gave
gabinete de avaliação educacional

Ministério da Educação

# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

## 12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
(Dec.-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, para alunos que se matricularam no 10.º Ano em 2003-2004)

Duração da Prova: **90 minutos** 7/Dezembro/2005

## PROBABILIDADES E COMBINATÓRIA

# VERSÃO 1

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui três itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

**1.** Três raparigas e os respectivos namorados posam para uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor, lado a lado, de modo que cada par de namorados fique junto na fotografia?

**(A)** $12$ **(B)** $24$ **(C)** $36$ **(D)** $48$

**2.** Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (*Espadas*, *Copas*, *Ouros* e *Paus*). Em cada naipe há um *Ás*, três figuras (*Rei*, *Dama* e *Valete*) e mais nove cartas (do *Dois* ao *Dez*).

A Joana pretende fazer uma sequência com **seis** cartas do naipe de *Espadas*.
Ela quer iniciar a sequência com o *Ás*, quer que as três cartas seguintes sejam figuras e quer concluir a sequência com duas das nove restantes cartas desse naipe.

Quantas sequências diferentes pode a Joana fazer?

**(A)** $416$ **(B)** $432$ **(C)** $528$ **(D)** $562$

**3.** De uma certa linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos dois primeiros termos é $21$.

Qual é o maior termo dessa linha?

**(A)** $169\,247$ **(B)** $175\,324$ **(C)** $184\,756$ **(D)** $193\,628$

**4.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 9$.

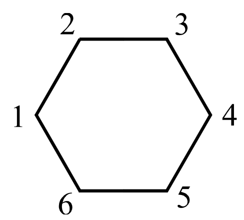
No gráfico desta função, considere os pontos cujas abcissas são $-4,\ -2,\ 0,\ 2$ e $4$.

Escolhem-se, ao acaso, dois desses cinco pontos e desenha-se o segmento de recta que tem por extremidades esses dois pontos.

Qual é a probabilidade de esse segmento intersectar o eixo das abcissas?

**(A)** $0{,}4$ **(B)** $0{,}5$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}7$

**5.** Na figura está representado um hexágono regular com os vértices numerados de 1 a 6.




Lança-se três vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.
Em cada lançamento, selecciona-se o vértice do hexágono que corresponde ao número saído nesse lançamento.

Note que, no final da experiência, podemos ter um, dois ou três pontos seleccionados (por exemplo: se sair o mesmo número três vezes, só é seleccionado um ponto).

Qual é a probabilidade de se seleccionarem três pontos que sejam os vértices de um triângulo equilátero?

**(A)** $\frac{1}{18}$ **(B)** $\frac{1}{16}$ **(C)** $\frac{1}{14}$ **(D)** $\frac{1}{12}$

**6.** O João vai lançar seis mil vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e vai adicionar os números saídos.

De qual dos seguintes valores é de esperar que a soma obtida pelo João esteja mais próxima?

**(A)** $20\,000$ **(B)** $21\,000$ **(C)** $22\,000$ **(D)** $23\,000$

**7.** Admita que a variável *peso*, em quilogramas, das raparigas de 15 anos, de uma certa escola, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 40.

Sabe-se ainda que, nessa escola, 20% das raparigas de 15 anos pesam mais de 45 Kg.

Escolhida, ao acaso, uma rapariga de 15 anos dessa escola, qual é a probabilidade de o seu peso estar compreendido entre 35 Kg e 40 Kg ?

**(A)** $0{,}2$ **(B)** $0{,}25$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}35$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

**1.** Seja $C$ o conjunto de todos os números naturais com três algarismos (ou seja, de todos os números naturais de 100 a 999).

**1.1.** Quantos elementos do conjunto $C$ são múltiplos de 5?

**1.2.** Quantos elementos do conjunto $C$ têm os algarismos todos diferentes?

**2.**

**2.1.** Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$, com $P(A) > 0.$
Sejam $\overline{A}$ e $\overline{B}$ os acontecimentos contrários de $A$ e de $B,$ respectivamente.
Seja $P(B|A)$ a probabilidade de $B,$ se $A.$

Mostre que: $$\frac{P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(A)} = 1 - P(B|A)$$

**2.2.** Próximo de uma praia portuguesa, realiza-se um acampamento internacional de juventude, no qual participam jovens de ambos os sexos.

Sabe-se que:
- a quarta parte dos jovens são portugueses, sendo os restantes estrangeiros;
- 52% dos jovens participantes no acampamento são do sexo feminino;
- considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 5 são rapazes.

No último dia, a organização vai sortear um prémio, entre todos os jovens participantes no acampamento.

Qual é a probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira? Apresente o resultado na forma de percentagem.

**Nota**: se o desejar, pode utilizar a igualdade da alínea anterior (nesse caso, comece por identificar claramente, no contexto do problema, os acontecimentos $A$ e $B$); no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo (como, por exemplo, através de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama em árvore).

**3.** Uma caixa, que designamos por caixa 1, contém duas bolas pretas e três bolas verdes. Uma segunda caixa, que designamos por caixa 2, contém duas bolas pretas e uma bola verde.

**3.1.** Considere a seguinte experiência: retirar, ao acaso, uma bola de cada caixa. Seja $X$ a variável aleatória «*número de bolas verdes que existem no conjunto das duas bolas retiradas*».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória $X$, apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

**3.2.** Considere agora que, tendo as duas caixas a sua constituição inicial, se realiza a seguinte experiência:

- ao acaso, retiram-se simultaneamente três bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2;
- em seguida, novamente ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2.

Sejam os acontecimentos:
$A$: «as três bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»;
$B$: «as duas bolas retiradas da caixa 2 são de cores diferentes».

**Sem utilizar** a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P(B|A)$, apresentando o seu valor na forma de fracção irredutível. Numa pequena composição, explique o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar da interpretação do significado de $P(B|A)$, no contexto do problema, significado esse que deverá começar por explicar.

**3.3.** Considere agora que, na caixa 2, tomando como ponto de partida a sua constituição inicial, se colocam mais $n$ bolas, todas amarelas. Esta caixa fica, assim, com duas bolas pretas, uma bola verde e $n$ bolas amarelas.

Considere a seguinte experiência: ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas dessa caixa.

Sabendo que a probabilidade de uma delas ser amarela e a outra ser verde é $\frac{5}{39}$, determine o valor de $n$.

## COTAÇÕES

**Grupo I** ..........................................................................................**63**

Cada resposta certa ............................................................................ 9
Cada resposta errada........................................................................... 0
Cada questão não respondida ou anulada ....................................... 0

**Grupo II** .........................................................................................**137**

**1.** ................................................................................... 36
  **1.1.** ..................................................................................18
  **1.2.** ..................................................................................18

**2.** ................................................................................... 38
  **2.1.** ..................................................................................20
  **2.2.** ..................................................................................18

**3.** ................................................................................... 63
  **3.1.** ..................................................................................20
  **3.2.** ..................................................................................20
  **3.3.** ..................................................................................23

**TOTAL** ........................................................................................ **200**

# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

## 7 de Dezembro de 2005

## RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

---

### Grupo I

**1.** $3! \times 2^3 = 6 \times 8 = 48$ **Resposta D**

**2.** $1 \times 3! \times {}^9A_2 = 1 \times 6 \times 72 = 432$ **Resposta B**

**3.** ${}^{20}C_{10} = 184\,756$ **Resposta C**

**4.** $\dfrac{2 \times 3}{{}^5C_2} = 0{,}6$ **Resposta C**

**5.** $\dfrac{2 \times 3!}{6^3} = \dfrac{1}{18}$ **Resposta A**

**6.** Distribuição de probabilidades associada à variável aleatória
$X$ : «Número saído no lançamento de um dado»:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Média da variável aleatória $X$ :
$1 \times \dfrac{1}{6} + 2 \times \dfrac{1}{6} + \ ..... + 6 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{21}{6} = 3{,}5$

$3{,}5$ é o número médio (esperado) de pontos, por lançamento.

$3{,}5 \times 6\,000 = 21\,000$ **Resposta B**

**7.** $0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$ **Resposta C**

# Grupo II

## 1.

**1.1.** $9 \times 10 \times 2 = 180$

**1.2.** $9 \times 9 \times 8 = 648$

## 2.

**2.1.** $$\frac{P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{1 - P(B) - P(\overline{A \cup B})}{P(A)} =$$

$$= \frac{1 - P(B) - [1 - P(A \cup B)]}{P(A)} = \frac{1 - P(B) - 1 + P(A \cup B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{-P(B) + P(A \cup B)}{P(A)} = \frac{-P(B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P(B|A)$$

**2.2.** Do enunciado, sabemos que, considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 5 são rapazes. Isto significa que, no universo dos portugueses, a proporção de rapazes é $\frac{3}{5}$, ou seja, designando por $A$ o acontecimento «*ser português*» e por $B$ o acontecimento «*ser rapaz*», tem-se que

$P(B|A) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Tem-se também que $P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$ e $P(\overline{B}) = 0{,}52$

Donde, aplicando a fórmula provada na alínea anterior, tem-se que

$$\frac{0{,}52 - P(\overline{A} \cap \overline{B})}{0{,}25} = 1 - 0{,}6 \Leftrightarrow 0{,}52 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}25 \times 0{,}4$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}42$$

A probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira é $0{,}42$.

## 3.

### 3.1. Tem-se:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{2\times 2}{5\times 3}$ | $\frac{3\times 2+2\times 1}{5\times 3}$ | $\frac{3\times 1}{5\times 3}$ |

Donde vem:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{1}{5}$ |

### 3.2.

É pedida a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa 2 serem de cores diferentes, sabendo que as três bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor.
Ora, se as três bolas retiradas da caixa 1 e colocadas na caixa 2 são da mesma cor, têm que ser necessariamente todas verdes. Tal deve-se ao facto de existirem apenas duas bolas pretas na caixa 1.
Após a transferência das três bolas da caixa 1 para a caixa 2, esta fica com duas bolas pretas e quatro bolas verdes, num total de seis bolas.
Ao retirarmos duas bolas desta caixa, existem, assim, ${}^6C_2$ casos possíveis, dos quais $2\times 4$ são favoráveis ao acontecimento «*sair uma bola de cada cor*».
A probabilidade pedida é, assim, de acordo com a Regra de Laplace, $\frac{2\times 4}{{}^6C_2}$ , ou seja, $\frac{8}{15}$

### 3.3.

Equacionando o problema, vem: $\frac{n}{{}^{3+n}C_2} = \frac{5}{39}$

Donde, $\frac{n}{\frac{(3+n)(2+n)}{2}} = \frac{5}{39}$ pelo que

$\frac{2n}{6+5n+n^2} = \frac{5}{39}$ ou seja $78n = 30 + 25n + 5n^2$

Donde vem $5n^2 - 53n + 30 = 0$

Portanto, tem-se $n = \frac{53\pm\sqrt{53^2-4\times 5\times 30}}{2\times 5} = \frac{53\pm 47}{10}$

Tem-se, assim, $n = 10 \vee n = 0{,}6$.

Como, nas condições do problema, $n$ tem que ser um número natural, vem, por fim, que $n = 10$ é a solução procurada.