 + 8x_2 - x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1,x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a. Calcule a solução óptima recorrendo ao método de Frank-Wolfe, utilizando o programa distribuído (BL.EXE).

5.5. Descreva e fundamente o método SUMT (Sequential Unrestricted Minimization Technique).

5.6. Considere o seguinte problema de programação não linear :

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x_1,x_2) &= 32x_1 - x_1^4 + 8x_2 - x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1,x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a. Calcule a solução óptima recorrendo ao método SUMT, utilizando o programa distribuído (BL.EXE).

6. *Modelos de Programação Não Linear*

6.1. Uma empresa pretende iniciar a produção e venda de dois novos computadores A e B com preços de venda p1 e p2 respectivamente.

A relação entre o número de computadores a produzir do tipo A e os preços de venda é a seguinte:

$$x_1 = 4000 - 10\ p_1 + p_2$$

Notar que se o preço de venda p_1 sobe 1 unidade o total da produção reduz-se em 10 computadores; se no computador do tipo B aumenta o preço de venda em 1 unidade, tal conduz à produção de mais um computador do tipo A.

A relação entre o número de computadores a produzir do tipo B e os preços de venda é a seguinte:

$$x_2 = 2000 - 9p_2 + 0.8\ p_1$$

Das disponibilidades escassas indicam-se as necessidades para cada um dos tipos de aparelho:

	Mão de obra (horas)	Chips
Tipo A	2	3
Tipo B	3	1
Disponibilidade	5000	4500

a. Calcular o Plano Óptimo de Produção (e respectivos preços de venda) recorrendo ás condições KKT.

b. Indicar o contributo interno de 1 hora adicional de mão de obra.

c. Se a empresa decidir não produzir e vender o stock de chips qual o preço a praticar ? Justifique.

6.2. Uma empresa pretende iniciar a produção e venda de três novos tipos de secretária A, B e C com preços de venda respectivamente de p_1 ,p_2 e p_3 para o que pode disponibilizar, mensalmente, 150 horas/máquina e 280 horas de mão de obra.

As relações entre nível da produção e preços de venda são as seguintes:

- nível da produção de A = $18 - p_1$
- nível da produção de B = $9 + 1/3\ p_1 - p_2$
- nível da produção de C = $13 - p_3$

Os consumos por unidade produzida são os seguintes:

Tipo	Horas/máquina	Mão de obra (horas)
A	0.3	0.4
B	0.4	1
C	0.6	0.7

Os preços unitários de produção são, respectivamente, 5, 12 e 9 u.m.

a. Apresentar o modelo de PNL para calcular o Plano Óptimo de Produção.

6.3. Uma empresa tem disponíveis “T” horas de trabalho e “C” unidades monetárias sendo seu objectivo produzir $T^{2/3}.C^{1/3}$ máquinas.

O custo a suportar por hora de trabalho é de 2 u.m. sendo de 1 u.m. por cada unidade de capital aplicado.

Disponibilizando 30 u.m. para a produção quantas máquinas podem ser produzidas?

6.4. Considere-se que no problema anterior se pretende produzir apenas 6 máquinas.

Calcular o capital mínimo a disponibilizar para a produção.

6.5. Uma empresa produz a mesma máquina em Portugal e Espanha.

Se aplicar x_1 unidades monetárias na promoção em Portugal a previsão de vendas é de $6x_1^{1/2}$.

Se aplicar x_2 unidades monetárias na promoção em Espanha a previsão de vendas é de $4x_2^{1/2}$.

O lucro unitário é de 5 u.m. nos dois países.

a. Dispondo de 100 u.m. para promoção como pode a empresa maximizar o lucro?

b. Qual é o aumento de lucro associado ao aumento de 1 u.m. para promoção?

6.6. Uma empresa tem 2 clientes para o mesmo produto "A".

Se produzir x_1 unidades para o cliente X, o preço de venda é de $70-4x_1$ u.m. ; se produzir x_2 unidades para o cliente Y, o preço de venda é de $150-15x_2$ u.m..

Para produzir P unidades tem um custo de $100 + 15P$ ($P>0$).

Quantas unidades produzir para cada um dos clientes ?

INSTITUTO SUPERIOR DE GESTÃO

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

(Soluções dos exercícios)

(Texto revisto para o ano lectivo 2001-2002)

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O. / ISG

1.

1.1.

Método da Bissecção

FUNÇÃO	
Coeficientes	
Var.	Coef.
x^6	-2
x^5	
x^4	-3
x^3	
x^2	
x	12
Const.	

Tolerância

0,01

Pontos Tentativa

A	B
0,00	2,00

Controlo da Tentativa Inicial

OK. df/dx em A é Positiva	12
	OK
OK. df/dx em B é Negativa	-468
	OK

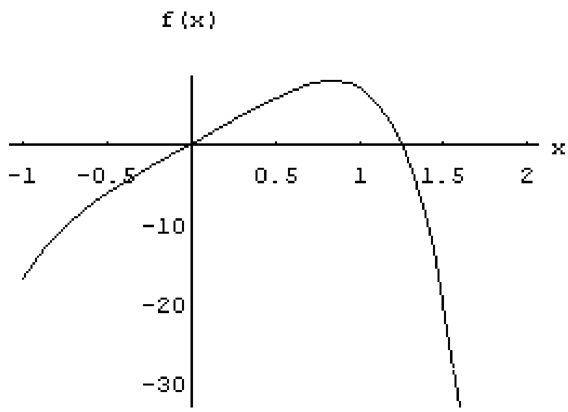
SOLUÇÃO	
f(x) = 7,8838682	
EXTREMO ÓPTIMO	
ABCISSA	0,8281250
	0,8359375
	0,8437500

ÁREA DE CÁLCULO

			Esq(Dir)	Dir(Esq)	Médio		
K	(df/dx)M	Lado de	Ponto "a"	Ponto "b"	M	OK ?	Valor f(M)
			0,000000	2,000000	1,0000000	Não	7,0000000
1	-12,00	b	0,000000	1,000000	0,5000000	Não	5,7812500
2	10,13	a	0,500000	1,000000	0,7500000	Não	7,6948242
3	4,09	a	0,750000	1,000000	0,8750000	Não	7,8438644
4	-2,19	b	0,750000	0,875000	0,8125000	Não	7,8671807
5	1,31	a	0,812500	0,875000	0,8437500	Não	7,8829082
6	-0,34	b	0,812500	0,843750	0,8281250	Não	7,8815042
7	0,51	a	0,828125	0,843750	0,8359375	Sim	7,8838682

Book Bissec.xls. Sheet Sol. 1.1

Analise o gráfico da função:



1.2.

Método da Bissecção

FUNÇÃO	
Coeficientes	
Var.	Coef.
x^6	
x^5	
x^4	-0,25
x^3	1
x^2	-2
x	2
Const.	

Tolerância: 0,02

Pontos Tentativa	
A	B
0,00	2,40

Controlo da Tentativa Inicial

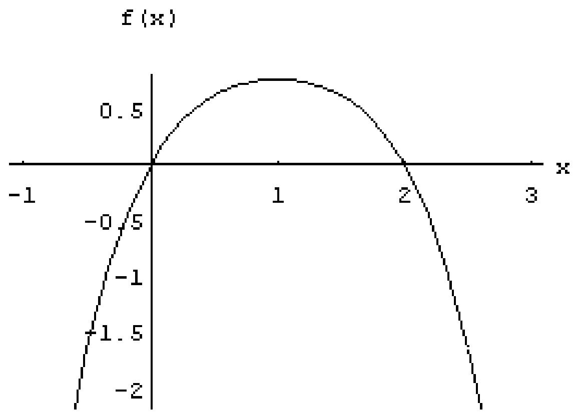
OK. df/dx em A é Positiva	2,00
	OK
OK. df/dx em B é Negativa	-4,14
	OK

SOLUÇÃO	
f(x) = 0,7499805	
EXTREMO ÓPTIMO	
ABCISSA	0,9750000
	0,9937500
	1,0125000

ÁREA DE CÁLCULO			Esq(Dir)	Dir(Esq)	Médio		
			Ponto "a"	Ponto "b"	M	OK ?	Valor f(M)
K	(df/dx)M	Lado de	0,000000	2,400000	1,2000000	Não	0,7296000
1	-0,21	b	0,000000	1,200000	0,6000000	Não	0,6636000
2	0,46	a	0,600000	1,200000	0,9000000	Não	0,7449750
3	0,10	a	0,900000	1,200000	1,0500000	Não	0,7487484
4	-0,05	b	0,900000	1,050000	0,9750000	Não	0,7496874
5	0,03	a	0,975000	1,050000	1,0125000	Não	0,7499219
6	-0,01	b	0,975000	1,012500	0,9937500	Sim	0,7499805

Book Bissec.xls Sheet Sol. 1.2

Analise o gráfico da função:



1.3. Considerando como ponto tentativa inicial X_0 = (1,1) e a tolerância de 0.01, da aplicação do Método do Gradiente resulta o seguinte:

Quadro 1 - Determinação das coordenadas de X_{k+1} em ordem ao parâmetro "t"

	Ponto Tentativa X_0		Gradiente em X_0		Abcissa de X_{k+1}		Ordenada de X_{k+1}	
Iter.	x_1	x_2	x_1	x_2	a	bt	c	dt
1	1.00000	1.00000	-2.00000	0.00000	1.00000	-2.00000	1.00000	0.00000
2	0.50000	1.00000	0.00000	1.00000	0.50000	0.00000	1.00000	1.00000
3	0.50000	1.25000	-0.50000	0.00000	0.50000	-0.50000	1.25000	0.00000
4	0.37549	1.25000	-0.00195	0.24902	0.37549	-0.00195	1.25000	0.24902
5	0.37500	1.31262	-0.12523	-0.00048	0.37500	-0.12523	1.31262	-0.00048
6	0.34385	1.31250	-0.00042	0.06228	0.34385	-0.00042	1.31250	0.06228
7	0.34375	1.32815	-0.03129	-0.00009	0.34375	-0.03129	1.32815	-0.00009
8	0.33596	1.32813	-0.00008	0.01558	0.33596	-0.00008	1.32813	0.01558
9	0.33594	1.33203	-0.00780	0.00002				

Book Gradient.xls Sheet 1.3

Na iteração 9 as derivadas parciais de $f(x_1,x_2)$ têm valor absoluto inferior à tolerância 0.01 (termina processo iterativo).

Solução : x_1 = 0.33594 ; x_2 = 1.33203 ; f (x_1, x_2) = 4.6663

Nota: A solução exacta é x_1 = 1/3 ; x_2 = 4/3 ; $f(x_1,x_2)$ = 14/3.

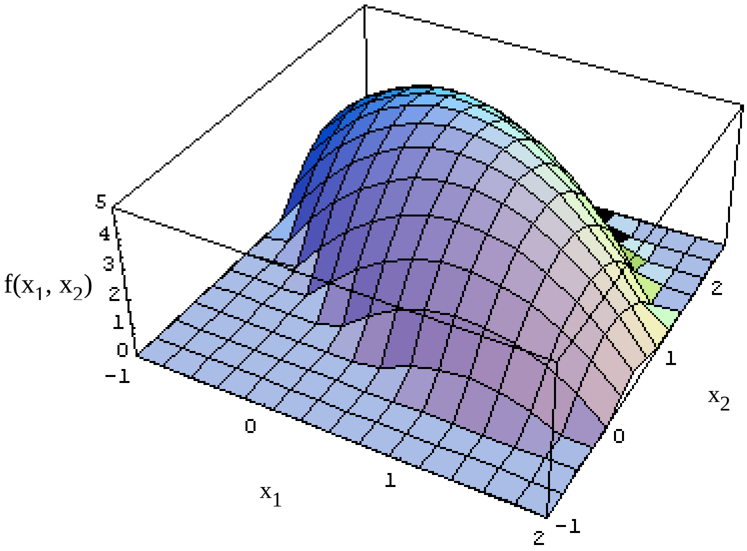
Para cada uma das iterações foi organizada a função f (x_1,x_2) com x_1 e x_2 parametrizados e calculado o seu máximo. Os resultados obtidos são apresentados no quadro seguinte:

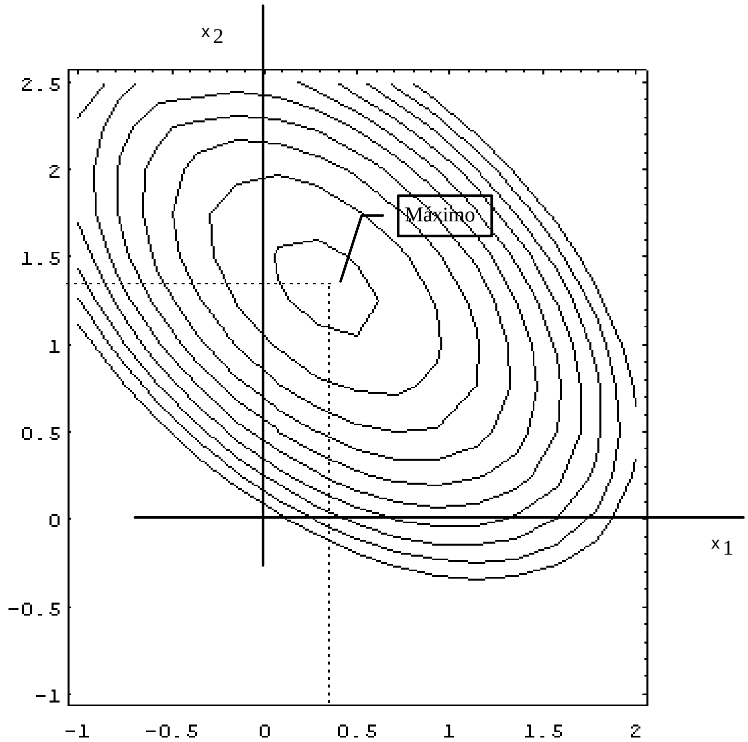
Quadro 2 - Determinação do valor óptimo "t^*" onde f (x_1,x_2) atinge o máximo

Iter.	t^2	t	Constante	t* (óptimo)	Valor de f(x_1, x_2)
1	-8.000	4.000	4.0000	0.251	4.00000
2	-2.000	1.000	4.5000	0.251	4.50000
3	-0.500	0.250	4.6250	0.250	4.62500
4	-0.123	0.062	4.6562	0.252	4.65625
5	-0.031	0.016	4.6641	0.249	4.66406
6	-0.008	0.004	4.6660	0.252	4.66602
7	-0.002	0.001	4.6665	0.250	4.66650
8	0.000	0.000	4.6666	0.251	4.66663

Book Gradient.xls Sheet 1.3

Nas figuras seguintes apresentam-se o gráfico da função e a projecção horizontal das curvas de nível da função.





1.4. Considerando como ponto tentativa inicial X_0 = (0.1,0.1) e a tolerância de 0.01, da aplicação do Método do Gradiente resulta o seguinte:

Quadro 1 - Determinação das coordenadas de X_{k+1} em ordem ao parâmetro "t"

	Ponto Tentativa X_0		Gradiente em X_0		Abcissa de X_{k+1}		Ordenada de X_{k+1}	
Iter.	x_1	x_2	x_1	x_2	a	bt	c	dt
1	0.10000	0.10000	0.00000	1.80000	0.10000	0.00000	0.10000	1.80000
2	0.10000	0.27719	0.35438	1.09125	0.10000	0.35438	0.27719	1.09125
3	0.19784	0.57849	0.76128	0.08174	0.19784	0.76128	0.57849	0.08174
4	0.63738	0.62568	-0.02339	0.77203	0.63738	-0.02339	0.62568	0.77203
5	0.63175	0.81154	0.35959	0.01733	0.63175	0.35959	0.81154	0.01733
6	0.83351	0.82126	-0.02450	0.38197	0.83351	-0.02450	0.82126	0.38197
7	0.82785	0.90949	0.16327	0.01774	0.82785	0.16327	0.90949	0.01774
8	0.93952	0.92163	-0.03578	0.19253	0.93952	-0.03578	0.92163	0.19253
9	0.93230	0.96044	0.05628	0.02284	0.93230	0.05628	0.96044	0.02284
10	0.98625	0.98234	-0.00782	0.04315	0.98625	-0.00782	0.98234	0.04315
11	0.98469	0.99095	0.01252	0.00559	0.98469	0.01252	0.99095	0.00559
12	0.99707	0.99647	-0.00119	0.00824				

Book Gradient.xls Sheet 1.4

Na iteração 12 as derivadas parciais de $f(x_1,x_2)$ têm valor absoluto inferior à tolerância 0.01 (termina processo iterativo)

Solução : x_1 = 0.99707 ; x_2 = 0.99647 ; f (x_1 ,x_2) = 0.99988

Nota : A solução exacta é x_1 = 1 ; x_2 = 1 ; $f(x_1,x_2)$ = 1.

Para cada uma das iterações foi organizada a função f (x_1,x_2) com x_1 e x_2 parametrizados e calculado o seu máximo. Os resultados obtidos são apresentados no quadro seguinte.

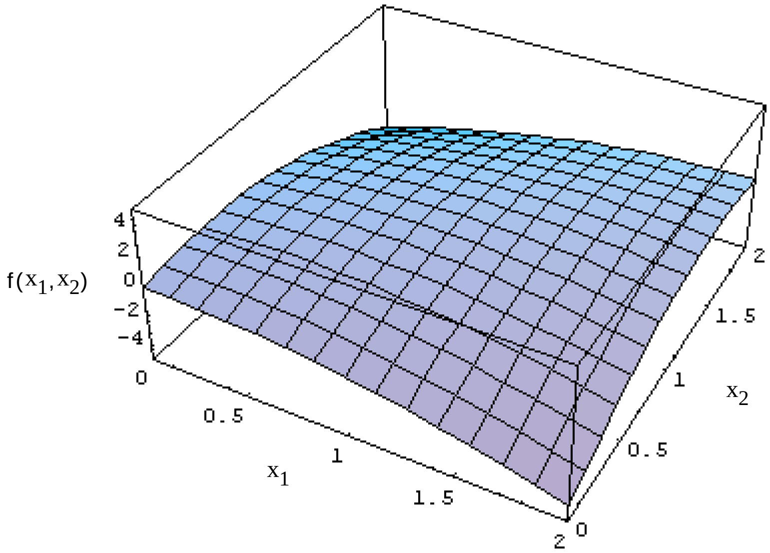
Quadro 2 - Determinação do valor óptimo "t^*" onde f (x_1, x_2) atinge o máximo

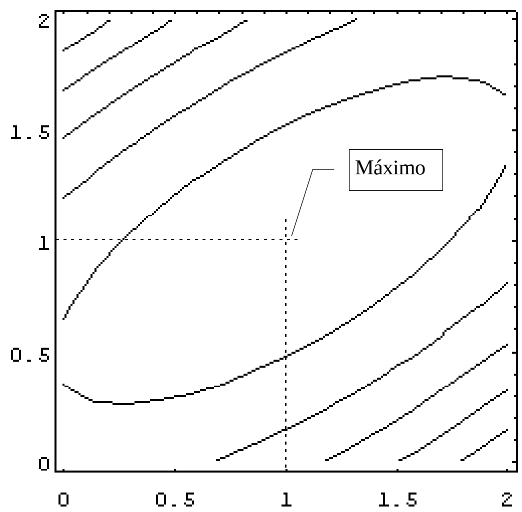
Iter.	t^2	t	Constante	t* (óptimo)
1	-6.480	3.240	0.190	0.099
2	-1.733	1.316	0.446	0.277
3	-0.467	0.586	0.677	0.578
4	-1.233	0.597	0.860	0.241
5	-0.115	0.130	0.932	0.562
6	-0.316	0.146	0.968	0.232
7	-0.020	0.027	0.985	0.685
8	-0.095	0.038	0.994	0.203
9	-0.001	0.004	0.998	0.960
10	-0.005	0.002	1.000	0.200
11	0.000	0.000	1.000	0.990

Valor de f(x_1 , x_2)
0.19000
0.44615
0.67744
0.85975
0.93216
0.96790
0.98514
0.99354
0.99764
0.99967
0.99988

Book Gradient.xls Sheet 1.4

Nas figuras seguintes apresentam-se o gráfico da função e a projecção horizontal das curvas de nível da função.





1.5. Considerando como ponto tentativa inicial X_0 = (0.1,0.1) e a tolerância de 0.01, da aplicação do Método do Gradiente resulta o seguinte:

Quadro 1 - Determinação das coordenadas de X_{k+1} em ordem ao parâmetro "t"

	Ponto Tentativa X_0		Gradiente em X_0		Abcissa de X_{k+1}		Ordenada de X_{k+1}	
It	x_1	x_2	x_1	x_2	a	bt	c	dt
1	0,10000	0,10000	8,00000	-12,20000	0,10000	8,00000	0,10000	-12,20000
2	1,61563	-2,21133	0,34609	0,07656	1,61563	0,34609	-2,21133	0,07656
3	1,70891	-2,19069	0,20080	0,18058	1,70891	0,20080	-2,19069	0,18058
4	1,73636	-2,16600	0,19527	0,13673	1,73636	0,19527	-2,16600	0,13673
5	1,76458	-2,14624	0,17835	0,11413	1,76458	0,17835	-2,14624	0,11413
6	1,79036	-2,12975	0,15979	0,09970	1,79036	0,15979	-2,12975	0,09970
7	1,81346	-2,11533	0,14242	0,08825	1,81346	0,14242	-2,11533	0,08825
8	1,83376	-2,10275	0,12697	0,07853	1,83376	0,12697	-2,10275	0,07853
9	1,85162	-2,09171	0,11335	0,07007	1,85162	0,11335	-2,09171	0,07007
10	1,86734	-2,08199	0,10135	0,06264	1,86734	0,10135	-2,08199	0,06264
11	1,88119	-2,07343	0,09076	0,05609	1,88119	0,09076	-2,07343	0,05609
12	1,89342	-2,06587	0,08142	0,05032	1,89342	0,08142	-2,06587	0,05032
13	1,90439	-2,05909	0,07304	0,04514	1,90439	0,07304	-2,05909	0,04514
14	1,91409	-2,05309	0,06563	0,04056	1,91409	0,06563	-2,05309	0,04056
15	1,92281	-2,04771	0,05897	0,03644	1,92281	0,05897	-2,04771	0,03644
16	1,93053	-2,04294	0,05307	0,03280	1,93053	0,05307	-2,04294	0,03280
17	1,93747	-2,03864	0,04777	0,02952	1,93747	0,04777	-2,03864	0,02952
18	1,94372	-2,03478	0,04299	0,02657	1,94372	0,04299	-2,03478	0,02657
19	1,94935	-2,03130	0,03869	0,02391	1,94935	0,03869	-2,03130	0,02391
20	1,95434	-2,02822	0,03488	0,02156	1,95434	0,03488	-2,02822	0,02156
21	1,95883	-2,02544	0,03145	0,01944	1,95883	0,03145	-2,02544	0,01944
22	1,96289	-2,02294	0,02835	0,01752	1,96289	0,02835	-2,02294	0,01752
23	1,96654	-2,02068	0,02556	0,01580	1,96654	0,02556	-2,02068	0,01580
24	1,96984	-2,01864	0,02304	0,01424	1,96984	0,02304	-2,01864	0,01424
25	1,97276	-2,01683	0,02081	0,01286	1,97276	0,02081	-2,01683	0,01286
26	1,97540	-2,01520	0,01879	0,01161	1,97540	0,01879	-2,01520	0,01161
27	1,97779	-2,01373	0,01697	0,01049	1,97779	0,01697	-2,01373	0,01049
28	1,97994	-2,01240	0,01532	0,00947	1,97994	0,01532	-2,01240	0,00947
29	1,98189	-2,01119	0,01384	0,00855	1,98189	0,01384	-2,01119	0,00855
30	1,98365	-2,01011	0,01249	0,00772	1,98365	0,01249	-2,01011	0,00772
31	1,98523	-2,00913	0,01128	0,00697	1,98523	0,01128	-2,00913	0,00697
32	1,98666	-2,00824	0,01019	0,00630	1,98666	0,01019	-2,00824	0,00630
33	1,98796	-2,00744	0,00920	0,00569	1,98796	0,00920	-2,00744	0,00569

Book Gradient.xls Sheet 1.5

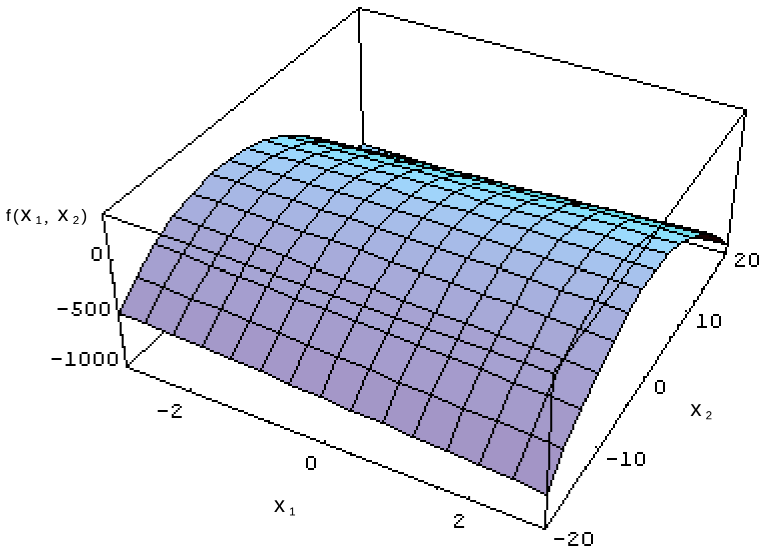
Na iteração 33 as derivadas parciais de $f(x_1,x_2)$ têm valor absoluto inferior à tolerância 0.01 (termina processo iterativo)

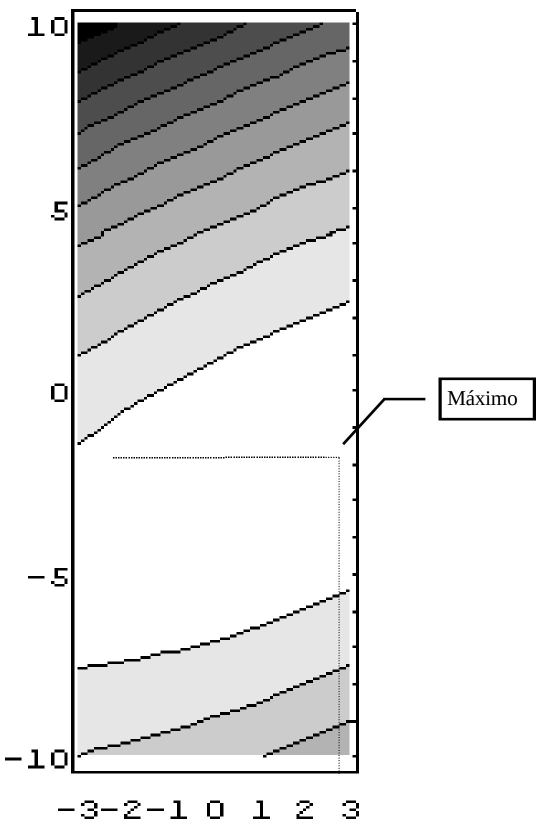
Solução : x_1 = 1.98796 ; x_2 = -2.00744 ; f (x_1,x_2) = 19,9999234

Nota : A solução exacta é x_1 = 2 ; x_2 = -2 ; $f(x_1,x_2)$ = 20

Para cada uma das iterações foi organizada a função f (x_1,x_2) com x_1 e x_2 parametrizados e calculado o seu máximo pelo método da Bissecção.

Nas figuras seguintes apresentam-se o gráfico da função e a projecção horizontal das curvas de nível da função.





1.6. Considerando como ponto tentativa inicial X_0 = (0,0) e a tolerância de 0.01, da aplicação do Método do Gradiente, na função simétrica, resulta o seguinte:

Quadro 1 - Determinação das coordenadas de X_{k+1} em ordem ao parâmetro "t"

	Ponto Tentativa X_0		Gradiente em X_0		Abcissa de X_{k+1}		Ordenada de X_{k+1}	
Iter.	x_1	x_2	x_1	x_2	a	bt	c	dt
1	0.00000	0.00000	4.00000	-4.00000	0.00000	4.00000	0.00000	-4.00000
2	0.76800	-0.76800	0.02203	-0.02203	0.76800	0.02203	-0.76800	-0.02203
3	0.77111	-0.77111	-0.00143	0.00143	0.77111	-0.00143	-0.77111	0.00143

Book Gradient.xls Sheet 1.6

Na iteração 3 as derivadas parciais de $-f(x_1,x_2)$ têm valor absoluto inferior à tolerância 0.01 (termina processo iterativo)

Solução : x_1 = 0.77111 ; x_2 = -0.77111 ; $f(x_1, x_2)$ = -3.437

Nota :Para cada uma das iterações foi organizada a função $-f(x_1,x_2)$ com x_1 e x_2 parametrizados e calculado o seu máximo. Os resultados obtidos são apresentados no quadro seguinte:

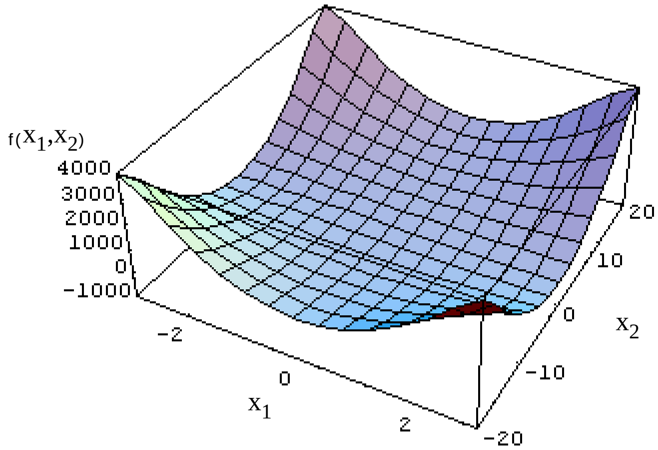
Quadro 2 - Determinação do valor óptimo "t^*" onde $f(x_1,x_2)$ atinge o máximo

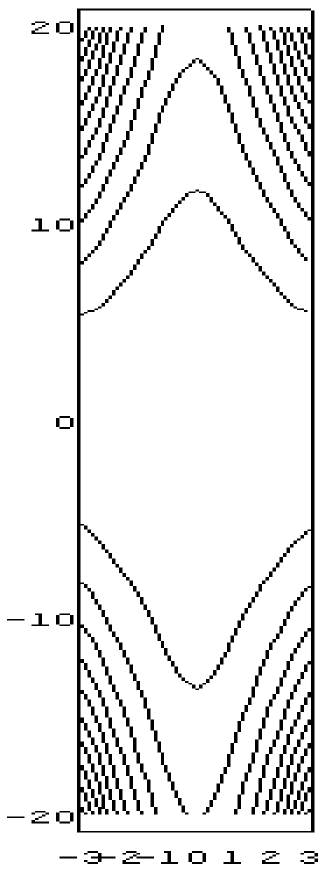
Iter.	t^4	t^3	t^2	t	Constante	t* (óptimo)
1	-256.000	0.000	-64.000	32.000	0.000	0.192
2	0.000	0.000	-0.003	0.001	3.437	0.141
3	0.000	0.000	0.000	0.000	3.437	0.141

Valor de $f(x_1, x_2)$
0.00000
-3.43681
-3.43688

Book Gradient.xls Sheet 1.6

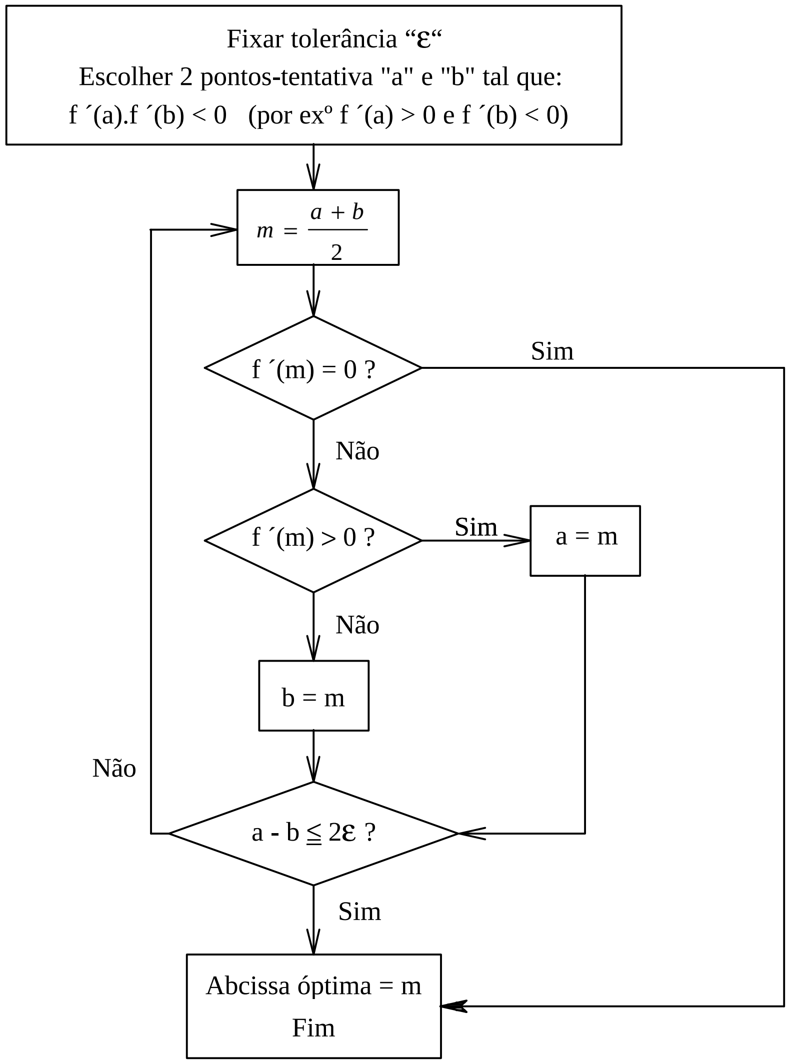
Nas figuras seguintes apresentam-se o gráfico da função e a projecção horizontal das curvas de nível da função.



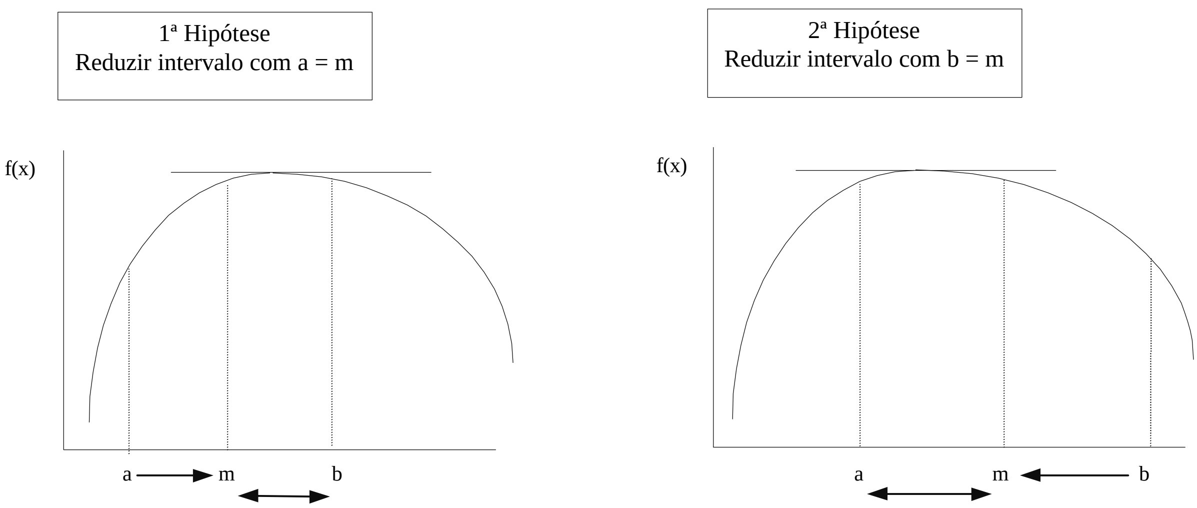


1.7. O método da bissecção determina a abcissa do extremo de uma função <u>monovariável</u> no intervalo [a,b].

Fluxograma do método:

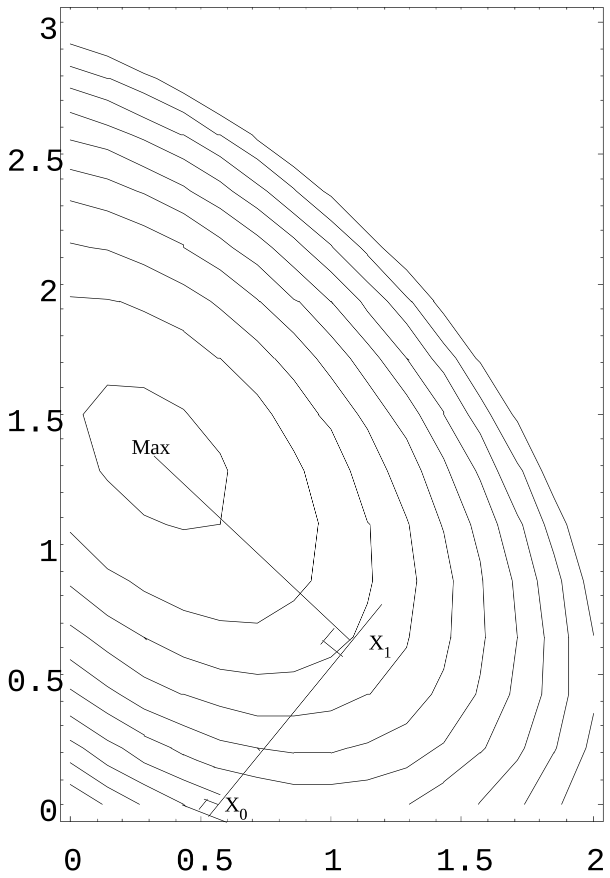


A figura seguinte visualiza os pontos “a” , “b” e “m” da primeira iteração:



1.8. Aspectos essenciais que fundamentam o método:

1. O valor do gradiente da função num ponto X_k , indica a direcção e sentido de crescimento da função naquele ponto.
2. O vector-gradiente, no ponto X_k , é perpendicular à curva de nível da função a que pertence X_k e <u>indica a direcção e sentido</u> de maior aumento da função o que não deve ser confundido com caminho mais curto para atingir o extremo desta (ver figura).



3. No ponto X_k , conhecendo a direcção e sentido de maior aumento da função, é <u>necessário calcular o tamanho do deslocamento</u> (passo) para atingir o ponto X_{k+1} de coordenadas:

$$X_{k+1} = X_k + p\ \nabla f_{X_k}$$

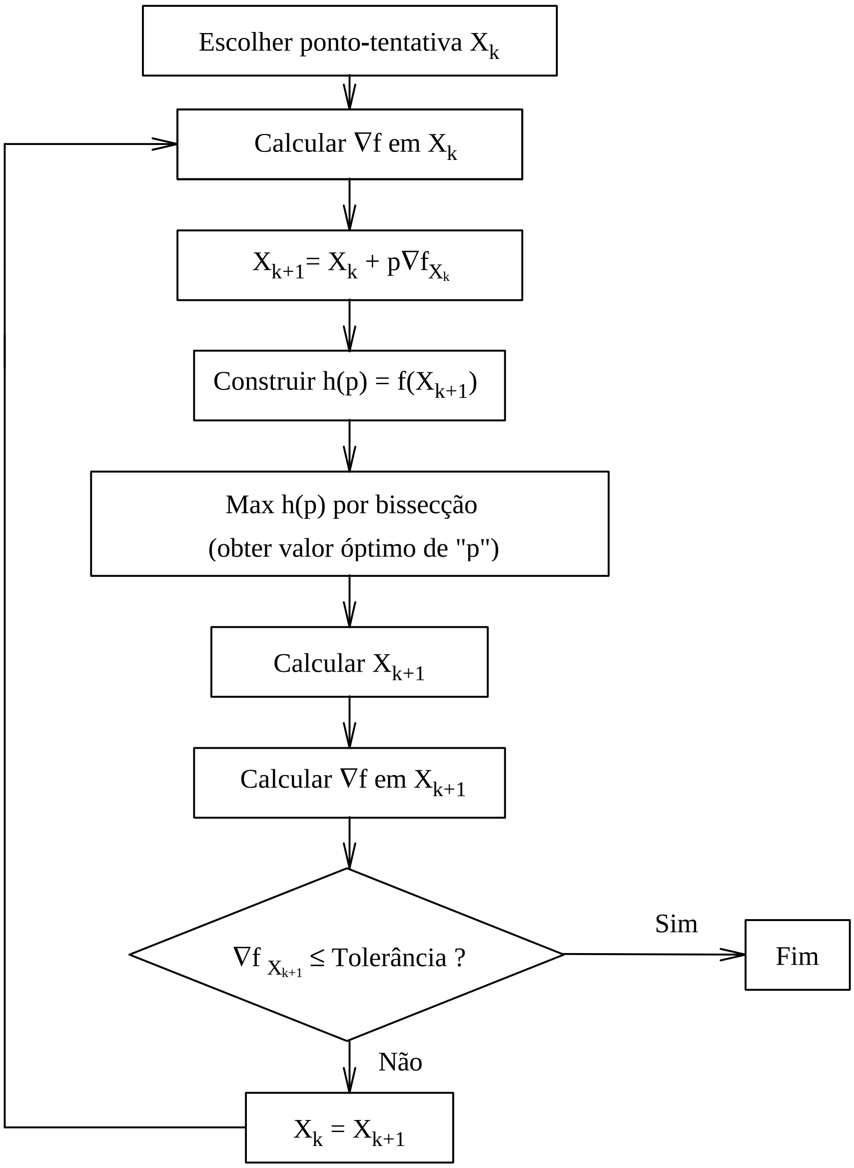
onde a função tem o seu <u>*maior valor naquela direcção e sentido*</u>(ver figura).

Com as coordenadas de X_{k+1} expressas em função de “p”:

- coloca-se f(X) em ordem a “p” (dispõe-se de uma função monovariável h(p) para maximizar);
- pelo método da bissecção calcula-se o <u>valor óptimo</u> de “p”;
- calculam-se as coordenadas de X_{k+1} por substituição de “p”.

4. Em X_{k+1} calcula-se o valor do gradiente da função (que se sabe ser nulo no óptimo) e compara-se com a tolerância fixada. Se satisfaz é interrompido o cálculo (regra de paragem) repetindo-se o procedimento descrito no caso contrário.

Fluxograma do Método do Gradiente:



2.

2.1 <u>Teorema dos multiplicadores de Lagrange</u>

Dado o problema de PNL:

Max $f_0(X)$

s.a. $f_i(X) = 0$ $(i = 1, ..., m)$

se :

- X^* é um <u>máximo local</u>, ***e***
- $n > m$ (há mais variáveis do que restrições), ***e***
- f_i têm primeiras derivadas parciais contínuas em ordem a x_j, ***e***
- os gradientes $\nabla f_i(X^*)$ são vectores linearmente independentes,

então há um vector $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m]^T$ tal que :

$$\boxed{\nabla f_0(X^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(X^*) = 0}$$

em que:

- $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ são denominados *multiplicadores de Lagrange*;

- a condição da independência linear de $\nabla f_i(X^*)$ é denominada *restrição de qualificação*.

O teorema sugere o seguinte método para resolver problemas de PNL **<u>só com restrições de igualdade</u>**:

- Verificar se $n > m$ e se todas as f_i têm derivadas parciais contínuas
- Considerar a Função de Lagrange :

$$\boxed{L(X,\lambda) = f_0(X) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(X)}$$

- Calcular ***todas as soluções*** (X^*, λ^*) para o sistema de equações algébricas não lineares:

$$\boxed{\nabla L(X,\lambda) = \nabla f_0(X) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(X) = 0 \quad (\underline{n}\ equações)}$$

$$\boxed{\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial \lambda_i} = -f_i(X) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (\underline{m}\ equações)}$$

  Estas equações representam as ***condições de Lagrange*** sendo os pontos (X,λ) os ***pontos de Lagrange***.

- Analisar cada uma das soluções (X^*, λ^*) <u>para verificar se é maximizante</u>.

2.2 A resposta é negativa pois que o teorema não garante que as soluções das condições de Lagrange são pontos óptimos (onde a função-objectivo atinge o máximo) ou mesmo que sejam pontos de estacionaridade; o que o teorema garante é que qualquer ponto onde não se verifiquem as condições de Lagrange não é garantidamente ponto-óptimo. Resumindo, as condições de Lagrange <u>são condição necessária</u> para uma solução ser considerada óptima mas <u>não são condição suficiente</u> excepto ***no caso de solução única em que pode concluir-se imediatamente que a mesma é óptima.***

2.3

1. n=2 e m=1 portanto tem-se n > m

   O gradiente da restrição é:

   $$\nabla f_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   pelo que $\partial f_i / \partial x_j$ é contínua.

2. Construir a função Lagrangeana:

   $L(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) - \lambda(4x_1 + 2x_2 - 60) = x_1x_2 + 2x_1 - \lambda(4x_1 + 2x_2 - 60)$

   (Notar que sendo $(4x_1 + 2x_2 - 60) = 0$ maximizar "L" é maximizar a função-objectivo)

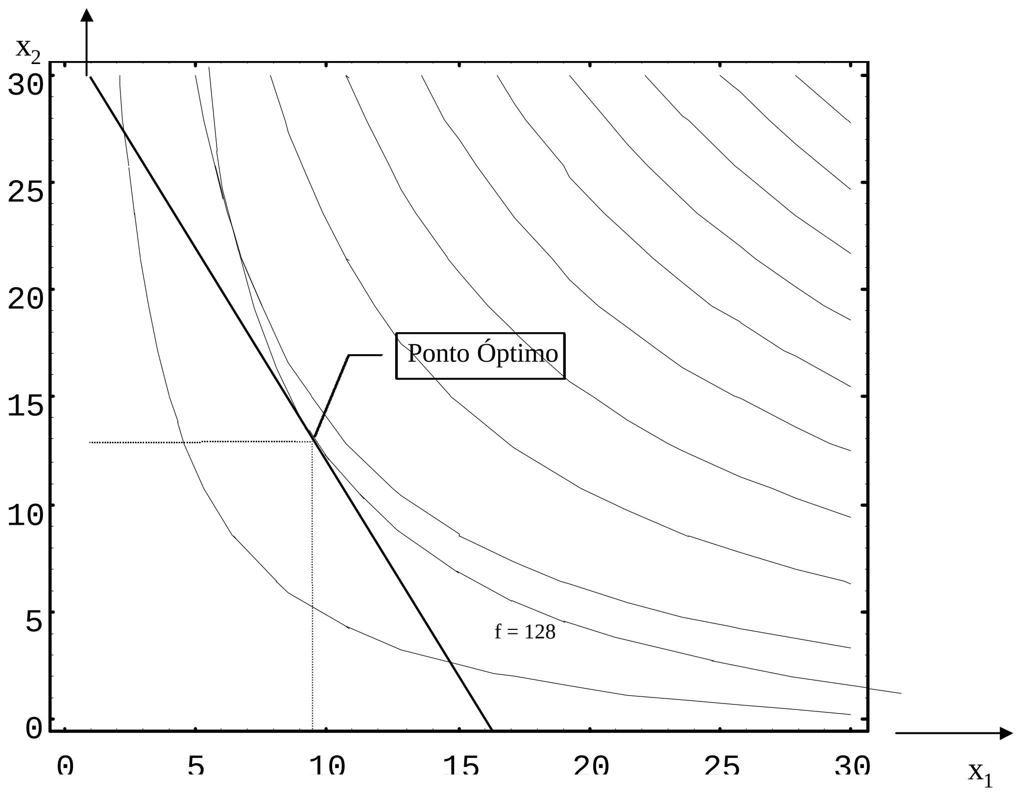
3. Calcular as derivadas parciais de 1ª ordem, igualar a zero e resolver o sistema de equações:

$$\left|\begin{array}{lcll} \partial L / \partial x_1 & = & x_2 + 2 - 4\lambda & = 0 \\ \partial L / \partial x_2 & = & x_1 - 2\lambda & = 0 \\ \partial L / \partial \lambda & = & -4x_1 - 2x_2 + 60 & = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1 = 8 \\ x_2 = 14 \\ \lambda = 4 \end{array}$$

A solução que satisfaz as condições de Lagrange <u>é única</u> pelo que é óptima (Max f = 128):

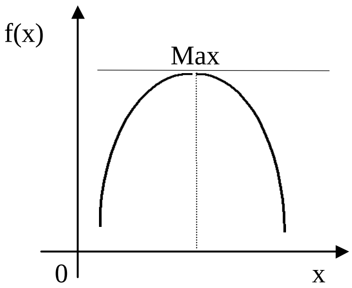
$$X = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda = 4$$

A figura seguinte apresenta a projecção horizontal das curvas de nível da função.



2.4 Sendo a variável **não negativa** as situações possíveis são:

1ª Situação

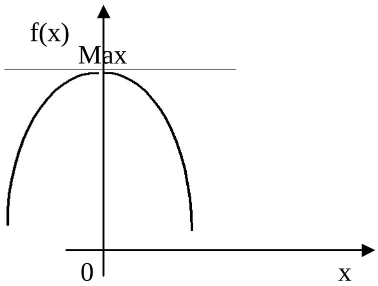


df/dx = 0

x >0

ou

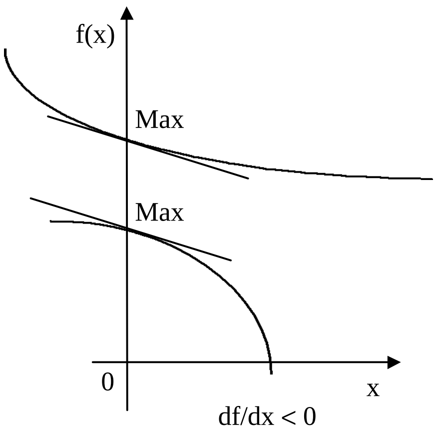
2ª Situação



df/dx = 0

x = 0

3ª Situação



df/dx < 0

x = 0

A não negatividade das variáveis independentes, determina as seguintes condições de 1ª ordem para um ponto maximizante (extremo condicionado):

$$\begin{cases} df/dx \leq 0 \\ x\,(df/dx) = 0 \end{cases}$$

Naturalmente para $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ tem-se:

$$\begin{cases} \partial f / \partial x_j \leq 0 & (j = 1 \text{ a } n) \\ x_j\,(\partial f / \partial x_j) = 0 \end{cases}$$

2.5 Considere-se o modelo na forma:

$$\begin{array}{lrcl} & \text{Max } f(x) & & \\ \text{s.a.} & g(x) + s & = & b \\ & s & \geq & 0 \end{array}$$

A função Lagrangeana é:

$L = f(x) - \lambda\, [(g(x) + s - b)]$

Atendendo a que "s" é variável não negativa, as condições de 1ª ordem para extremo de L (x,λ) são:

$$\left|\begin{array}{lcl} \partial L / \partial x & = & 0 \\ \partial L / \partial s & \leq & 0 \\ s\,(\partial L / \partial s) & = & 0 \\ \partial L / \partial \lambda & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{(notar que } \partial L / \partial\lambda = -g(x) - s + b = 0$$

Notar que:

- $(\partial L / \partial s) = -\lambda$ o que implica: $\lambda \geq 0$ (multiplicador de Lagrange deve ser ***não negativo***)
- $s\,(-\lambda\,) = 0$. Como $-s = g(x) - b$ resulta: $\lambda[\, g(x) - b)] = 0$ (note que "λ" é complementar da variável de folga da restrição pelo que é a variável Dual associada...)

2.6

Verificação da concavidade da função:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 4x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} \partial^2 f / \partial x_1^2 & \partial^2 f / \partial x_1 x_2 \\ \partial^2 f / \partial x_2 x_1 & \partial^2 f / \partial x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Na matriz Hessiana os menores principais H_k com k=1,2 são:

$H_1 = -4$ e -4 (diagonal principal) ; $H_2 = (-4)(-4) - (3)(3) = 7$

Como os determinantes têm o sinal de $(-1)^k$ (são respectivamente negativo e positivo) a matriz é Definida Negativa podendo concluir-se que a função é côncava.

A função Lagrangeana é:

$L = 5x_1 - 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2 - \lambda\,(\, x_1 + x_2 + s - 2\,)$

As condições a satisfazer pelo extremo (ver problema 2.5) são:

$$\left|\begin{array}{lcl} \partial L / \partial x_1 & = & 0 \\ \partial L / \partial x_2 & = & 0 \\ \partial L / \partial s & \leq & 0 \\ s\,(\partial L / \partial s) & = & 0 \\ \partial L / \partial \lambda & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \left|\begin{array}{lcll} 5 - 4x_1 + 3x_2 - \lambda & = & 0 & (1) \\ 3x_1 - 4x_2 - \lambda & = & 0 & (2) \\ -\lambda & \leq & 0 & (3) \\ -\,s\lambda & = & 0 & (4) \\ -x_1 - x_2 - s + 2 & = & 0 & (5) \end{array}\right.$$

Estas condições podem tomar a forma mais simples:

$$
\left|\begin{array}{lcll}
5 - 4x_1 + 3x_2 - \lambda & = & 0 & (1) \\
3x_1 - 4x_2 - \lambda & = & 0 & (2) \\
\lambda\ (x_1 + x_2 - 2) & = & 0 & (3) \\
\lambda\ ;\ s & \geq & 0 & (4)
\end{array}\right.
$$

(*Notar a condição de não negatividade do multiplicador* "λ")

Se $\lambda = 0$ tem-se de (1) e (2) $x_1 = 20/7$ e $x_2 = 15/7$ que não satisfaz $x_1 + x_2 + s = 2$ com $s \geq 0$ pelo que se conclui que $\lambda \neq 0$.

Para $\lambda \neq 0$ então em (3) tem-se $x_1 + x_2 = 2$ ou seja $x_1 = 2 - x_2$

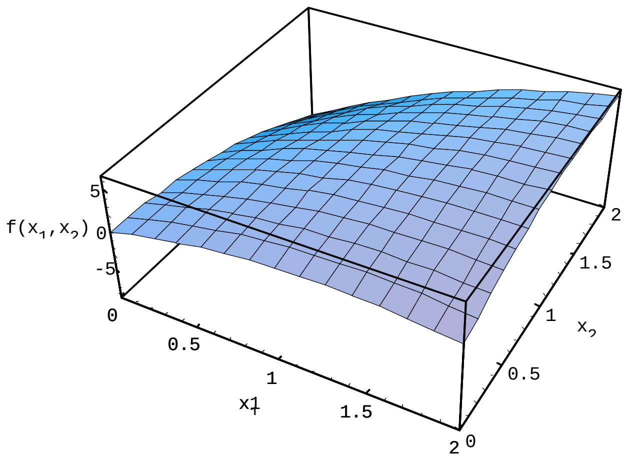
Substituindo em (1) e (2) tem-se:

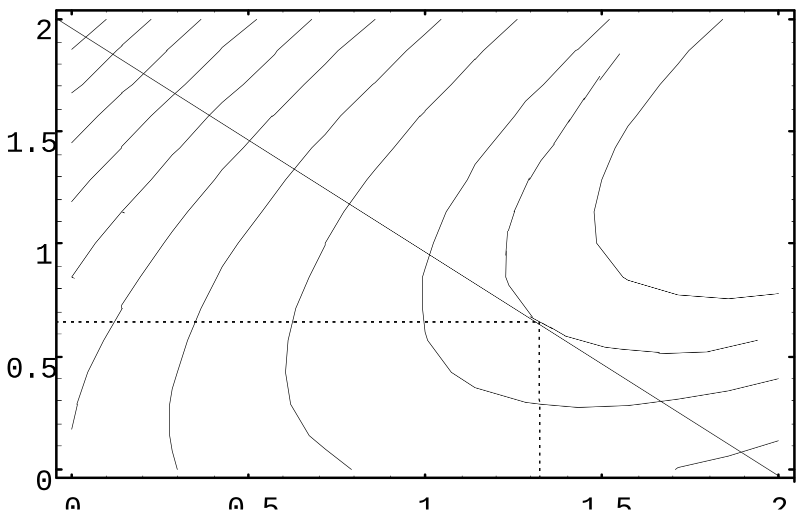
$5 - 8 + 4x_2 + 3x_2 - \lambda = 0$ e $6 - 3x_2 - 4x_2 - \lambda = 0$ que permite calcular $x_2 = 9/14$ e $\lambda = 3/2$.

Em (1) ou (2) tem-se $x_1 = 19/14$.

O ponto (19/14 , 9/14) é o ponto óptimo onde Max $f(x_1,x_2) = 137/28$.

Nas figuras seguintes apresentam-se o gráfico da função e a projecção horizontal das curvas de nível da função.





2.7 A matriz Hessiana é:

$$H_f = \begin{bmatrix} \partial^2 f / \partial x_1^2 & \partial^2 f / \partial x_1 x_2 \\ \partial^2 f / \partial x_2 x_1 & \partial^2 f / \partial x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Como os determinantes menores principais (1ª e 2ª ordem) são positivos a matriz é Definida Positiva podendo concluir-se que a função é convexa.

A função Lagrangeana é:

$L = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2 - \lambda\ (\ 2x_1 - x_2 - 4\ )$

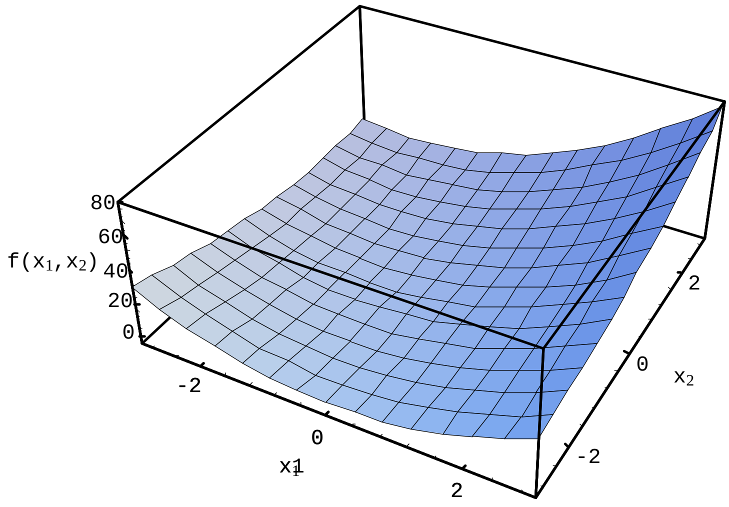
As condições a satisfazer pelo extremo são:

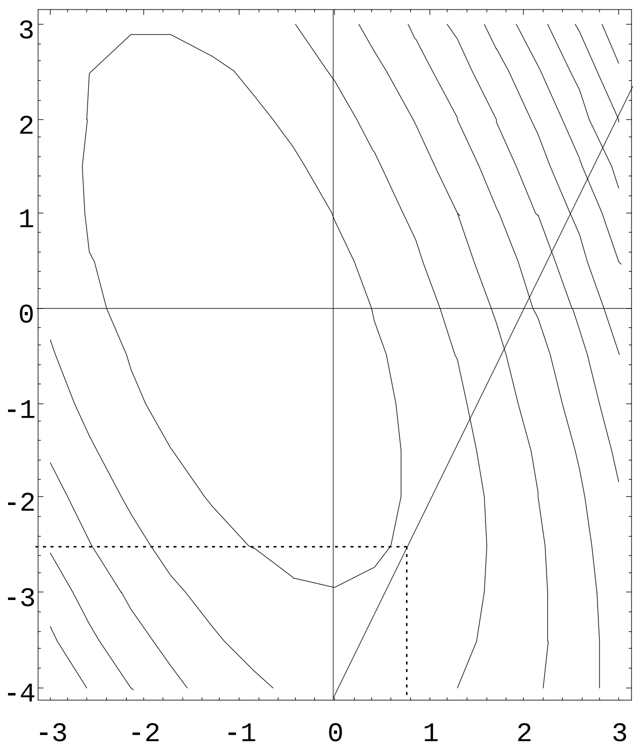
$$\left| \begin{array}{lll} \partial L / \partial x_1 = 0 & \Rightarrow \\ \partial L / \partial x_2 = 0 & \Rightarrow \\ \partial L / \partial \lambda = 0 & \Rightarrow \end{array} \right| \begin{array}{lll} 6x_1 + 2x_2 + 6 - 2\lambda = 0 & & (1) \\ 2x_2 + 2x_1 + 2 + \lambda = 0 & & (2) \\ -2x_1 + x_2 + 4 = 0 & & (3) \end{array}$$

A solução do sistema de equações é $x_1 = 7/11$; $x_2 = -30/11$; $\lambda = 24/11$.

Porque a função é convexa só se pode concluir que foi atingido um ponto de estacionaridade.

Nas figuras seguintes apresentam-se o gráfico da função e a projecção horizontal das curvas de nível da função.





2.8 A função-objectivo é linear (côncava e convexa)

A função Lagrangeana é:

$L = x_1 - x_2 - \lambda (x_1^2 + x_2^2 - 1)$

As condições a satisfazer pelo extremo são:

$$\left| \begin{array}{lll} \partial L / \partial x_1 & = & 0 \\ \partial L / \partial x_2 & = & 0 \\ \partial L / \partial \lambda & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{llll} 1 - 2\lambda x_1 & = & 0 & (1) \\ -1 - 2\lambda x_2 & = & 0 & (2) \\ -x_1^2 - x_2^2 + 1 & = & 0 & (3) \end{array} \right.$$

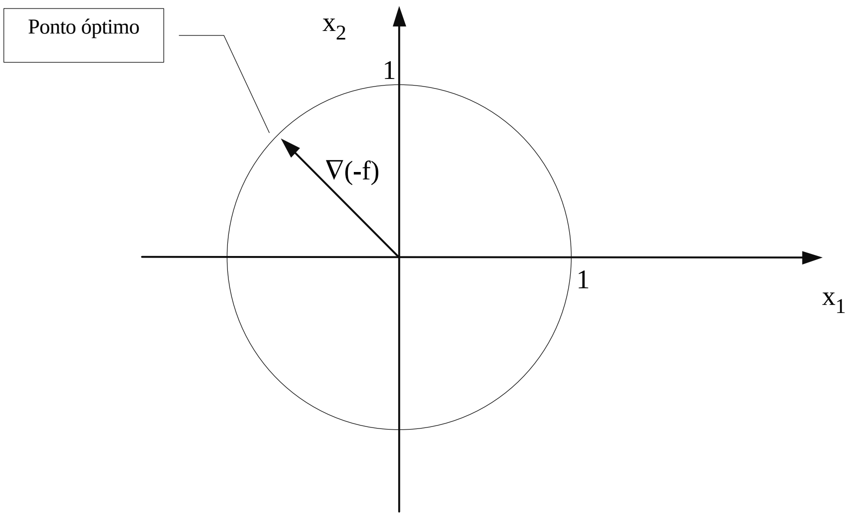
Do sistema calcula-se $l = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ pelo que há 2 soluções:

1. $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $l = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f = -1.41421$
2. $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f = 1.41421$

Da sua análise verifica-se que o valor óptimo da função é atingido no primeiro destes pontos:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; Min\ f = -1.41421$$

A figura seguinte esclarece a situação:



3.

3.1 As soluções de um modelo de PL podem ser agrupadas do seguinte modo:

- não admissível

  ou

- admissível com valor óptimo finito atingido no ponto óptimo

  ou

- admissível com valor óptimo ilimitado

Na Programação Não Linear são possíveis as 3 situações e uma 4ª hipótese:

- admissível com valor limitado para a função-objectivo mas não há ponto óptimo

  Veja-se por exemplo Min $f = 1/x$ com $x \geq 0$ que tem pontos admissíveis sendo zero o maior limite inferior do valor da função-objectivo. Contudo este limite nunca é atingido em ponto admissível pelo que não há ponto óptimo.

3.2 É possível como o exemplo seguinte demonstra:

Minimizar $f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$

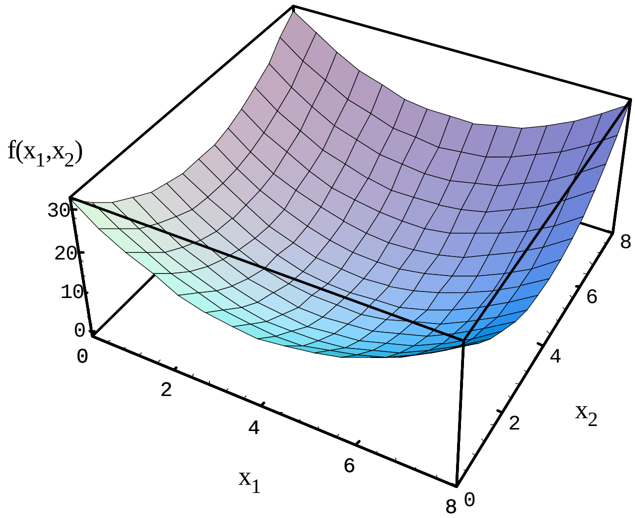
s.a. $2x_1 + 3x_2 \geq 6$

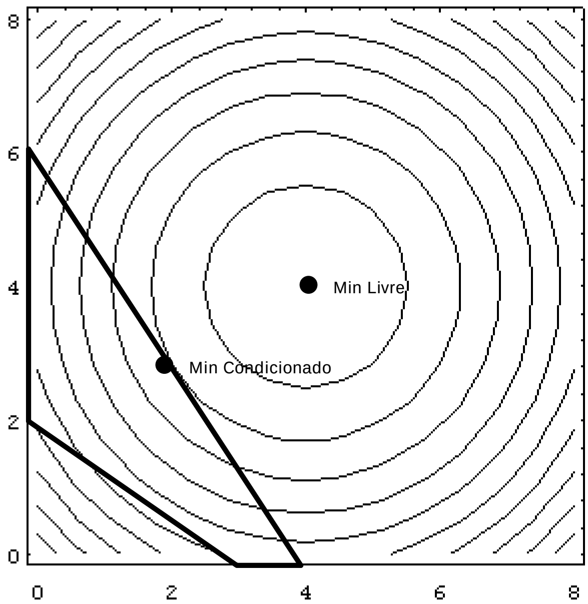
$-3x_1 - 2x_2 \geq -12$

$x_1, x_2 \geq 0$

A solução óptima é $x_1 = 28/13$, $x_2 = 36/13$ e Min f= 64/13.

As figuras mostram que, no convexo de soluções, o Ponto óptimo NÃO É EXTREMO (o que não se passa em Programação Linear).





3.3 É possível como o exemplo seguinte demonstra:

Minimizar $f(x_1,x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$

s.a. $x_1 + x_2 \geq 5$

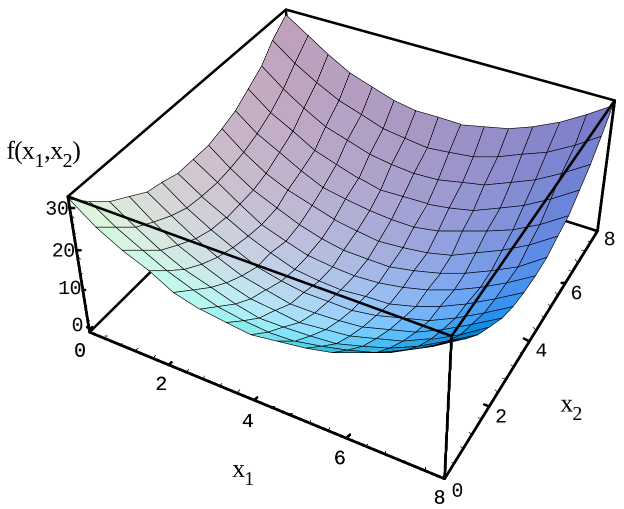
$-x_1 \geq -5$

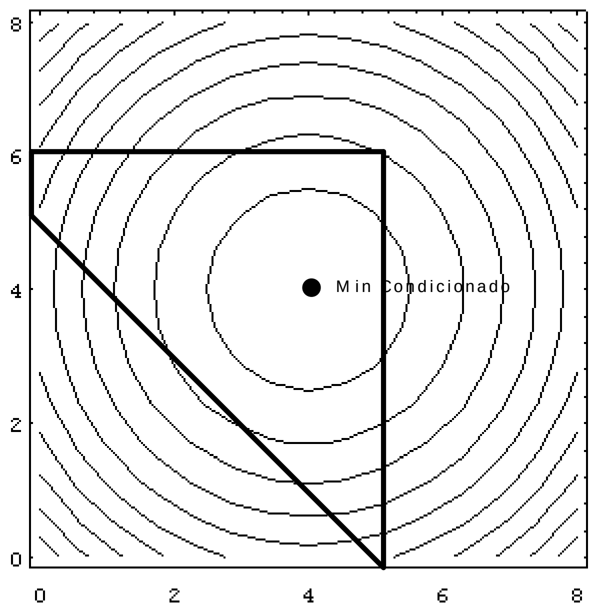
$-2x_2 \geq -12$

$x_1, x_2 \geq 0$

A solução óptima é $x_1 = 4$, $x_2 = 4$ e Min f= 0.

As figuras mostram que, no convexo de soluções, o Ponto óptimo É INTERIOR (o que não se passa em Programação Linear).





3.4 É possível como o exemplo seguinte demonstra:

Max $f(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2$

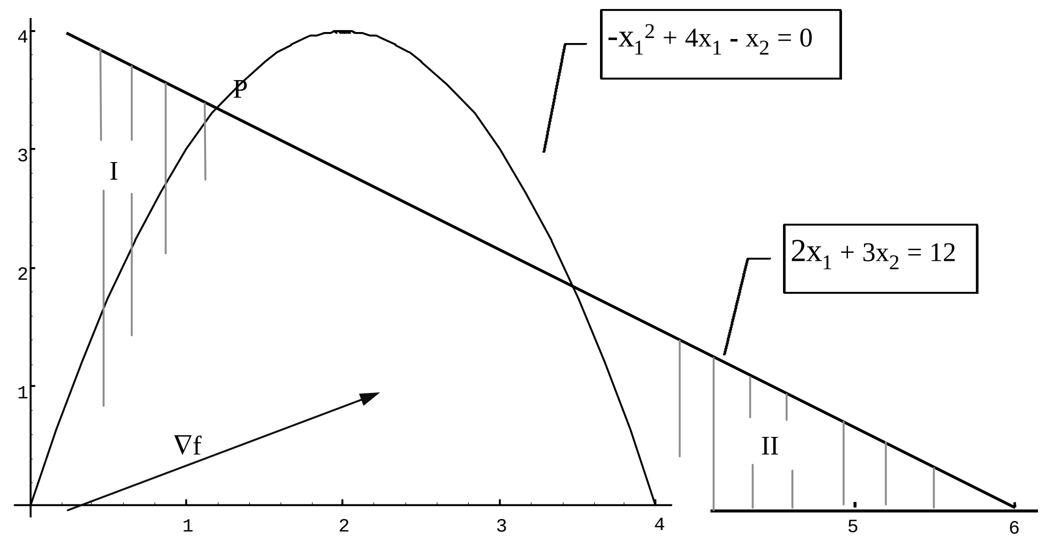
s.a. $-x_1^2 + 4x_1 - x_2 \leq 0$

$2x_1 + 3x_2 \leq 12$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Nota: O espaço de solução não é convexo (2 conjuntos : áreas I e II).

Na área I, é no ponto P que a função tem maior valor. Veja-se que tal é apenas máximo local pois na área II a função tem maior valor em qualquer ponto.



3.5 CONCLUSÕES SOBRE DIFERENÇAS ENTRE PNL E PL :

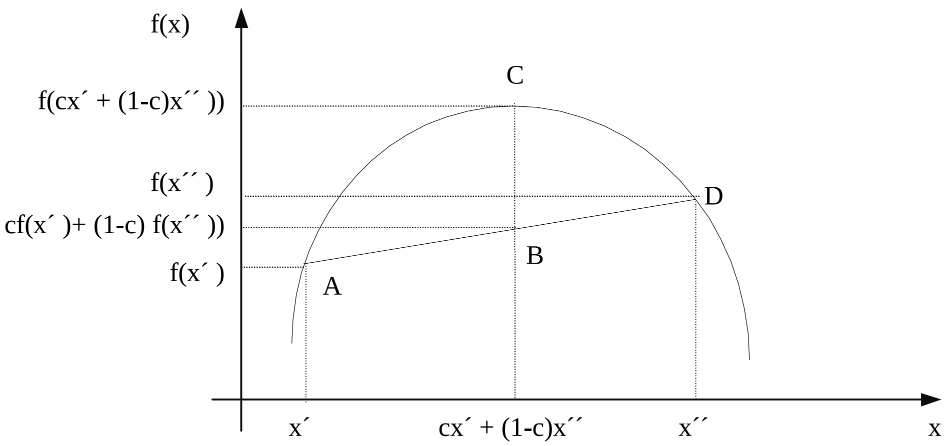
- Em PNL, qualquer ponto do espaço de solução pode ser óptimo. A procura do ponto óptimo **não pode** ficar limitada aos extremos como na PL.
- O número de restrições técnicas saturadas, no óptimo, **pode ser nulo.**
  (ver problema 3.3 onde nenhuma restrição é satisfeita como igualdade).
- O deslocamento contínuo numa dada direcção **pode não conduzir** a valores crescentes (ou decrescentes) da função-objectivo ao contrário do que se verifica na PL.
- O espaço de solução **pode não constituir** um conjunto convexo (ver problema 3.4).
- Um óptimo local **pode não ser** um óptimo global (ver problema 3.4).

3.6 Só no caso de f(X) ser côncava ou seja, no conjunto de soluções S para qualquer par de pontos X´ e X´´ do conjunto S verifica-se:

$$f(cX' + (1-c)X'' \geq cf(X') + (1-c)f(X'') \quad (1)$$

para valores de “c” tal que $0 \leq c \leq 1$.

A figura seguinte visualiza a situação para uma função <u>monovariável</u>:



Nota: Coordenadas de B obtidas por combinação linear convexa dos extremo do segmento AD.
Veja-se que a função é côncava porque se verifica a condição (1) o que geometricamente corresponde a que o segmento que une qualquer par de pontos da curva da função está sempre abaixo desta.

3.7 A matriz Hessiana de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma matriz de ordem "n" em que cada elemento (i,j) é igual a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$$

Para a função proposta tem-se $H = \begin{bmatrix} 6x_1 & 2 \\ 2 & 12x_2^2 \end{bmatrix}$

3.8 A função é CÔNCAVA em "S" <u>se e só se</u> para qualquer ponto $X \in S$, os <u>menores principais não nulos</u> da matriz Hessiana têm o sinal de $(-1)^k$ sendo "k" a ordem do menor.

3.9 A função é CONVEXA em "S" <u>se e só se</u> para qualquer ponto $X \in S$, os <u>menores principais</u> da matriz Hessiana são <u>positivos</u>.

3.10 Considerando d_1 e d_2 as funções da procura, o objectivo é Maximizar a função-objectivo $f = p_1d_1 + p_2d_2$ ou seja $f= p_1(150 - 2p_1 - p_2) + p_2(200 - p_1 - 3p_2) = 150\ p_1 - 2p_1^2 - 2p_{1p2} + 200p_2 - 3p_2^2$.

A matriz Hessiana é: $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

sendo os seus menores principais:

$|H_1| = $ -4 e -6 (ambos negativos)

$|H_2| = $ 24 - 4 = 20 (positivo)

pelo que a matriz é definida negativa, podendo concluir-se que a função-objectivo é Côncava.

Anulando o gradiente da função tem-se:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 150 - 4p_1 - 2p_2 \\ -2p_1 + 200 - 6p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} p_1 = p_2 = 25 \text{ u.m. com Max f= 4375} \\ \text{com } d_1 = 75 \text{ e } d_2 = 100 \text{ (unidades)} \end{matrix}$$

3.11

A matriz Hessiana é: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Os menores principais são :

$|H_1| = 2, 2, 4$ (positivos)

$|H_2| = 8 - 1 = 7 > 0$

$|H_2| = 8 - 1 = 7 > 0$

$|H_2| = 4 - 1 = 3 > 0$

$|H_3| = 6 > 0$

Dado que todos os menores principais de H são positivos a matriz é definida positiva pelo que a função é Convexa.

3.12 a. Sendo $X_1 = (2,3)$ o valor do gradiente neste ponto é:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_2 - 2x_1 \\ 2x_1 + 3 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. A função é quadrática pelo que a série de Taylor terá 3 termos:

$$f(X_2) = f(X_1) + \Delta X^T \nabla f_{X_1} + \frac{1}{2}\Delta X^T H_{X_1} \nabla X$$

$$= 8 + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= 8 + 0.4 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} = 8.39$$

3.13 $V = \nabla f_{X_2} - \nabla f_{X_1} = H(X_2 - X_1) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$

3.14 $f = CX + \frac{1}{2} X^T \, H \, X$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

em que :

C = matriz dos coeficientes das variáveis x_{ii}, na função-objectivo

H = matriz hessiana de f(X)

X = vector coluna das variáveis de decisão

4.

4.1 $L(x_1,x_2,\lambda) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2 - \lambda\,(2x_1 + 2x_2 + s - 4)$

s.a. $s \geq 0$

O termo " $-\lambda\,(2x_1 + 2x_2 + s - 4)$ " é nulo pelo que maximizar a função L é maximizar a função proposta.

As condições de 1ª ordem para extremo da função Lagrangeana são:

$$\left|\begin{array}{lccc} \partial L / \partial x_1 & = & 0 & \Rightarrow \\ \partial L / \partial x_2 & = & 0 & \Rightarrow \\ \partial L / \partial s & \leq & 0 & \Rightarrow \\ s(\partial L / \partial s) & = & 0 & \Rightarrow \\ \partial L / \partial \lambda & = & 0 & \Rightarrow \end{array}\right. \left|\begin{array}{lcc} 2 - 2x_1 - 2\lambda & = & 0 \\ 3 - 2x_2 - 2\lambda & = & 0 \\ -\lambda & \leq & 0 \\ s(-\lambda) & = & 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - s + 4 & = & 0 \end{array}\right.$$

As condições KKT são:

- 1ª condição:

$$2 - 2x_1 - 2\lambda = 0$$
$$3 - 2x_2 - 2\lambda = 0$$

- <u>2ª condição</u>: Dado que $-s = 2x_1 + 2x_2 - 4$ e que $-s\lambda = 0$, deduz-se a condição seguinte:

$$\lambda(2x_1 + 2x_2 - 4) = 0$$

- <u>3ª condição</u>: A restrição técnica do modelo

$$2x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0$$

- 4ª condição:

$$\lambda \geq 0$$

4.2 Nesta situação, dado que a restrição é do tipo "=" não é utilizada qualquer variável de folga pelo que a variável "λ" é livre.

As condições KKT são:

- 1ª condição:

$$2 - 2x_1 - 2\lambda = 0$$
$$3 - 2x_2 - 2\lambda = 0$$

- <u>2ª condição</u>: A restrição técnica do modelo

$$2x_1 + 2x_2 - 4 = 0$$

4.3 Considerando s_1 e s_2 variáveis de folga (não negativas) das primeira e segunda restrições técnicas, a função de Lagrange é:

$$L(x_1,x_2,s_1,s_2,\lambda_1,\lambda_2) = f(x_1,x_2) - \lambda_1 (x_1 - 2 + s_1) - \lambda_2 (x_2 -1 + s_2)$$

Nesta situação é necessário atender à condição de não negatividade das variáveis x_1, x_2, s_1, s_2 e ao ambiente de Minimização.

Adoptando abordagem semelhante à exposta no problema 2.4, conclui-se que as condições de 1ª ordem para extremo são:

- $\partial L / \partial x_j \geq 0$ e $x_j (\partial L / \partial x_j) = 0$
- $\partial L / \partial s_i \geq 0$ e $s_i (\partial L / \partial s_i) = 0$
- $\partial L / \partial \lambda_i = 0$

Da condição $\partial L / \partial s_i \geq 0$ deduz-se $\lambda_i \leq 0$ (de facto λ_i é a variável Dual associada à restrição "i" ; como as duas restrições são do tipo "≤" em ambiente de Minimização, as variáveis duais associadas são não positivas).

Da condição $s_i (\partial L / \partial s_i) = 0$ deduz-se $\lambda_i (g_i (x_1,x_2) - b_i) = 0$.

As condições KKT são:

(1) $2x_1 +2 - \lambda_1 (1) \geq 0$

(2) $x_1 (2x_1 +2 - \lambda_1) = 0$

(3) $2x_2 - 4 - \lambda_2 (1) \geq 0$

(4) $x_2 (2x_2 - 4 - \lambda_2) = 0$

(5) $x_1 - 2 \leq 0$

(6) $\lambda_1 (x_1 - 2) = 0$

(7) $x_2 - 1 \leq 0$

(8) $\lambda_2 (x_2 - 1) = 0$

(9) $x_1 , x_2 \geq 0$

(10) $\lambda_1 , \lambda_2 \leq 0$

Das condições de ortogonalidade tem-se:

- se $\lambda_i \neq 0$ então $g_i (X) = 0$ e se $g_i (X) \neq 0$ então $\lambda_i = 0$

Explorando uma das condições até estabelecer incompatibilidade (contradição) com as restantes condições será possível concluir se é nulo o multiplicador λ_i ou $g_i (X)$ ou ambos. Deste modo como se vai concluindo quais as restrições activas e inactivas, as desigualdades KKT que se verificam como igualdades e os multiplicadores que são nulos a complexidade do problema reduz-se progressivamente.

Tomando a condição (6) tem-se:

- $x_1 - 2 = 0$
  - $x_1 = 2$
    - $\lambda_1 \neq 0$
      - Em (2): $\lambda_1 = 6$
        Não admissível
    - $\lambda_1 = 0$
      - Em (2): $x_1 = -1$
        Contradição
- $x_1 - 2 \neq 0$
  - $\lambda_1 = 0$
    - $x_1 = 0$
      Satisfaz (1),(2),(5),(6),(9),(10)
    - $x_1 \neq 0$
      - Em (2): $x_1 = -1$
        Não admissível

1ª Conclusão : $x_1 = 0$; $\lambda_1 = 0$ satisfaz as condições KKT.

Tomando a condição (7) tem-se:

- $x_2 - 1 = 0$
  - $x_2 = 1$
    - $\lambda_2 \neq 0$
      - Em (4): $\lambda_2 = -2$
        Satisfaz (3),(4),(7),(8),(9),(10)
    - $\lambda_2 = 0$
      - Em (4): $x_2 = 2$
        Contradição
- $x_2 - 1 \neq 0$
  - $\lambda_2 = 0$
    - $x_2 = 0$
      Em (3) : $-4 \geq 0$. Falso
    - $x_2 \neq 0$
      Em (4) $x_2 = 2$
      Em (7) : $1 \leq 0$. Falso

2ª Conclusão : $x_2 = 1$; $\lambda_2 = -2$ satisfaz as condições KKT.

A solução $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -2$ satisfaz todas as condições KKT o que é suficiente para afirmar tratar-se da solução óptima.

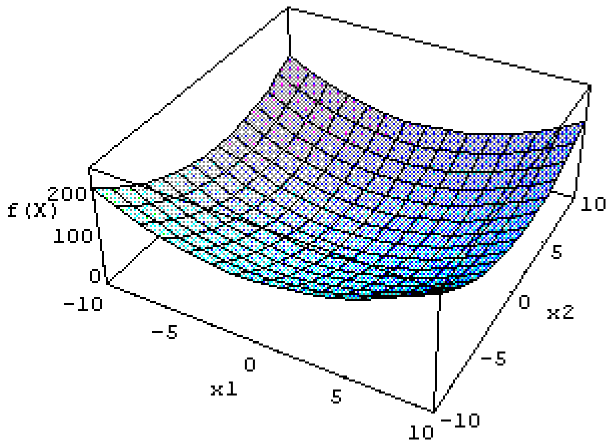
Acresce ainda que sendo Convexa a função proposta para optimizar em espaço Convexo (restrições são lineares) é condição necessária que a solução satisfaça integralmente as condição KKT.

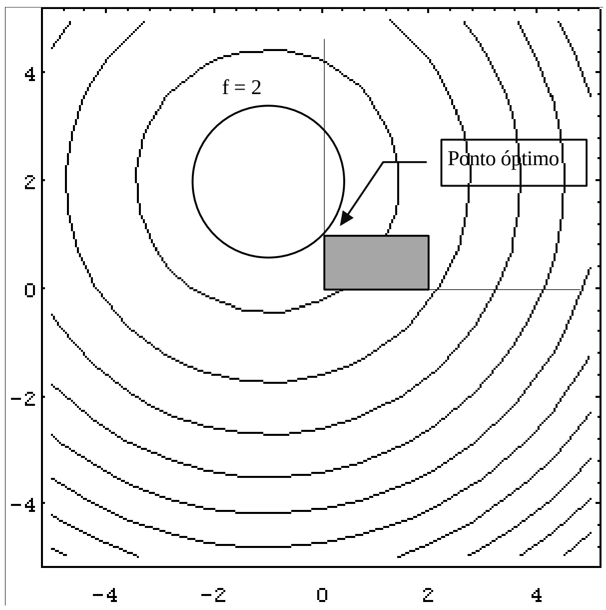
O ponto óptimo é pois $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ sendo Min f = 2.

Nota: Poder-se-ia ter optado por Maximizar a função simétrica $-x_1^2 - 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 - 5$ *com o que se obteria o ponto-solução :* $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2$.

O multiplicador λ_2 *é agora não negativo porque a restrição associada é típica no ambiente de maximização .*

As figuras seguintes apresentam o gráfico da função proposta, e a projecção horizontal das curvas de nível.





4.4

a. Substituindo a restrição de igualdade pelas desigualdades $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ e $-x_1^2 - x_2^2 \leq -1$ as condições KKT

são :

$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0$	(1) $[1 / (x_1 + 1)] - \lambda_1 (2x_1) - \lambda_2 (-2x_1) \leq 0$ (2) $1 - \lambda_1 (2x_2) - \lambda_2 (-2x_2) \leq 0$
$x_j (\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}) = 0$	(3) $x_1 \{[1 / (x_1 + 1)] - \lambda_1 (2x_1) - \lambda_2 (-2x_1)\} = 0$ (4) $x_2 [1 - \lambda_1 (2x_2) - \lambda_2 (-2x_2)] = 0$
$g_i - b_i \leq 0$	(5) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ (6) $- x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0$
$\lambda_i (g_i - b_i) = 0$	(7) $\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$ (8) $\lambda_2 (-x_1^2 - x_2^2 + 1) = 0$
$\lambda_i \geq 0$	(9) $\lambda_1 , \lambda_2 \geq 0$
$x_j \geq 0$	(10) $x_1 , x_2 \geq 0$

b.

De (1) deduz-se que $\lambda_1 \neq 0$ e $x_1 \neq 0$.

De (3) deduz-se que $\lambda_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$.

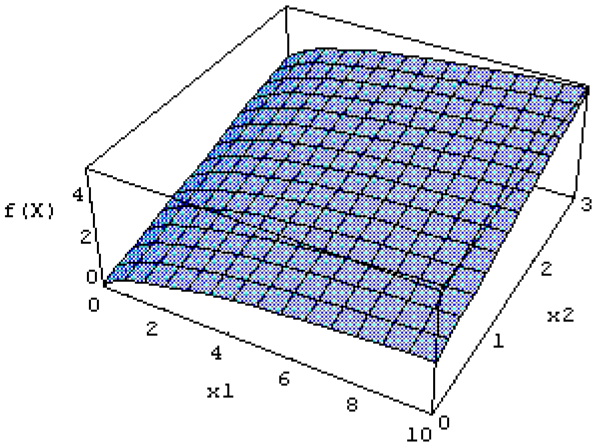
Os multiplicadores λ_1 e λ_2 são complementares pelo que $\lambda_2 = 0$. De facto considerando a restrição na forma de igualdade seria utilizado apenas um multiplicador "λ" sem restrição de sinal que poderia ser considerado $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ com $\lambda_1 , \lambda_2 \geq 0$. Ora nesta situação, verifica-se no óptimo, se existe, $\lambda_1\lambda_2 = 0$.

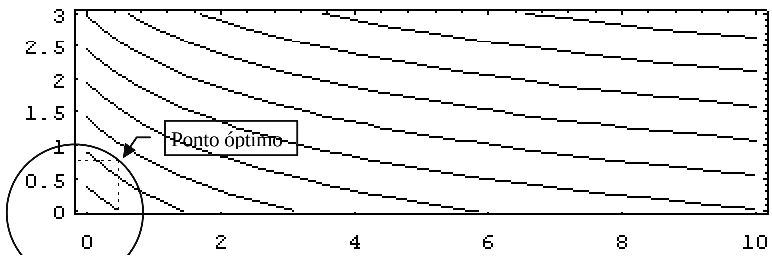
Tem-se assim o sistema de equações:

$$\left|\begin{array}{ll} [1 / (x_1 + 1)] - 2\lambda_1 x_1 & = 0 \\ 1 - 2\lambda_1 x_2 & = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 & = 0 \end{array}\right.$$

com solução $x_1 = 0.543689 \approx 0.54$; $x_2 = 0.839287 \approx 0.84$; $\lambda = 0.595744 \approx 0.6$; Max f = 1.273462.

As figuras seguintes apresentam o gráfico da função proposta, e a projecção horizontal das curvas de nível.





4.5

a. No problema proposto, o espaço "S" de soluções admissíveis é um conjunto convexo pelo que se a função for côncava qualquer máximo local é solução óptima do problema.

A Hessiana de $f(x_1,x_2)$ é a matriz quadrada de ordem 2:

$$H= \begin{bmatrix} \partial^2 f / \partial x_1^2 & \partial^2 f / \partial x_1 x_2 \\ \partial^2 f / \partial x_2 x_1 & \partial^2 f / \partial x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A função $f(x_1,x_2)$ é côncava no espaço de solução "S" se e só se para qualquer par $(x_1,x_2) \in S$, em H todos os menores principais diferentes de zero têm sinal de $(-1)^k$ sendo "k" a ordem do menor.

Nota: O menor principal de ordem "i" de uma matriz quadrada de ordem "n" é o determinante de qualquer matriz de ordem "i" obtida quando se eliminam "n-i" linhas e as correspondentes "n-i" colunas da matriz.

Na matriz H têm-se os menores principais:

- de ordem 1 : -2 e -2 (têm o sinal de -1^1)
- de ordem 2: (-2)(-2) - (0)(0) = 4 (tem o sinal de -1^2)

pelo que H é uma matriz definida negativa, pelo que $f(x_1,x_2)$ é côncava.

O problema é portanto de programação convexa : função côncava e espaço de soluções convexo.

b. O método do Simplex modificado por Wolfe <u>pode ser utilizado em programação convexa quadrática</u> (caso do problema proposto) sendo necessário recorrer às condições KKT:

(1) $2 - 2x_1 - 2\lambda \leq 0$

(2) $x_1 (2 - 2x_1 - 2\lambda) = 0$

(3) $3 - 2x_2 - 2\lambda \leq 0$

(4) $x_2 (3 - 2x_2 - 2\lambda) = 0$

(5) $2x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0$

(6) $\lambda (2x_1 + 2x_2 - 4) = 0$

(7) $x_1 , x_2 , \lambda \geq 0$

Colocando as condições (1), (3) e (5) na forma de igualdade tem-se:

$$2x_1 + 2\lambda - e_1 = 2$$

$$2x_2 + 2\lambda - e_2 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + s_1 = 4$$

Atendendo a que:

- $-e_1 = 2 - 2x_1 - 2\lambda$, deduz-se da condição (2) que o produto $x_1 e_1 = 0$.
- $-e_2 = 3 - 2x_2 - 2\lambda$, deduz-se da condição (4) que o produto $x_2 e_2 = 0$.
- $-s_1 = 2x_1 + 2x_2 - 4$, deduz-se da condição (6) que o produto $\lambda s_1 = 0$

pode estabelecer-se a restrição de complementaridade $x_1e_1 + x_2e_2 + \lambda s_1 = 0$.

As condições KKT são equivalentes a :

$$2x_1 + 2\lambda - e_1 = 2$$

$$2x_2 + 2\lambda - e_2 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \lambda s_1 = 0 \quad \text{(restrição de complementaridade)}$$

$$x_1 , x_2 , \lambda , e_1 , e_2 , s_1 \geq 0$$

Analisando a restrição de complementaridade verifica-se que <u>não é linear</u> e impõe:

- as variáveis e_i , x_i não podem ser simultaneamente positivas;

- a variável auxiliar (folga ou excedentária) da restrição "i" e λ_i não podem ser simultaneamente positivas.

O método Simplex modificado por Wolfe recorre ao 1º passo do Método dos 2 Passos considerando a seguinte regra para calcular soluções que satisfaçam a restrição de complementaridade :

- não formar base em que as variáveis complementares e_i , x_i sejam simultaneamente variáveis básicas positivas (na maior parte dos casos se uma é VB a outra não pode entrar para a base);
- não formar base em que a variável auxiliar (folga ou excesso) da restrição "i" e λ_i (que são complementares) sejam simultaneamente variáveis básicas positivas (na maior parte dos casos se uma é VB a outra não pode entrar para a base);

No exemplo proposto, é necessário utilizar variáveis Artificiais nas duas primeiras restrições e Minimizar a sua soma executando o 1º passo do Método dos 2 Passos:

$$2x_1 + 2\lambda - e_1 + A_1 = 2$$

$$2x_2 + 2\lambda - e_2 + A_2 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + s_1 = 4$$

$$\text{Min } f^a = A_1 + A_2$$

$$A_1 , A_2 \geq 0$$

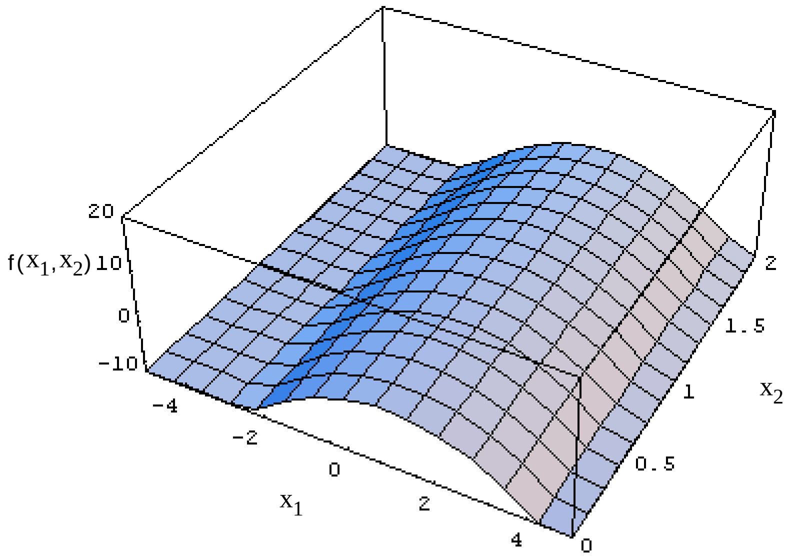
Aplicando o método Simplex modificado por Wolfe tem-se:

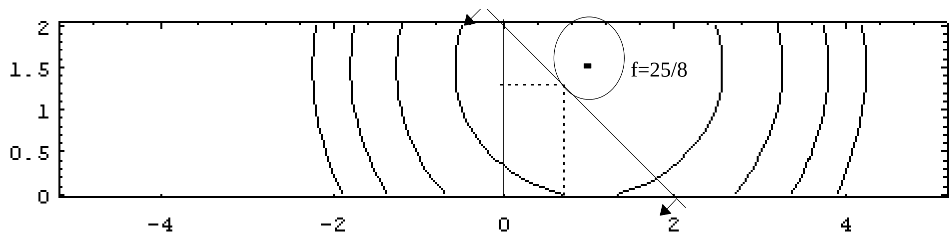
VB	x_1	x_2	λ	e_1	e_2	s_1	A_1	A_2	VSM	Obs.
A_1	2	0	2	-1	0	0	1	0	2	"λ" não pode entrar para a
A_2	0	2	2	0	-1	0	0	1	3	base (complementaridade com
s_1	2	2	0	0	0	1	0	0	4	s_1). Entra x_1 ou x_2.
$-f^a$	0	0	0	0	0	1	1	1	0	
$-f^a$	-2	-2	-4	1	1	0	0	0	-5	
x_1	1	0	1	-1/2	0	0	1/2	0	1	"λ" não pode entrar para a
A_2	0	2	2	0	-1	0	0	1	3	base (complementaridade com
s_1	0	2	-2	1	0	1	-1	0	2	s_1). Entra x_2.
$-f^a$	0	-2	-2	0	1	0	1	0	-3	
x_2	0	1	-1	1/2	0	1/2	-1/2	0	1	Entra λ.
x_1	1	0	1	-1/2	0	0	1/2	0	1	
A_2	0	0	4	-1	-1	-1	1	1	1	
$-f^a$	0	0	-4	1	1	1	0	0	-1	
λ	0	0	1	-1/4	-1/4	-1/4	1/4	1/4	1/4	Sol. óptima.
x_2	0	1	0	1/4	-1/4	1/4	-1/4	1/4	5/4	
x_1	1	0	0	-1/4	1/4	1/4	1/4	-1/4	3/4	
$-f^a$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	

Solução Óptima: $x_1 = 3/4$; $x_2 = 5/4$; Max $f(x_1 , x_2) = 25/8$

Nota: “l“ é a variável dual associada à restrição razão porque $l s_1 = 0$ (complementaridade das folgas).Neste caso a restrição está saturada.

As figuras seguintes apresentam o gráfico da função proposta, e a projecção horizontal das curvas de nível.





4.6 a.

A Hessiana de $f(x_1,x_2)$ é a matriz quadrada de ordem 2:

$$H=\begin{bmatrix} \partial^2 f / \partial x_1^2 & \partial^2 f / \partial x_1 x_2 \\ \partial^2 f / \partial x_2 x_1 & \partial^2 f / \partial x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$|H_1| = -4 \text{ e } -8 < 0$

Matriz H é Definida Negativa

$|H_2| = 16 > 0$

A função é Côncava

O problema é de programação convexa porque:

- a função-objectivo é Côncava e diferenciável
- a função da restrição técnica é convexa e diferenciável (restrição linear ≡ função côncava e convexa)

b. Condições KKT:

$\frac{¶ f}{¶ x_j} - \sum_{i=1}^{m} l_i \frac{¶ g_i}{¶ x_j} \leq 0$	(1)	$15 + 4x_2 - 4x_1 - \lambda(1) \leq 0$
	(2)	$30 + 4x_1 - 8x_2 - \lambda(2) \leq 0$
$x_j (\frac{¶ f}{¶ x_j} - \sum_{i=1}^{m} l_i \frac{¶ g_i}{¶ x_j}) = 0$	(3)	$x_1[15 + 4x_2 - 4x_1 - \lambda(1)] = 0$
	(4)	$x_2[30 + 4x_1 - 8x_2 - \lambda(2)] = 0$
$g_i - b_i \leq 0$	(5)	$x_1 + 2x_2 - 30 \leq 0$
$l_i (g_i - b_i) = 0$	(6)	$\lambda(x_1 + 2x_2 - 30) = 0$
$l_i \geq 0$	(7)	$\lambda \geq 0$
$x_j \geq 0$	(8)	$x_1 , x_2 \geq 0$

Para usar o método Simplex, estabelece-se o sistema de equações:

$4x_1 - 4x_2 + \lambda - e_1 + A_1 = 15$

$-4x_1 + 8x_2 + 2\lambda - e_2 + A_2 = 30$

$x_1 + 2x_2 + s_1 = 30$

$x_1e_1 + x_2e_2 + \lambda s_1 = 0$ (restrição de complementaridade)

Min $f^a = A_1 + A_2$

$x_1 , x_2 , e_1 , e_2 , s_1 , \lambda, A_1 , A_2 \geq 0$

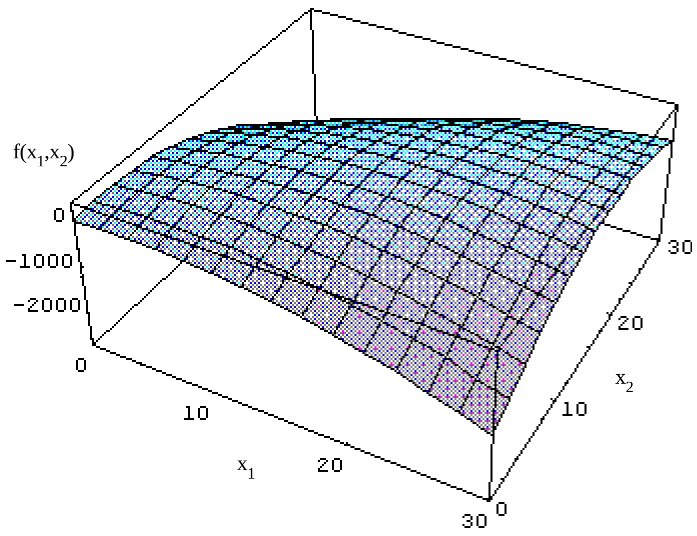
Aplicando o método Simplex modificado por Wolfe tem-se:

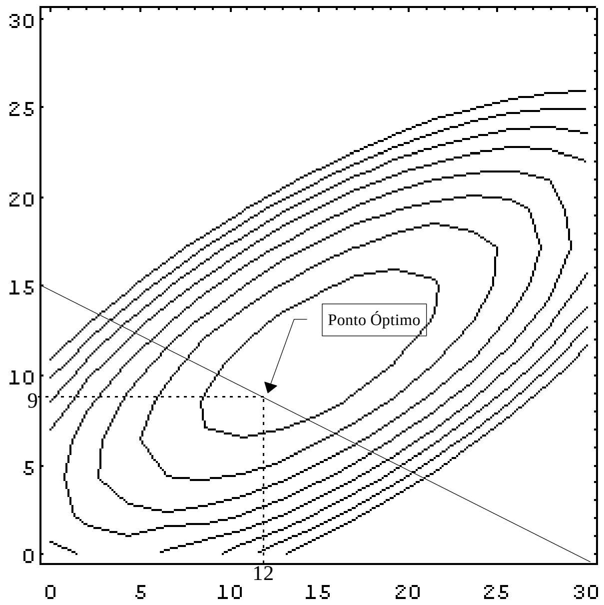
VB	x_1	x_2	λ	e_1	e_2	s_1	A_1	A_2	VSM	Obs.
A_1	4	-4	1	-1	0	0	1	0	15	Entra x_2 (pode porque e_2 é VNB)
A_2	-4	8	2	0	-1	0	0	1	30	
s_1	1	2	0	0	0	1	0	0	30	
$-f^a$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	
$-f^a$	0	-4	-3	1	1	0	0	0	-45	
x_2	-1/2	1	1/4	0	-1/8	0	0	1/8	15/4	Entra x_1 (pode porque e_1 é VNB)
A_1	2	0	2	-1	-1/2	0	1	1/2	30	Notar que λ não é seleccionável pois
s_1	2	0	-1/2	0	1/4	1	0	-1/4	45/2	s_1 é VB e não sai da base por troca
$-f^a$	-2	0	-2	1	1/2	0	0	1/2	-30	com λ.
x_1	1	0	-1/4	0	1/8	1/2	0	-1/8	45/4	Entra λ (pode porque s_1 é VNB)
x_2	0	1	1/8	0	-1/16	1/4	0	1/16	75/8	
A_1	0	0	5/2	-1	-3/4	-1	1	3/4	15/2	
$-f^a$	0	0	-5/2	1	3/4	1	0	1/4	-15/2	
λ	0	0	1	-2/5	-3/10	-2/5	2/5	3/10	3	
x_1	1	0	0	-1/10	1/20	2/5	1/10	-1/20	12	
x_2	0	1	0	1/20	-1/40	3/10	-1/20	1/40	9	
$-f^a$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	Solução óptima.

Solução Óptima: $x_1 = 12$; $x_2 = 9$; Max $f(x_1 , x_2) = 270$

Nota: "l" é a variável dual associada à restrição razão porque $l s_1 = 0$ (complementaridade das folgas).Neste caso a restrição está saturada.

As figuras seguintes apresentam o gráfico da função proposta, e a projecção horizontal das curvas de nível.





4.7 a.

A Hessiana de $f(x_1,x_2)$ é a matriz quadrada de ordem 2:

$$H=\begin{bmatrix} \partial^2 f / \partial x_1^2 & \partial^2 f / \partial x_1 x_2 \\ \partial^2 f / \partial x_2 x_1 & \partial^2 f / \partial x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(x_1+1)^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\left| H_1 \right| < 0$

Matriz H é Definida Negativa

$\left| H_2 \right| > 0$ Função Côncava

O problema é de programação convexa porque:

- a função-objectivo é Côncava e diferenciável
- a função da restrição técnica é convexa e diferenciável (restrição linear ≡ função côncava e convexa)

b. Condições KKT:

$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0$	(1) (2)	$1/(x_1+1) -\lambda(1) \leq 0$ $-2x_2 - \lambda(2) \leq 0$
$x_j (\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}) = 0$	(3) (4)	$x_1[1/(x_1+1) -\lambda(1)] = 0$ $x_2[-2x_2 - \lambda(2)\leq] = 0$
$g_i - b_i \leq 0$	(5)	$x_1 + 2x_2 -3 \leq 0$
$\lambda_i (g_i - b_i) = 0$	(6)	$\lambda(x_1 + 2x_2 -3) = 0$
$\lambda_i \geq 0$	(7)	$\lambda \geq 0$
$x_j \geq 0$	(8)	$x_1 , x_2 \geq 0$

Verificação das condições KKT no ponto (3 , 0);

(1)	$1/(x_1+1) -\lambda(1) \leq 0$	$1/4 - \lambda \leq 0$	$\lambda \geq 1/4$	O.k. condição (7)
(2)	$-2x_2 - \lambda(2) \leq 0$	$-2\lambda \leq 0$	$\lambda \geq 0$	O.k. condição (7)
(3)	$x_1[1/(x_1+1) -\lambda(1)] = 0$	$3[(1/4) - \lambda] = 0$	$\lambda = 1/4$	O.k. condições (1),(2),(3),(7)
(4)	$x_2[-2x_2 - \lambda(2)\leq] = 0$	$0 = 0$		O.k.
(5)	$x_1 + 2x_2 -3 \leq 0$	$3 + 0 - 3 \leq 0$	$0 \leq 0$	O.k.
(6)	$\lambda(x_1 + 2x_2 -3) = 0$	$1/4(3-3) = 0$	$0 = 0$	O.k.
(7)	$\lambda \geq 0$			Verificada
(8)	$x_1 , x_2 \geq 0$			Verificada

O problema é de programação convexa e as condições KKT verificam-se no ponto (3,0) o que é condição necessária e suficiente para afirmar que (3 , 0) é o ponto óptimo.

4.8 Considerando o modelo na forma:

Max [-f(x)] = $-2x_1 - x_2^3 - x_3^2$

s.a. $-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 \leq -4$

$x_1, x_2, x_{3\ \geq 0}$

as condições KKT são:

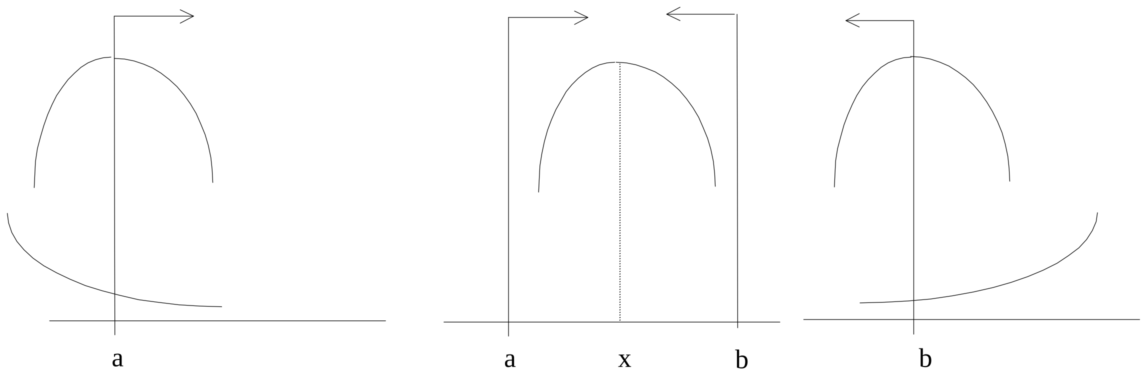
$\frac{\P f}{\P x_j} - \sum_{i=1}^{m} l_i \frac{\P g_i}{\P x_j} \leq 0$	(1)	$-2+2\lambda x_1 \leq 0$
	(2)	$-3x_2^2 + 4\lambda x_2 \leq 0$
	(3)	$-2x_3 + 2\lambda x_3 \leq 0$
$x_j (\frac{\P f}{\P x_j} - \sum_{i=1}^{m} l_i \frac{\P g_i}{\P x_j}) = 0$	(4)	$x_1 (-2+2\lambda x_1) = 0$
	(5)	$x_2(-3x_2^2 + 4\lambda x_2) = 0$
	(6)	$x_3(-2x_3 + 2\lambda x_3) = 0$
$g_i - b_i \leq 0$	(7)	$-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 4 \leq 0$
$l_i (g_i - b_i) = 0$	(8)	$\lambda(-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 4)=0$
$l_i \geq 0$	(9)	$\lambda \geq 0$
$x_j \geq 0$	(10)	$x_1 , x_2 \geq 0$

Verificação das condições KKT no ponto (1, 1, 1);

(1)	$-2+2\lambda x_1 \leq 0$	$-2+2\lambda \leq 0$	$\lambda \leq 1$	
(2)	$-3x_2^2 + 4\lambda x_2 \leq 0$	$-3+4\lambda \leq 0$	$\lambda \leq 4/3$	
(3)	$-2x_3 + 2\lambda x_3 \leq 0$	$-2+2\lambda \leq 0$	$\lambda \leq 1$	
(4)	$x_1 (-2+2\lambda x_1) = 0$	$-2+2\lambda = 0$	$\lambda = 1$	Contradição nos valores de λ
(5)	$x_2(-3x_2^2 + 4\lambda x_2) = 0$	$-3+4\lambda = 0$	$\lambda = 3/4$	
(6)	$x_3(-2x_3 + 2\lambda x_3) = 0$	$-2+2\lambda = 0$	$\lambda = 1$	
(7)	$-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 4 \leq 0$			
(8)	$\lambda(-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 4) = 0$			
(9)	$\lambda \geq 0$			
(10)	$x_1 , x_2 \geq 0$			

As condições KKT não se verificam no ponto (1, 1, 1) pelo que o ponto proposto não é o ponto-óptimo (notar que o problema é de programação convexa).

4.9 No intervalo [a , b] tem-se, no óptimo, $f'(a) \leq 0$, ou $f'(x) = 0$ ou $f'(b) \geq 0$ como se pode verificar nas figuras seguintes:



O modelo proposto é:

Max f(x)

$$\begin{array}{llll} \text{s.a.} & -x & \leq & -a \\ & x & \leq & b \end{array}$$

ou seja:

Max f(x)

$$\begin{array}{llllllll} \text{s.a.} & -x & + & s_1 & + & a & = & 0 \\ & x & + & s_2 & - & b & = & 0 \\ & & & & & s_1 , s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

A função Lagrangeana é:

$L = f(x) - \lambda_1 (-x + s_1 + a) - \lambda_2 (x + s_2 - b)$

Não havendo condição de não negatividade para a variável " x " têm-se as condições de 1ª ordem para extremo:

- $L'(x) = 0$ ou seja $f'(x) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
- $L'(s_1) = -\lambda_1 \leq 0$ e $s_1 [L'(s_1)] = - \lambda_1 s_1 = 0$ (1) (porque s_1 é variável não negativa)
- $L'(s_2) = -\lambda_2 \leq 0$ e $s_2 [L'(s_2)] = - \lambda_2 s_2 = 0$ (2) (porque s_2 é variável não negativa)

Sendo $-s_1 = -x + a$, substituindo em (1) fica : $\lambda_1 (-x + a) = 0$

Sendo $-s_2 = x - b$, substituindo em (2) fica : $\lambda_2 (x - b) = 0$

As condições obtidas são :

(1) $f'(x) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

(2) $\lambda_1 (-x + a) = 0$

(3) $\lambda_2 (x - b) = 0$

(4) $\lambda_1 \geq 0$

(5) $\lambda_2 \geq 0$

Resta agora verificar se estas condições conduzem ás soluções possíveis anteriormente obtidas geometricamente :

	λ_1	λ_2	Condição	Solução
1º caso	0	0		$f'(x) = 0 \;\leftarrow$
2º caso	> 0	0	$-x + a = 0 \Rightarrow x = a \;\Rightarrow$	$f'(x) + \lambda_1 = 0$ $f'(a) = -\lambda_1 \le 0 \;\leftarrow$
3º caso	0	> 0	$x - b = 0 \Rightarrow x = b \;\Rightarrow$	$f'(x) - \lambda_2 = 0$ $f'(b) = \lambda_2 \ge 0 \;\leftarrow$
4º caso	> 0	> 0	$-x + a = 0 \Rightarrow x = a \;\Rightarrow$ $x - b = 0 \Rightarrow x = b \;\Rightarrow$	Impossível porque $a \neq b$

Dado que as restrições são lineares se a função f(x) for Côncava então a solução óptima ocorre no ponto “a” ou “b” ou em ponto interior do intervalo.

4.10 O problema equivalente é:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Max } [-f(x_1,x_2)] & = & -(x_1-1)^2 & - & (x_2-2)^2 & + & 3(x_1+x_2) \\
 & \text{s.a.} & 4x_1 & + & x_2 & \le & 20 \\
 & & x_1 & + & 4x_2 & \le & 20 \\
 & & & & x_1, x_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

As condições KKT são:

$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \le 0$	(1) (2)	$-2x_1 + 5 - 4\lambda_1 - \lambda_2 \le 0$ $-2x_2 + 7 - \lambda_1 - 4\lambda_2 \le 0$
$x_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = 0$	(3) (4)	$x_1(-2x_1 + 5 - 4\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ $x_2(-2x_2 + 7 - \lambda_1 - 4\lambda_2) = 0$
$g_i - b_i \le 0$	(5) (6)	$4x_1 + x_2 - 20 \le 0$ $x_1 + 4x_2 - 20 \le 0$
$\lambda_i (g_i - b_i) = 0$	(7) (8)	$\lambda_1(4x_1 + x_2 - 20) = 0$ $\lambda_2(x_1 + 4x_2 - 20) = 0$
$\lambda_i \ge 0$	(9)	$\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$
$x_j \ge 0$	(10)	$x_1, x_2 \ge 0$

Se o ponto óptimo não pertence à fronteira do convexo de soluções então tem-se:

- em (7) $4x_1 + x_2 < 20$ pelo que λ_1 é obrigatoriamente nulo porque é complementar da variável de folga.
- em (8) deduz-se que $\lambda_2 = 0$ pela mesma razão.

Com $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ as condições KKT ficam reduzidas a:

(1) $-2x_1 + 5 \leq 0$

(2) $-2x_2 + 7 \leq 0$

(3) $x_1 (-2x_1 + 5) = 0$

(4) $x_2 (-2x_2 + 7) = 0$

(5) $4x_1 + x_2 - 20 \leq 0$

(6) $x_1 + 4x_2 - 20 \leq 0$

(10) $x_1 , x_2 \geq 0$

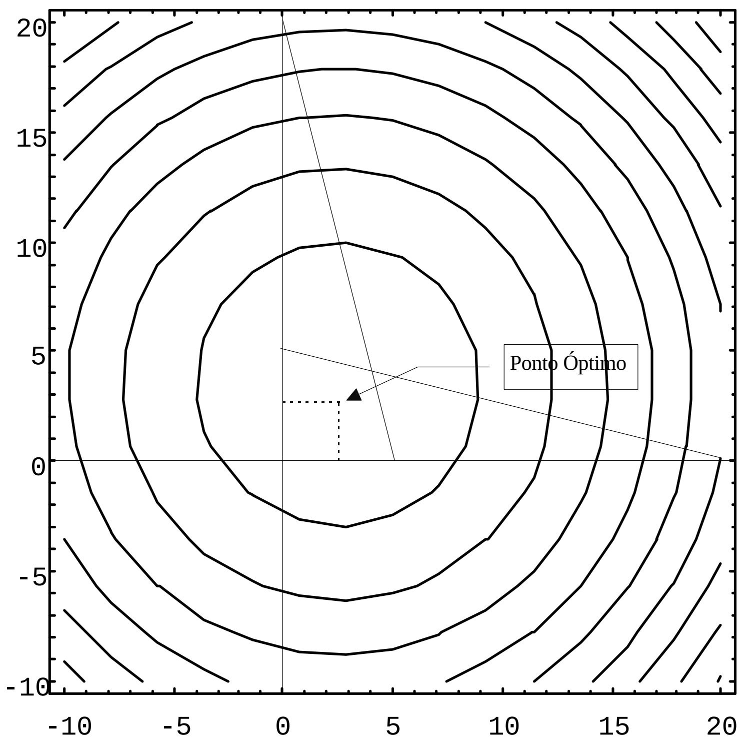
De (3) deduz-se $x_1=0$ <u>ou</u> $(5-2x_1) = 0$. Para $x_1 = 0$ a condição (1) é violada pelo que $(5-2x_1) = 0$ ou seja $x_1=5/2$.

De (4) deduz-se $x_2=0$ <u>ou</u> $(-2x_2+7) = 0$. Para $x_2= 0$ a condição (2) é violada pelo que $(-2x_2+7) = 0$ ou seja $x_2=7/2$.

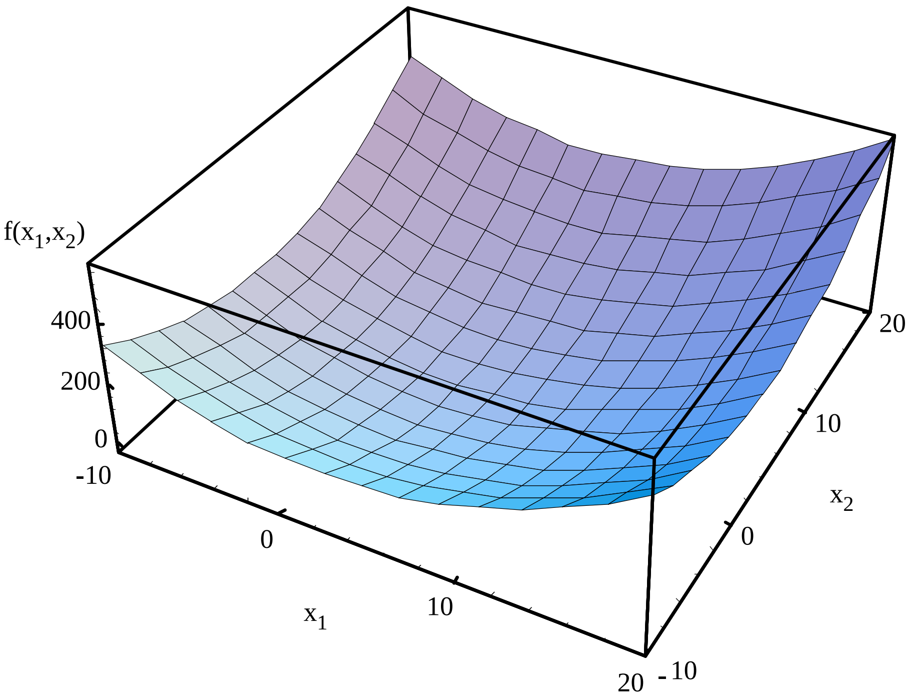
Com $x_1 = 5/2$ e $x_2 = 7/2$ <u>todas as condições KKT são satisfeitas</u>.

A função maximizada é $-f=5x_1 - x_1^2 - x_2^2 + 7x_2 - 5$ que <u>é côncava</u>. As restrições técnicas são lineares pelo que o problema é de Programação Convexa <u>situação em que as condições KKT são condição necessária e suficiente</u> para $x_1 = 5/2$ e $x_2 = 7/2$ ser garantidamente o ponto óptimo onde a função atinge o seu mínimo condicionado (Min f = -13.5).

b.



A figura seguinte apresenta o gráfico da função:



4.11 O problema equivalente é:

Max $[-f(x_1,x_2)]$	=	$- x_1^2$	-	$2x_1$	-	$2x_1x_2$	-	$4x_2^2$
	s.a.	$- 2x_1$	-	x_2	$\leq$	$- 10$		
		$- x_1$	-	$2x_2$	$\leq$	$- 10$		
				x_1,x_2	$\geq$	0		

As condições KKT são:

$\frac{\P f}{\P x_j} - \sum_{i=1}^{m} l_i \frac{\P g_i}{\P x_j} \leq 0$	(1)	$- 2x_1 - 2 - 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$
	(2)	$-2x_1 - 8x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 0$
$x_j (\frac{\P f}{\P x_j} - \sum_{i=1}^{m} l_i \frac{\P g_i}{\P x_j}) = 0$	(3)	$x_1 (- 2x_1 - 2 - 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0$
	(4)	$x_2 (-2x_1 - 8x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2) = 0$
$g_i - b_i \leq 0$	(5)	$-2x_1 - x_2 + 10 \leq 0$
	(6)	$- x_1 - 2x_2 + 10 \leq 0$
$l_i (g_i - b_i) = 0$	(7)	$\lambda_1 (-2x_1 - x_2 + 10) = 0$
	(8)	$\lambda_2 (- x_1 - 2x_2 + 10) = 0$
$l_i \geq 0$	(9)	$\lambda_1 , \lambda_2 \geq 0$
$x_j \geq 0$	(10)	$x_1 , x_2 \geq 0$

Colocando as condições (1), (2), (5) e (6) na forma de igualdade tem-se:

$- 2x_1 - 2x_2 +2\lambda_1 + \lambda_2 + s_1 = 2$

$-2x_1 - 8x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + s_2 = 0$

$2x_1 + x_2 - e_1 = 10$

$x_1 + 2x_2 - e_2 = 10$

com $s_1, s_2, e_1, e_2 \geq 0$

Atendendo ao valor das variáveis auxiliares s_1 , s_2, e_1 , e_2 e à restrição de complementaridade as condições KKT são equivalentes a:

$- 2x_1 - 2x_2 +2\lambda_1 + \lambda_2 + s_1 = 2$

$-2x_1 - 8x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + s_2 = 0$

$2x_1 + x_2 - e_1 = 10$

$x_1 + 2x_2 - e_2 = 10$

$x_1s_1 + x_2s_2 + \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 = 0$ (restrição de complementaridade)

$x_1 , x_2 , \lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2, e_1 , e_2 \geq 0$

Para utilizar o método Simplex é necessário utilizar variáveis Artificiais nas 3ª e 4ª igualdades e Minimizar a sua soma pelo que se tem:

$- 2x_1 - 2x_2 +2\lambda_1 + \lambda_2 + s_1 = 2$

$-2x_1 - 8x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + s_2 = 0$

$2x_1 + x_2 - e_1 + A_1 = 10$

$x_1 + 2x_2 - e_2 + A_2 = 10$

Min $f^a = A_1 + A_2$

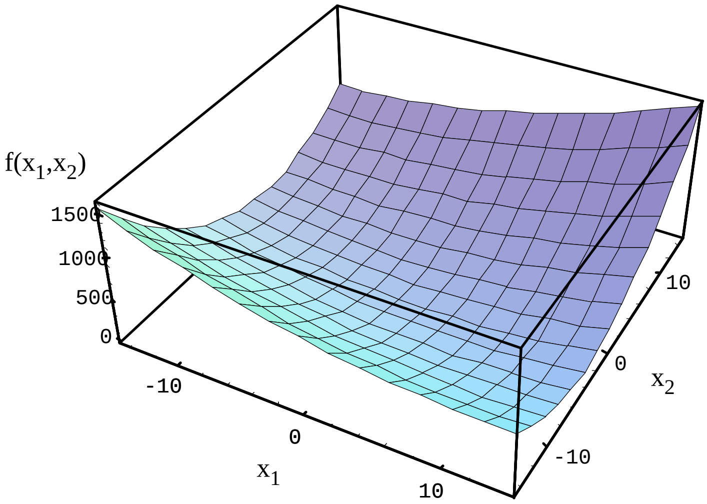
$A_1 , A_2 \geq 0$

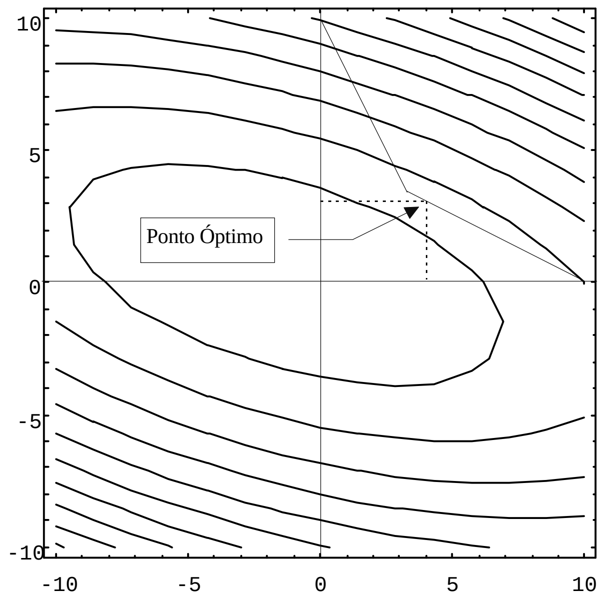
Aplicando o método Simplex modificado por Wolfe:

VB	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1	s_2	A_1	A_2	VSM	Obs.
s_1	-2	-2	2	1	0	0	1	0	0	0	2	Entra x_2 pois s_2 pode sair
s_2	-2	-8	1	2	0	0	0	1	0	0	0	garantindo-se $x_2s_2 = 0$
A_1	2	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	10	
A_2	1	2	0	0	0	-1	0	0	0	1	10	
$-f^a$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	
$-f^a$	-3	-3	0	0	1	1	0	0	0	0	-20	
• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •		
x_1	1	0	-3/4	0	0	-1/2	-1/2	1/4	0	1/2	4	
x_2	0	1	3/8	0	0	-1/4	1/4	-1/8	0	1/4	3	
λ_2	0	0	5/4	1	0	-3/2	1/2	1/4	0	3/2	16	
e_1	0	0	-9/8	0	1	-5/4	-3/4	3/8	-1	5/4	1	Solução óptima
$-f^a$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	

Solução Óptima: $x_1 = 4$; $x_2 = 3$; Max $f(x_1, x_2) = 84$

As figuras seguintes apresentam o gráfico da função proposta, e a projecção horizontal das curvas de nível.





4.12 O problema equivalente é:

$$
\begin{array}{lcccccc}
\text{Max } [-f(x_1,x_2)] & = & -2x_1^2 & - & x_2^2 & & \\
\text{s.a.} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
 & & -x_1 & - & x_2 & \leq & -10 \\
 & & x_1,x_2 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

a. As condições KKT são:

$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0$	(1)	$-4x_1 - \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$
	(2)	$-2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$
$x_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = 0$	(3)	$x_1 (-4x_1 - \lambda_1 + \lambda_2) = 0$
	(4)	$x_2 (-2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2) = 0$
$g_i - b_i \leq 0$	(5)	$x_1 + x_2 - 10 \leq 0$
	(6)	$-x_1 - x_2 + 10 \leq 0$
$\lambda_i (g_i - b_i) = 0$	(7)	$\lambda_1 (x_1 + x_2 - 10) = 0$
	(8)	$\lambda_2 (-x_1 - x_2 + 10) = 0$
$\lambda_i \geq 0$	(9)	$\lambda_1 , \lambda_2 \geq 0$
$x_j \geq 0$	(10)	$x_1 , x_2 \geq 0$

No ponto (10/3,20/3) todas as condições KKT são satisfeitas.

O problema é de programação convexa pelo que aquele ponto é óptimo.

b. Colocando as condições (1), (2), (5) e (6) na forma padrão Simplex tem-se:

$$-4x_1 - \lambda_1 + \lambda_2 + s_1 = 0$$

$$-2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 + s_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + s_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 - e_1 = 10$$

com $x_1 , x_2 , \lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2, s_3 , e_1 \geq 0$

Atendendo ao valor das variáveis auxiliares estabelece-se a restrição de complementaridade:

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + \lambda_1 s_3 + \lambda_2 e_1 = 0$$

Para utilizar o método Simplex é necessário utilizar uma variável Artificial na 4ª igualdade e Minimizar a função artificial $f^a(A_1) = A_1$ pelo que se tem:

Min $f^a = A_1$

$$-4x_1 - \lambda_1 + \lambda_2 + s_1 = 0$$

$$-2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 + s_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + s_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 - e_1 + A_1 = 10$$

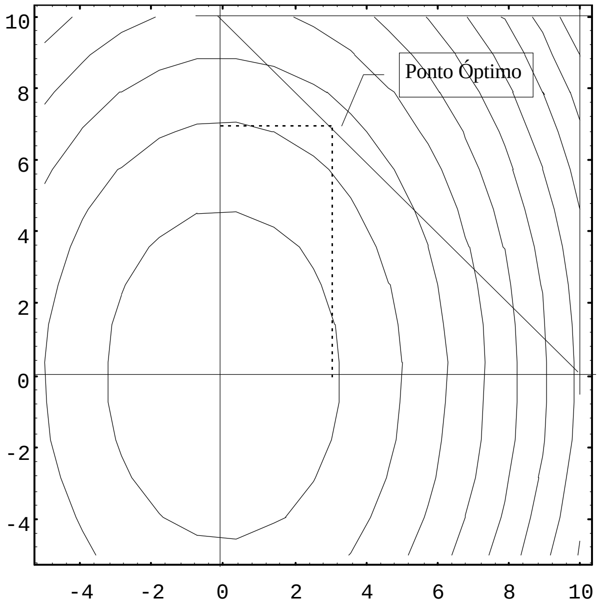
com $x_1 , x_2 , \lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2, s_3 , e_1, A_1 \geq 0$

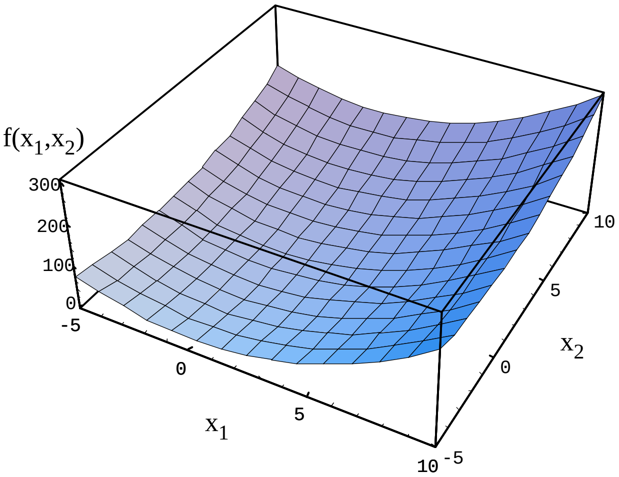
Aplicando o método Simplex modificado por Wolfe:

VB	x_1	x_2	λ_1	λ_2	s_1	s_2	s_3	e_1	A_1	VSM	Obs.
s_1	-4	0	-1	1	1	0	0	0	0	0	Entra x_1 pois pode sair a
s_2	0	-2	-1	1	0	1	0	0	0	0	variável complementar s_1.
s_3	1	1	0	0	0	0	1	0	0	10	Notar que a_{11} tem coeficiente
A_1	1	1	0	0	0	0	0	-1	1	10	negativo e $\theta_{min} = 0$.
$-f^a$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
$-f^a$	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	-10	
x_1	1	0	1/4	-1/4	-1/4	0	0	0	0	0	Entra x_2 pois pode sair a
s_2	0	-2	-1	1	0	1	0	0	0	0	variável complementar s_2.
s_3	0	1	-1/4	1/4	1/4	0	1	0	0	10	Notar que a_{22} tem coeficiente
A_1	0	1	-1/4	1/4	1/4	0	0	-1	1	10	negativo e $\theta_{min} = 0$.
$-f^a$	0	-1	1/4	-1/4	-1/4	0	0	1	0	-10	
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	-1/2	0	0	0	0	Entra λ_2 (pode entrar porque
x_1	1	0	1/4	-1/4	-1/4	0	0	0	0	0	a variável complementar é VNB).
s_3	0	0	-3/4	3/4	1/4	1/2	1	0	0	10	Sai A_1.
A_1	0	0	-3/4	3/4	1/4	1/2	0	-1	1	10	
$-f^a$	0	0	3/4	-3/4	-1/4	-1/2	0	1	0	-10	
λ_2	0	0	-1	1	1/3	2/3	0	-4/3	4/3	40/3	
x_2	0	1	0	0	1/6	-1/6	0	-2/3	2/3	20/3	
x_1	1	0	0	0	-1/6	1/6	0	-1/3	1/3	10/3	
s_3	0	0	-3/2	0	0	0	1	1	-1	0	Solução óptima
$-f^a$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	

Solução Óptima: $x_1 = 10/3$; $x_2 = 20/3$; Max $f(x_1, x_2) = 66 + 2/3$

As figuras seguintes apresentam a projecção horizontal das curvas de nível e o gráfico da função proposta.





4.13 A função Lagrangeana é :

$L = 3x_1 + x_2 - \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 + s_1 - 5) - \lambda_2 (x_1 - x_2 + s_2 - 1)$.

<u>Tendo em atenção que só as variáveis de folga utilizadas são não negativas</u>, as condições de primeira ordem para extremo são as seguintes:

- $3 - 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0$ (derivada parcial em ordem a x_1)
- $1 - 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0$ (derivada parcial em ordem a x_2)
- $-x_1^2 - x_2^2 - s_1 + 5 = 0$ (derivada parcial em ordem a λ_1)
- $-x_1 + x_2 - s_2 + 1 = 0$ (derivada parcial em ordem a λ_2)
- $- \lambda_1 \leq 0$ (derivada parcial em ordem a s_1)
- $- \lambda_1 s_1 = 0$ (complementaridade)
- $- \lambda_2 \leq 0$ (em ordem a s_2)
- $- \lambda_2 s_2 = 0$ (complementaridade)

Substituindo o valor das variáveis de folga, têm-se as condições KKT :

(1) $3 - 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0$

(2) $1 - 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0$

(3) $x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0$

(4) $\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0$

(5) $x_1 - x_2 - 1 \leq 0$

(6) $\lambda_2 (x_1 - x_2 - 1) = 0$

(7) $\lambda_1 , \lambda_2 \geq 0$

Estudo:

<u>1ª Hipótese</u> : $\lambda_1 = 0$

Da condição (2) tem-se $\lambda_2 = -1$ que não é admissível, concluindo-se que $\lambda_1 \neq 0$

<u>2ª Hipótese</u> : $\lambda_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 0$

Da condição (4) tem-se $x_1^2 + x_2^2 = 5$

Da condição (1) tem-se $(3 - 2\lambda_1 x_1) = 0$ ou seja $x_1 = 3/ 2\lambda_1$

Da condição (2) tem-se $(1 - 2\lambda_1 x_2) = 0$ ou seja $x_2 = 1/ 2\lambda_1$

Substituindo "x_1" e "x_2" por estes valores em $x_1^2 + x_2^2 = 5$ tem-se $\lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$ (porque $\lambda_1 \geq 0$)

O valor de $x_1 = 3/ 2\lambda_1$ é então $x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Estes valores das variáveis não verificam a condição (5) pelo que se conclui que λ_2 é diferente de zero.

<u>3ª Hipótese</u> : $\lambda_1 \neq 0$; $\lambda_2 \neq 0$

Das condições (4) e (6) tem-se o sistema de equações:

$$x_1^2 + x_2^2 = 5$$

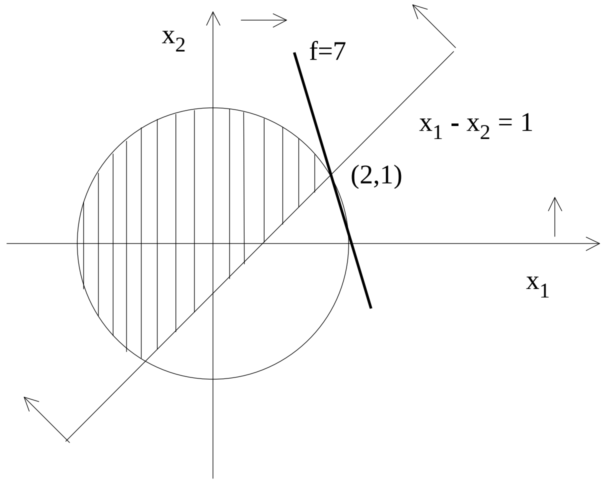
$$x_1 - x_2 = 1$$

com 2 soluções : $x_1 = -1$; $x_2 = -2$ e $x_1 = 2$; $x_2 = 1$.

Para $x_1 = -1$; $x_2 = -2$ obtém-se em (1) e (2) : $\lambda_1 = -2/3$ que não é admissível.

A solução $x_1 = 2$; $x_2 = 1$ permite calcular $\lambda_1 = 2/3$; $\lambda_2 = 1/3$ no mesmo sistema de equações

Com $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $\lambda_1 = 2/3$; $\lambda_2 = 1/3$ **todas** as condições KKT são observadas pelo que se conclui que o valor máximo da função-objectivo é 7. A figura seguinte permite verificar o exposto:



4.14 Se $x_1 > 1$ então $(1 - x_1)^3 < 0$ o que conduziria a $x_2 < 0$. Conclui-se assim que o valor óptimo de f(x) não pode exceder 1.

Dado que $x_1 = 1$; $x_2 = 0$ é admissível , o ponto com estas coordenadas deve ser a solução óptima.

Uma das condições KKT é:

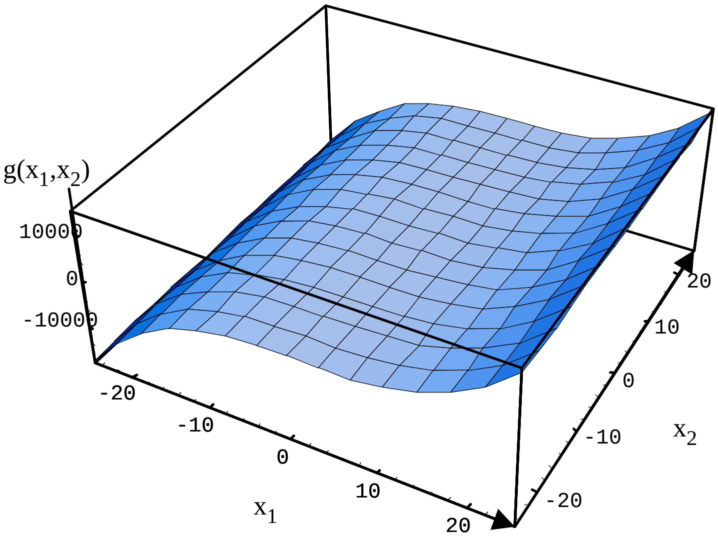
$$1 - 3\lambda(1 - x_1)^2 \leq 0$$

Para $x_1 =1$ e $x_2 = 0$ tem-se por substituição :

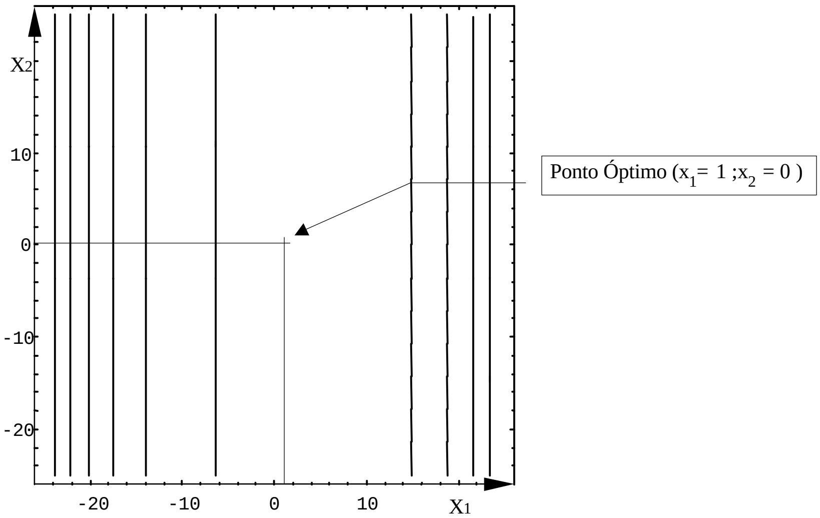
$$1 - 3\lambda(0)^2 \leq 0$$

$$1 \leq 0 \text{ (não satisfaz)}$$

Conclusão : A condição KKT testada "falha" no ponto óptimo.



A figura seguinte apresenta as curvas de nível da **função de restrição**:



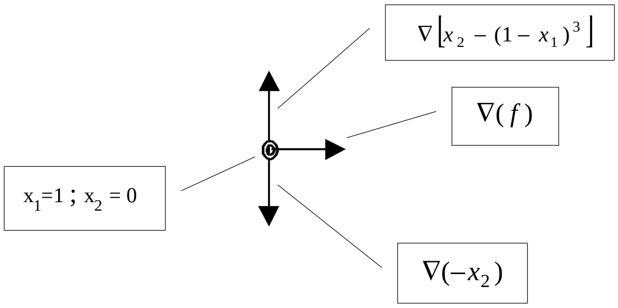
As condições KKT podem "falhar" no ponto-óptimo quando não forem linearmente independentes os gradientes associados às restrições saturadas.

No ponto (1,0) a restrição técnica x_2 - $(1-x_1)^3 \leq 0$ e a restrição lógica $-x_2 \leq 0$ estão saturadas ou seja verificam-se como igualdades.

Neste ponto os valores dos gradientes destas restrições são:

$$\nabla(\, x_2 - (1-x_1)^3\,) = \begin{bmatrix} 3(1-x_1)^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla(\,-x_2\,) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Dado que $[\ 0\ \ 1\ ]^T + [\ 0\ \ -1\ ]^T = [\ 0\ \ 0\ ]^T$ estes gradientes não são linearmente independentes.

Tenha-se então em atenção que:

"Sendo X^* a solução óptima de um PNL, se os gradientes das restrições saturadas (técnicas e lógicas) formarem um conjunto de vectores linearmente independentes, verificam-se as condições KKT ".

"Se o espaço de solução for definido exclusivamente por restrições lineares as condições KKT vigoram sempre no óptimo".

4.15 Resumo do método de Lemke:

- Ambiente : Programação quadrática
- Finalidade : Cálculo da solução das condições KKT
- Forma do modelo para estabelecer as condições KKT:

  Max f(x)

  s.a. $AX \leq B$

  $X \geq 0$

  Se o objectivo é Minimizar, maximizar a função simétrica.

  Se uma restrição é do tipo " ³", passá-la a "£" multiplicando por "-1".

  Se uma restrição é do tipo "=", substituí-la por duas restrições: uma do tipo "£" e outra do tipo "³".

- Técnica de cálculo : método Simplex modificado por Lemke
- Descrição

  1. Organizar o seguinte sistema de equações a partir das condições KKT:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\P f}{\P x_j} - \sum_{i=1}^{m} l_i \dfrac{\P g_i}{\P x_j} + E_j = 0 \\ AX + S_i = B \\ E_j, S_i \geq 0 \end{array}\right.$$

em que:

E_j = variável de folga na condição associada à derivada parcial em ordem a x_j

A = matriz tecnológica

S_i = variável de folga da restrição técnica "i"

B = vector-coluna dos segundos membros das restrições técnicas

2. Acrescentar aos segundos membros das equações precedentes a variável auxiliar "α" ficando o sistema de equações:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\P f}{\P x_j} - \sum_{i=1}^{m} l_i \frac{\P g_i}{\P x_j} + E_j - a = 0 \\ AX + S_i - a = B \\ a \geq 0 \end{array}\right.$$

As equações obtidas em 1. (forma-padrão do Simplex) são satisfeitas *se e só se* α=0. O recurso a esta variável é assim a forma engenhosa apresentada por Lemke para cálculo da solução das condições KKT. Recorrendo ao método Simplex, procura-se por combinação linear uma solução em que a variável "α" seja nula e as restantes variáveis tenham valor não negativo garantindo a satisfação da restrição de complementaridade:

$$x_j E_j + l_i S_i = 0$$

Para tal adoptam-se as seguintes regras para o processo iterativo:

1ª Iteração

- *Entra* para a base a variável "α".
- *Sai* da base a variável com valor negativo de maior valor absoluto

Restantes Iterações

- *Entra* para a base a variável complementar da que acabou de sair da base.
- *Sai* da base a variável associada ao valor "θ_{min} " usual em Simplex

Regra de Paragem

- O processo iterativo termina se "α" é VNB (valor nulo) ou não é possível obter "$\theta_{min} \geq 0$".

  No primeiro caso (α = 0) *há solução* para as condições KKT enquanto no segundo o problema *não tem solução*.

4.16 As condições KKT são:

(1) $2 - 2x_1 - 2\lambda \leq 0$

(2) $x_1 (2 - 2x_1 - 2\lambda) = 0$

(3) $3 - 2x_2 - 2\lambda \leq 0$

(4) $x_2 (3 - 2x_2 - 2\lambda) = 0$

(5) $2x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0$

(6) $\lambda (2x_1 + 2x_2 - 4) = 0$

(7) $x_1 , x_2 , \lambda \geq 0$

O sistema de equações de Lemke é formado a partir das condições (1), (3) e (5):

$$\left|\begin{array}{lcr} - 2x_1 - 2\lambda + e_1 - \alpha & = & -2 \\ 3 - 2x_2 - 2\lambda + e_2 - \alpha & = & -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + s_1 & = & 4 \end{array}\right.$$

Recorrendo ao método Simplex tem-se:

VB	x_1	x_2	λ	e_1	e_2	s_1	α	VSM	Obs.
e_1	-2	0	-2	1	0	0	-1	-2	Entra α.
e_2	0	-2	-2	0	1	0	-1	-3	Sai e_2
s_1	2	2	0	0	0	1	-1	4	
α	0	2	2	0	-1	0	1	3	Saiu $e_2 \Rightarrow$ Entra x_2
e_1	-2	2	0	1	-1	0	0	1	Sai e_1
s_1	2	4	2	0	-1	1	0	7	
x_2	-1	1	0	1/2	-1/2	0	0	1/2	Saiu $e_1 \Rightarrow$ Entra x_1
α	2	0	2	-1	0	0	1	2	Sai s_1
s_1	6	0	2	-2	1	1	0	5	
x_1	1	0	1/3	-1/3	1/6	1/6	0	5/6	Saiu $s_1 \Rightarrow$ Entra λ
x_2	0	1	1/3	1/6	-1/3	1/6	0	4/3	Sai α
α	0	0	4/3	-1/3	-1/3	-1/3	1	1/3	
λ	0	0	1	-1/4	-1/4	-1/4	3/4	1/4	Solução óptima pois "α" é VNB
x_1	1	0	0	-1/4	1/4	1/4	-1/4	3/4	
x_2	0	1	0	1/4	-1/4	1/4	-1/4	5/4	

Solução Óptima: $x_1 = 3/4$; $x_2 = 5/4$; Max $f(x_1, x_2) = 25/8$

4.17

Condições KKT:

$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0$	(1)	$15 + 4x_2 - 4x_1 - \lambda(1) \leq 0$
	(2)	$30 + 4x_1 - 8x_2 - \lambda(2) \leq 0$
$x_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = 0$	(3)	$x_1[15 + 4x_2 - 4x_1 - \lambda(1)] = 0$
	(4)	$x_2[30 + 4x_1 - 8x_2 - \lambda(2)] = 0$
$g_i - b_i \leq 0$	(5)	$x_1 + 2x_2 - 30 \leq 0$
$\lambda_i (g_i - b_i) = 0$	(6)	$\lambda(x_1 + 2x_2 - 30) = 0$
$\lambda_i \geq 0$	(7)	$\lambda \geq 0$
$x_j \geq 0$	(8)	$x_1, x_2 \geq 0$

O sistema de equações de Lemke é formado a partir das condições (1), (2) e (5):

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - \lambda + e_1 - \alpha = -15 \\ 4x_1 - 8x_2 - 2\lambda + e_2 - \alpha = -30 \\ x_1 + 2x_2 + s_1 - \alpha = 30 \end{cases}$$

Recorrendo ao método Simplex tem-se:

VB	x_1	x_2	λ	e_1	e_2	s_1	α	VSM	Obs.
e_1	-4	4	-1	1	0	0	-1	-15	Entra α.
e_2	4	-8	-2	0	1	0	-1	-30	Sai e_2
s_1	1	2	0	0	0	1	-1	30	
α	-4	8	2	0	-1	0	1	30	Saiu e_2 $\Rightarrow$ Entra x_2
e_1	-8	12	1	1	-1	0	0	15	Sai e_1
s_1	-3	10	2	0	-1	1	0	60	
x_2	-2/3	1	1/12	1/12	-1/12	0	0	5/4	Saiu e_1 $\Rightarrow$ Entra x_1
α	4/3	0	4/3	-2/3	-1/3	0	1	20	Sai s_1
s_1	11/3	0	7/6	-5/4	1/6	1	0	95/2	
x_1	1	0	7/22	-5/22	-1/22	3/11	0	285/22	Saiu s_1 $\Rightarrow$ Entra λ
x_2	0	1	13/44	-3/44	-5/44	2/11	0	435/44	Sai α
α	0	0	10/11	-4/11	-3/4	-4/11	1	30/11	
λ	0	0	1	-2/5	-3/10	-2/5	11/10	3	Solução óptima pois "α" é VNB
x_1	1	0	0	-1/10	1/20	2/5	-7/20	12	
x_2	0	1	0	1/20	-1/40	3/10	-13/40	9	

Solução Óptima: $x_1 = 12$; $x_2 = 9$; Max $f(x_1, x_2) = 270$

4.18 O problema equivalente é:

$$\text{Max } [-f(x_1,x_2)] = -x_1^2 - 2x_1 - 2x_1x_2 - 4x_2^2$$

$$\text{s.a.} \quad -2x_1 - x_2 \leq -10$$

$$-x_1 - 2x_2 \leq -10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

As condições KKT são:

$\frac{¶ f}{¶ x_j} - \sum_{i=1}^{m} l_i \frac{¶ g_i}{¶ x_j} \leq 0$	(1) $-2x_1 - 2 - 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$ (2) $-2x_1 - 8x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 0$
$x_j \left(\frac{¶ f}{¶ x_j} - \sum_{i=1}^{m} l_i \frac{¶ g_i}{¶ x_j}\right) = 0$	(3) $x_1(-2x_1 - 2 - 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0$ (4) $x_2(-2x_1 - 8x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2) = 0$
$g_i - b_i \leq 0$	(5) $-2x_1 - x_2 + 10 \leq 0$ (6) $-x_1 - 2x_2 + 10 \leq 0$
$l_i (g_i - b_i) = 0$	(7) $\lambda_1(-2x_1 - x_2 + 10) = 0$ (8) $\lambda_2(-x_1 - 2x_2 + 10) = 0$
$l_i \geq 0$	(9) $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$
$x_j \geq 0$	(10) $x_1, x_2 \geq 0$

O sistema de equações de Lemke é formado a partir das condições (1), (2) (5) e (6):

$$
\left|
\begin{array}{lcr}
-2x_1 - 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 + e_1 - \alpha & = & 2 \\
-2x_1 - 8x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + e_2 - \alpha & = & 0 \\
-2x_1 - x_2 + s & & -10 \\
-x_1 - 2x_2 + s_1 - \alpha & = & 10
\end{array}
\right.
$$

Recorrendo ao método Simplex tem-se:

VB	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1	s_2	α	VSM	Obs.
e_1	-2	-2	2	1	1	0	0	0	-1	2	Entra α
e_2	-2	-8	1	2	0	1	0	0	-1	0	Sai s_1 (ou s_2)
s_1	-2	-1	0	0	0	0	1	0	-1	-10	
s_2	-1	-2	0	0	0	0	0	1	-1	-10	
α	2	1	0	0	0	0	-1	0	1	10	Saiu s_1 $\Rightarrow$ Entra λ_1
e_1	0	-1	2	1	1	0	-1	0	0	12	Sai e_1
e_2	0	-7	1	2	0	1	-1	0	0	10	
s_2	1	-1	0	0	0	0	-1	1	0	0	
λ_1	0	-1/2	1	1/2	1/2	0	-1/2	0	0	6	Saiu e_1 $\Rightarrow$ Entra x_1
α	2	1	0	0	0	0	-1	0	1	10	Sai s_2
e_2	0	-13/2	0	3/2	-1/2	1	-1/2	0	0	4	
s_2	1	-1	0	0	0	0	-1	1	0	0	
x_1	1	-1	0	0	0	0	-1	1	0	0	Saiu s_2 $\Rightarrow$ Entra λ_2
λ_1	0	-1/2	1	1/2	1/2	0	-1/2	0	0	6	Sai e_2
α	0	3	0	0	0	0	1	-2	1	10	
e_2	0	-13/2	0	3/2	-1/2	1	-1/2	0	0	4	
λ_2	0	-19/3	0	1	-1/3	2/3	-1/3	0	0	8/3	Saiu e_2 $\Rightarrow$ Entra x_2
x_1	1	-1	0	0	0	0	-1	1	0	0	Sai λ_1
λ_1	0	5/3	1	0	2/3	-1/3	-1/3	0	0	14/3	
α	0	3	0	0	0	0	1	-2	1	10	
x_2	0	1	3/5	0	2/5	-1/5	-1/5	0	0	14/5	Saiu λ_1 $\Rightarrow$ Entra s_1
λ_2	0	0	13/5	1	7/5	-1/5	-6/5	0	0	74/5	Sai α
x_1	1	0	3/5	0	2/5	-1/5	-6/5	1	0	14/5	
α	0	0	-9/5	0	-6/5	3/5	8/5	-2	1	8/5	
	•	•	•	•	•	•	•	•	•		

VB	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1	s_2	α	VSM	Obs.
s_1	0	0	-9/8	0	-3/4	3/8	1	-5/4	5/8	1	Solução óptima pois "α" é
x_2	0	1	3/8	0	1/4	-1/8	0	-1/4	1/8	3	VNB
λ_2	0	0	5/4	1	1/2	1/4	0	-3/2	3/4	16	
x_1	1	0	-3/4	0	-1/2	1/4	0	-1/2	3/4	4	

Solução Óptima: $x_1 = 4$; $x_2 = 3$; Max $f(x_1, x_2) = 84$

5.

5.1 Considere-se o problema de programação convexa:

Max f(X)

s.a. $AX \leq B$

$X \geq 0$

em que $X = [\, x_1, x_2, \ldots , x_n \,]^T$, f(X) é a <u>função-objectivo não linear</u>, A_{mxn} é a matriz tecnológica e B é o vector-coluna dos segundos membros das <u>restrições técnicas que são lineares</u>.

Sendo X_0 um ponto-tentativa inicial, o valor de f(X) no intervalo de X_0 a X é a série de Taylor em potências de $(X\text{-}X_0)$:

$$f(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{k}(X_0)}{k!}(X - X_0)^k$$

O valor de f(X) na proximidade de X pode ser obtido pela <u>aproximação linear</u>:

$$f(X) \approx f(X_0) + \nabla f(X_0)(X - X_0)$$

Dado que $f(X_0)$ e $\nabla f(X_0)(X_0)$ são valores constantes, pode construir-se a função:

$$h(X) = \nabla f(X_0)(X)$$

que <u>sendo linear</u> permite calcular, pelo método Simplex, um ponto X_{PL} que é solução admissível do modelo original e solução óptima do modelo:

Max h(X)

s.a. $AX \leq B$

$X \geq 0$

O valor da função linear h(X) aumenta necessariamente ao longo do segmento de extremos X_0 e X_{PL} mas <u>dada a distância que pode haver entre estes dois pontos</u> nada garante que o mesmo se verifique com f(X) pelo que é necessário determinar qual o ponto X^* onde f(X) atinge o maior valor.

O ponto X^* pertencente ao segmento tem coordenadas:

$X^* = X_0 + t(X_{PL} - X_0)$ com $0 \leq t \leq 1$,

pelo que é necessário calcular Max $f\,[(X_0 + t(X_{PL} - X_0)]$ para o que se recorre a qualquer dos métodos de optimização livre de funções monovariáveis (método da bissecção por exemplo).

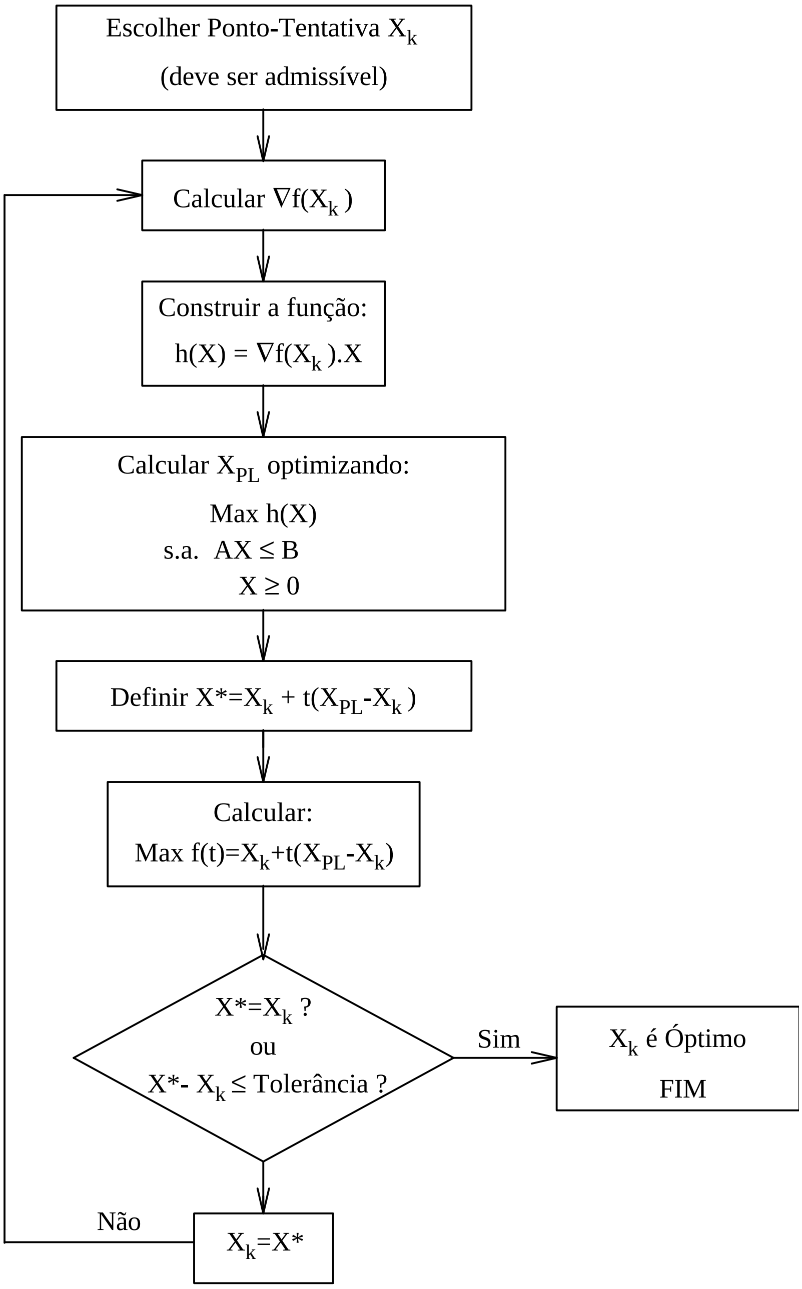
Em X^* tem-se $f(X^*) \geq f(X_0)$ pelo que:

- se $f(X^*) = f(X_0)$ então X_0 é a solução óptima do modelo de programação não linear
- se $f(X^*) > f(X_0)$ então X^* passa a constituir novo ponto-tentativa onde se repete o procedimento descrito

O cálculo <u>termina</u> quando se verificar uma das seguintes situações:

- $X_k = X_{k-1}$ com X_{k-1} como solução óptima
- quando dois pontos sucessivos estiverem suficientemente próximos (uso de tolerância),no caso de a função-objectivo <u>aumentar sempre</u> ao longo do processo iterativo

Fluxograma do método Frank-Wolfe:



5.2 Considerando o modelo na forma:

$$\text{Max } (-f(X)) = -x_1^2 + 6x_1 - x_2^3 + 3x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

$$\text{tem-se } \nabla(-f) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 6 \\ -3x_2^2 + 3 \end{bmatrix}$$

Considerando para ponto-tentativa inicial $X_1 = (0\ ,\ 0)$ que é <u>admissível</u> , calcula-se:

$$\nabla[-f(0\ ,\ 0)] = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

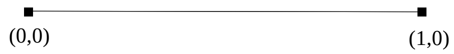
Organiza-se a função <u>linear</u> $h(X) = 6x_1 + 3x_2$ e optimiza-se pelo método Simplex:

$$\text{Max } h(X) = 6x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

com solução óptima $X_{PL} = (1\ ,\ 0\ )$.

O valor máximo de $-f(X)$ é um ponto X^* (igual a $X_1 + t(X_{PL} - X_1) = (\ t\ ,\ 0)$ com $0 \leq t \leq 1$), do segmento:



Calcula-se $\text{Max}(-f(X^*)) = -x_1^2 + 6x_1 - x_2^3 + 3x_2 = -t^2 + 6t$.

Recorrendo, por exemplo, ao método da bissecção determina-se o valor óptimo de $t^* = 1$ a que corresponde $X^*=(1,0)$ onde a função atinge o maior valor. Como X_1 e X^* são diferentes e muito afastados, considera-se o ponto (1,0) como *novo ponto-tentativa* X_2 .

Calcula-se novamente:

$$\nabla[-f(1\ ,\ 0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Organiza-se a função <u>linear</u> $h(X) = 4x_1 + 3x_2$ e optimiza-se pelo método Simplex:

$$\text{Max } h(X) = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

com solução óptima $X_{PL} = (1\ ,\ 0\ )$.

O valor máximo de $-f(X)$ é atingido no ponto $X^* = X_2 + t(X_{PL} - X_2) = (\ 1\ ,\ 0)$ com $0 \leq t \leq 1$.

Calcula-se $\text{Max}(-f(X^*)) = -x_1^2 + 6x_1 - x_2^3 + 3x_2 = 5$.

Como X_2 e X^* são iguais e a função $-f(x)$ é côncava conclui-se que o ponto de coordenadas $x_1=1$, $x_2=0$ é solução óptima com Min $f(X) = -\ 5$.

5.3

1. Calcula-se o gradiente da função no ponto tentativa $X_1 = (5,5)$:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 15+4x_2-4x_1 \\ 30+4x_1-8x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

2. Optimiza-se recorrendo ao método Simplex:

$$\text{Max } h(X) = 15x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

A solução óptima é X_{PL} = (30 , 0).

3. Calcula-se $X^* = X_1 + t(X_{PL} - X_1) = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} + t\left(\begin{bmatrix}30\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}5+25t\\5-5t\end{bmatrix}$

4. Maximiza-se a função $f(X^*) = -1850t^2 + 325t + 175$, obtendo-se $t^* = 0.088$ a que corresponde:

$$X^* = \begin{bmatrix}7.196\\4.561\end{bmatrix}$$

5. Porque $X^* \neq X_1$ considera-se para novo ponto-tentativa $X_2 = X^* = \begin{bmatrix}7.196\\4.561\end{bmatrix}$

6. Recalcula-se o gradiente da função no ponto tentativa X_2 :

$$\nabla f = \begin{bmatrix}15+4x_2-4x_1\\30+4x_1-8x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4.459\\22.3\end{bmatrix}$$

7. Optimiza-se recorrendo ao método Simplex:

Max $h(X) = 4.459x_1 + 22.3x_2$

s.a. $x_1 + 30x_2 \leq 30$

$x_1 , x_2 \geq 0$

A solução óptima é X_{PL} = (0 , 15).

8. Calcula-se $X^* = X_2 + t(X_{PL} - X_2) = \begin{bmatrix}7.196\\4.561\end{bmatrix} + t\left(\begin{bmatrix}0\\15\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}7.196\\4.561\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}7.196-7.196t\\4.561+10.44t\end{bmatrix}$

9. Maximiza-se a função $f(X^*) = -840t^2 + 201t + 189$, obtendo-se $t^* = 0.119$ a que corresponde:

$$X^* = \begin{bmatrix}6.337\\5.807\end{bmatrix}$$

10. Porque $X^* \neq X_2$ considera-se para novo ponto-tentativa $X_3 = X^* = \begin{bmatrix}6.337\\5.807\end{bmatrix}$

11. Recalcula-se o gradiente da função no ponto tentativa X_3 :

$$\nabla f = \begin{bmatrix}15+4x_2-4x_1\\30+4x_1-8x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12.88\\8.89\end{bmatrix}$$

12. Optimiza-se recorrendo ao método Simplex:

Max $h(X) = 12.88x_1 + 8.89x_2$

s.a. $x_1 + 30x_2 \leq 30$

$x_1 , x_2 \geq 0$

A solução óptima é X_{PL} = (30 , 0).

14. Calcula-se $X^* = X_3 + t(X_{PL} - X_3) = \begin{bmatrix}6.337\\5.807\end{bmatrix} + t\left(\begin{bmatrix}30\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6.337\\5.807\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6.337+23.667t\\5.807-5.807t\end{bmatrix}$

15. Maximiza-se a função $f(X^*) = -1804t^2 + 253t + 201$, obtendo-se $t^* = 0.07$ a que corresponde:

$$X^* = \begin{bmatrix}7.996\\5.4\end{bmatrix}$$

16. Porque $X^* \neq X_3$ considerava-se para novo ponto-tentativa $X_4 = X^* = \begin{bmatrix} 7.796 \\ 5.4 \end{bmatrix}$

5.4 Solução óptima no ponto $x_1 = 1.695$; $x_2 = 1.914$

5.5 O método SUMT é caracterizado pela simplicidade e versatilidade embora propenso a instabilidade numérica.

O problema original é substituído por uma sequência de problemas livres cujas soluções convergem para um máximo local do problema original (máximo global em programação convexa).

Para um modelo do tipo:

Max $f(x_1, ..., x_n)$

s.a. $AX \leq B$

$X \geq 0$

estabelece-se uma função-barreira B(X) que para X admissível, satisfaz as seguintes condições:

- B(X) tem valores reduzidos se X é um ponto afastado das fronteiras do espaço de solução
- B(X) tem valores muito elevados em pontos próximos da fronteira daquele espaço tendendo para "∞ " quando a distância do ponto X à fronteira tende para zero.

A função B(X) utilizada pelo método é:

$$B(X) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - g_i(X)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}$$

em que: m = número de restrições técnicas

n = número de variáveis de decisão

b_i = segundos membros das restrições técnicas

$g_i(X)$ = primeiros membros das restrições técnicas

Para valores admissíveis de X, o denominador de cada termo é proporcional à distância de X à fronteira associada à restrição pelo que B(X) funciona como fronteira de repulsão.

Cada um dos problemas livres a resolver sequencialmente envolve a optimização de :

Max $P(X,r) = f(X) - rB(X)$

em que "r" tem valores estritamente positivos sucessivamente decrescentes tendendo para zero.

A redução sucessiva do valor de "r" é estabelecida por recorrência (valor seguinte igual ao anterior multiplicado por "θ" que satisfaz $0 < \theta < 1$ sendo típico usar θ=0.01).

Se X_k é um máximo de P(X,r) então:

$P(X_k, r) = f(X_k) - rB(X_k)$

e se X^* for óptimo de f(X) então:

$f(X^*) \geq f(X_k) - rB(X_k)$

$f(X^*) \leq f(X_k) + rB(X_k)$

donde resulta que tendendo "r" para zero, X_k tende para X^* .

O processo iterativo termina quando $rB(X) \leq \varepsilon$ (tolerância).

Casos particulares:

1. Minimização de f(X) : maximiza-se Max (-f(X))

2. Restrição técnica do tipo “ ≤ “ : transforma-se em restrição do tipo “ ≥ “

3. Restrição técnica do tipo “ = “ : substituir $\dfrac{-r}{b_i - g_i(X)}$ *por* $\dfrac{-[b_i - g_i(X)]^2}{\sqrt{r}}$ na expressão de P(X,r).

5.6 Solução óptima no ponto $x_1 = 1.695$; $x_2 = 1.914$

6.

6.1 Variáveis de Decisão : x_1 (produção do computador A) ; x_2 (produção do computador B)

Função Objectivo: Max $f = p_1\, x_1 + p_2\, x_2$

Restrições técnicas :

$2x_1$	+	$3x_2$	$\leq$	5000	(mão de obra)
$3x_1$	+	x_2	$\leq$	4500	(chips)

Restrições lógicas : x_1 , $x_2 \geq 0$ e Inteiro

As relações das variáveis de decisão com os preços de venda permitem obter por substituição:

Max $f = 4000p_1 - 10p_1^2 + 1.8\, p_1\, p_2 + 2000p_2 - 9p_2^2$

Esta função é Côncava o que conjugado com restrições lineares permite concluir que as condições KKT vigoram no óptimo.

Condições KKT:

(1) $4000 - 20p_1 + 1.8\, p_2 + 17.6\, \lambda_1 + 29.2\, \lambda_2 \leq 0$

(2) $1.8\, p_1 + 2000 - 18\, p_2 + 25\lambda_1 + 6\, \lambda_2 \leq 0$

(3) $p_1\, (4000 - 20p_1 + 1.8\, p_2 + 17.6\, \lambda_1 + 29.2\, \lambda_2) = 0$

(4) $p_2\, (1.8\, p_1 + 2000 - 18\, p_2 + 25\lambda_1 + 6\, \lambda_2) = 0$

(5) $-17.6\, p_1 - 25\, p_2 \leq -9000$

(6) $-29.2\, p_1 - 6\, p_2 \leq -9500$

(7) $\lambda_1\, (-17.6\, p_1 - 25\, p_2 + 9000) = 0$

(8) $\lambda_2\, (-29.2\, p_1 - 6\, p_2 + 9500) = 0$

(9) p_1 , $p_2 \geq 0$

(10) λ_1 , $\lambda_2 \geq 0$

<u>1ª Hipótese</u> : $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 \neq 0$

$\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow -29.2p_1 - 6p_2 + 9500 = 0$

$p_1 \neq 0 \Rightarrow 4000 - 20p_1 + 1.8\, p_2 + 17.6\, \lambda_1 + 29.2\, \lambda_2 = 0$

$p_2 \neq 0 \Rightarrow 1.8\, p_1 + 2000 - 18\, p_2 + 25\lambda_1 + 6\, \lambda_2 = 0$

Resolvendo o sistema tem-se $p_1 = 292.8093$ u.m. ; $p_2 = 158.3231$ u.m. ; $\lambda_2 = 53.80807$ u.m. que é uma solução admissível a que corresponde $x_1 = 1230$ computadores do tipo A, $x_2 = 809$ computadores do tipo B e f= 488358.4 u.m.

Não há outro ponto que satisfaça as condições KKT pelo que o calculado é a solução óptima.

a. Plano óptimo de produção: 1230 computadores do tipo A ; 809 computadores do tipo B com preços de venda de $p_1 = 292.81$ u.m. e $p_2 = 158.33$ u.m. respectivamente.

A receita máxima da venda será de 488358.36 u.m.

b. Preço-sombra da hora de mão de obra $=\lambda_1 = 0$

c. Preço-sombra do chip = $\lambda_2 = 53.81$ u.m.

6.2

- <u>Variáveis de Decisão</u> : x_1 , x_2 , x_3 (nível de produção de A, B, C respectivamente)

  Tem-se assim :

  $x_1 = 18 - p_1$; $x_2 = 9 + 1/3\ p_1 - p_2$; $x_3 = 13 - p_3$

- <u>Restrições técnicas</u> :

  $3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 150$ (horas máquina)

  $4x_1 + 10x_2 + 7x_3 \leq 280$ (horas de trabalho)

- <u>Restrições lógicas</u> : x_1 , x_2 ,x_3 ≥ 0 e Inteiro
- <u>Função-objectivo</u> : Max $f = (13x_1 - x_1^2) + (3x_2 - (1/3)\ x_1x_2 - x_2^2) + (4x_3 - x_3^2)$

Nota sobre a organização da função objectivo:

Secretária do tipo A:

- total do lucro = total da venda - total do custo de produção = $p_1\ x_1 - 5x_1 = x_1\ (18 - x_1) - 5x_1$

  $= 13x_1 - x_1^2$

Secretária do tipo B:

- total do lucro = total da venda - total do custo de produção = $p_2\ x_2 - 12x_2 =$

  $= x_2\ (9 + 1/3\ p_1 - x_2) - 12x_2 = x_2\ [\ 9 + (1/3)\ (18 - x_1) - x_2\ ] - 12x_2 =$

  $= 3x_2 - (1/3)\ x_1x_2 - x_2^2$

Secretária do tipo C:

- total do lucro = total da venda - total do custo de produção = $p_3\ x_3 - 9x_3 = 4x_3 - x_3^2$

6.3 O modelo de PNL é:

Max $f\ (T,C) = T^{2/3}.C^{1/3}$

s.a. $2T + C \leq 30$

$T\ , C \geq 0$

Para maximizar a função pode maximizar-se $l_n\ f(T,C) = \frac{2}{3} l_n\ T + \frac{1}{3} l_n\ C$, dado que l_n é uma função crescente.

As condições KKT são:

(1) $\frac{2}{3T} - 2l \leq 0$

(2) $T\left(\frac{2}{3T} - 2l\right) = 0$

(3) $\frac{1}{3C} - l \leq 0$

(4) $C\left(\frac{1}{3C} - l\right) = 0$

(5) $2T + C - 30 \leq 0$

(6) $l\left(2T + C - 30\right) = 0$

(7) λ, T, $C \geq 0$

Admitindo 2T+C-30 ≠ 0 então λ=0 e em (2) tem-se $\frac{2T}{3T} = 0$ o que é falso pelo que se conclui que λ≠0 e que 2T+C-30 = 0. Se T=0 tem-se em (1) $\frac{2}{0}$ o que não é possível pelo que T≠0.

Então em (2) fica $\left(\frac{2}{3T} - 2l\right) = 0$.

De (4) conclui-se que C≠0 pelo que $\left(\frac{1}{3C} - l\right) = 0$.

Dispõe-se assim do sistema de equações:

$$\left|\begin{array}{l} 2T+C-30 = 0 \\ \left(\frac{2}{3T} - 2l\right) = 0 \\ \left(\frac{1}{3C} - l\right) = 0 \end{array}\right|$$

com solução λ=1/30 ; T=10 ; C=10 a que corresponde f(T,C) = 10 máquinas.

6.4 Do sistema de equações organizado no problema anterior tem-se:

$T = \frac{1}{3l}$ $\quad e \quad$ $C = \frac{1}{3l}$

Considerando "x" o capital mínimo a determinar tem-se a restrição 2T+C=x. Substituindo T e C fica:

$2\left(\frac{1}{3l}\right) + \frac{1}{3l} = x \ pelo\ que\ \ l = \frac{1}{x}$. Resulta assim $T = \frac{x}{3}$ $\quad e \quad$ $C = \frac{x}{3}$ pelo que $f = \frac{x}{3} = 6$, implica x=18.

A solução é portanto 18 unidades de capital como mínimo para produzir 6 máquinas.

6.5

a. O modelo de PNL é:

Max $f(x_1 , x_2) = 30x_1^{1/2} + 20x_2^{1/2}$

s.a. $x_1 + x_2 \leq 100$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Recorrendo ás condições KKT :

(1) $\frac{15}{\sqrt{x_1}} - l \leq 0$

(2) $x_1\left(\frac{15}{\sqrt{x_1}} - l\right) \leq 0$

(3) $\frac{10}{\sqrt{x_2}} - l \leq 0$

(4) $x_2\left(\frac{10}{\sqrt{x_2}} - l\right) \leq 0$

(5) $x_1 + x_2 \leq 100$

(6) $\lambda(x_1 + x_2 -100) = 0$

(7) $\lambda, x_1 , x_2 \geq 0$

Admitindo x_1 , x_2 , λ diferentes de zero, tem-se o sistema de equações:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{15}{\sqrt{x_1}} - l = 0 \Rightarrow l\sqrt{x_1} = 15 \\ \dfrac{10}{\sqrt{x_2}} - l = 0 \Rightarrow l\sqrt{x_2} = 10 \\ x_1 + x_2 = 100 \end{array}\right.$$

com solução x_1 = 69.231 u.m. ; x_2 = 30.769 u.m. ; λ = 1.803 ; Max f= 360.555 u.m.

b. Aproximadamente λ = 1.803 (em rigor, 1.798 pois a função não é linear…).

6.6

a. O modelo de PNL é:

$$\begin{aligned} Max\ \ f(X) &= (70-4x_1)x_1 + (150-15x_2)x_2 - (100+15x_1+15x_2) = \\ &= 55x_1 - 4x_1^2 + 135x_2 - 15x_2^2 - 100 \end{aligned}$$

O estudo da função conduz a:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 55-8x_1 \\ 135-30x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad H = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -30 \end{bmatrix}$$

A matriz H é definida negativa pelo que a função é côncava.

Recorrendo à condição de 1ª ordem para extremo tem-se:

$$\begin{cases} 55-8x_1 = 0 \\ 135-30x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{55}{8} \\ x_2 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad ; \quad Max\ \ f(X) = 392.81\ u.m.$$