VIII. Fluxo Máximo

1. Generalidades

Na prática surgem situações que podem ser representadas em grafo *orientado* associando a cada um dos arcos uma dada "**capacidade**" que "**limita a quantidade de fluxo**" que nele pode transitar.

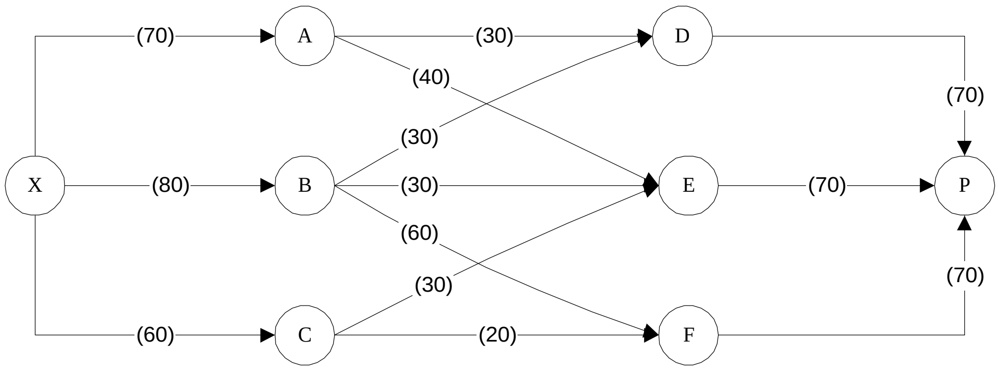
Nestas situações pretende-se calcular o "**Fluxo Máximo**" que a rede suporta "**desde um ponto inicial - Entrada da rede até atingir um ponto final - Saída da Rede**".

Exemplo:

O grafo representa um sistema viário, de uma zona urbana, entre o largo X e a praça P

Os arcos representam o sentido obrigatório do trânsito, indicando-se para cada um deles a capacidade de tráfego em viaturas/hora.

Quantas viaturas/hora podem, no máximo, atingir a praça P ?



2. Modelo de Programação Linear

Para formalizar o problema é necessário atender aos **pressupostos** seguintes.

- O grafo tem vértices Inicial e Final *únicos e distintos* (Entrada e Saída da rede)
- O grafo é *orientado* tendo cada um dos arcos uma dada capacidade c_{ij} *finita*.
- O Fluxo que percorre a rede satisfaz as condições seguintes.
  - não se altera com o tempo
  - é infinitamente divisível em cada arco (i,j) , tendo valor x_{ij} tal que $0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$
- Nos vértices Intermédios (distintos dos vértices de Entrada e Saída da rede) verifica-se o princípio da **Conservação do Fluxo** ou seja, o fluxo recebido (acumulado) em qualquer destes vértices é igual ao fluxo saído do mesmo (transhipment)

a. Modelo de PL

- ***Variáveis de Decisão***: uma por cada arco (i,j) representando o Fluxo (viaturas/hora) que nele transita
- ***Função Objectivo***: *fluxo máximo em P* (número máximo de viaturas que atinge P) que é igual à soma dos fluxos nos arcos incidentes para o interior de P :

  $$\text{Max } f(X) = x_{DP} + x_{EP} + x_{FP}$$

  Atendendo a que o fluxo em P tem que ser igual ao fluxo saído de X, a função também pode ser definida por Max $f(X) = x_{XA} + x_{XB} + x_{XC}$

- ***Restrições Técnicas***:

  Tendo o grafo "N" vértices há "N-2" vértices intermédios e consequentemente **"N-2" restrições de Conservação de Fluxo** (serão expressas na forma geral Fluxo que Sai = Fluxo que Entra ou seja Fluxo que Sai - Fluxo que Entra =0)

  Vértice **A**: $x_{AD} + x_{AE} - x_{XA} = 0$

  Vértice **B**: $x_{BD} + x_{BE} + x_{BF} - x_{XB} = 0$

  Vértice **C**: $x_{CE} + x_{CF} - x_{XC} = 0$

  Vértice **D**: $x_{DP} - x_{AD} + x_{BD} = 0$

  Vértice **E**: $x_{EP} - x_{AE} - x_{BE} - x_{CE} = 0$

  Vértice **F**: $x_{FP} - x_{BF} - x_{CF} = 0$

  Dado que cada uma das Variáveis de Decisão, associada a cada um dos arcos do grafo, tem limite superior igual à capacidade do arco têm-se as **restrições de Capacidade**:

  $x_{XA} \leq 70$; $x_{XB} \leq 80$; $x_{XC} \leq 60$

  $x_{AD} \leq 30$; $x_{AE} \leq 40$

  $x_{BD} \leq 30$; $x_{BE} \leq 30$; $x_{BF} \leq 60$;

  $x_{CE} \leq 30$; $x_{CF} \leq 20$;

  $x_{DP} \leq 70$; $x_{EP} \leq 70$; $x_{FP} \leq 70$;

- ***Restrições Lógicas***:

  $x_{XA}, x_{XB}, x_{XC}, x_{AD}, x_{AE}, x_{BD}, x_{BE}, x_{BF}, x_{CE}, x_{CF}, x_{DP}, x_{EP}, x_{FP} \geq 0$

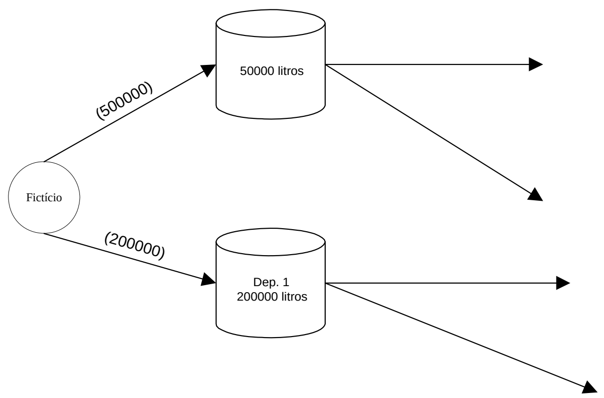
3. Algoritmo de Ford-Fulkerson

Das várias algoritmias específicas para resolver o problema do Fluxo Máximo apresenta-se o método de Ford-Fulkerson (1962) começando por definir conceitos básicos:

a. Vértice Inicial (Final) Único (entrada / saída da rede)

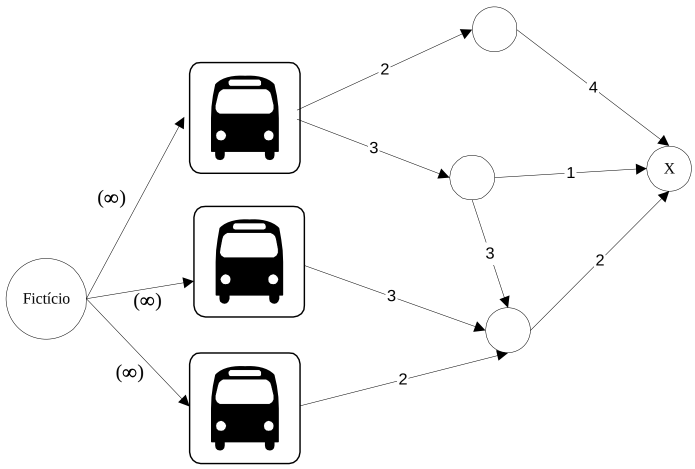
Para aplicar o método é necessário que a rede tenha um vértice inicial único. Quando tal não sucede, considera-se um vértice inicial fictício ligando-o aos vértices iniciais da rede por arcos com capacidade igual à "oferta" dos vértices reais da rede.

Na figura seguinte, dois depósitos de água, com capacidades de 50 e 20 milhares de litros, alimentam uma rede de distribuição. Para dispor de entrada única na rede, considera-se o vértice inicial fictício ligado aos depósitos por arcos de igual capacidade:



Por vezes pretende-se estudar uma rede sem que existam quaisquer origens com oferta de fluxo à rede.

Assim, por exemplo, admita-se que do sistema de transporte que a figura apresenta apenas se conhece a capacidade de transporte nas diferentes ligações disponíveis (centenas de passageiros/hora). Para calcular o fluxo máximo na estação "X" , é necessário considerar uma entrada fictícia na rede ligada aos pontos iniciais de tomada de passageiros com arcos de capacidade infinita:



Quando estas situações ocorrem no final da rede procede-se de modo idêntico com um vértice final fictício.

b. Capacidade restante de um arco

Se o arco (i,j) com capacidade c_{ij} transporta o fluxo φ_{ij} a sua capacidade restante é $c_{ij} - \varphi_{ij}$.

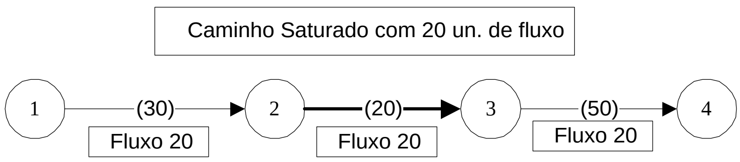
c. Arco Saturado

Diz-se que o arco (i,j) está *saturado* quando a sua capacidade restante é nula.

d. Caminho Elementar Saturado

É um caminho que não repete vértices, com fluxo não negativo em qualquer dos seus arcos e em que pelo menos um destes está saturado.

Exemplo:



O caminho 1 - 2 - 3 - 4 é percorrido por 20 unidades de fluxo. Diz-se que o caminho está saturado porque no arco (2,3) a capacidade restante é nula.

Quando um caminho está saturado **não é possível aumentar** o fluxo que o percorre**.**

<u>Para cálculo do Fluxo Máximo só interessa analisar caminhos elementares com extremos inicial e final respectivamente nas Entrada e Saída da rede</u>.

e. Cadeia Elementar Saturada

Se no grafo orientado se relaxar o sentido dos arcos e se definir uma sucessão de arestas sem repetir vértices tem-se uma cadeia elementar.

Se ao percorrer as arestas da cadeia for reactivado o sentido dos arcos originais, *haverá arcos percorridos no sentido directo e outros percorridos no sentido inverso.*

<u>Para cálculo do Fluxo Máximo só interessa analisar cadeias elementares com extremos inicial e final respectivamente nas Entrada e Saída da rede</u>.

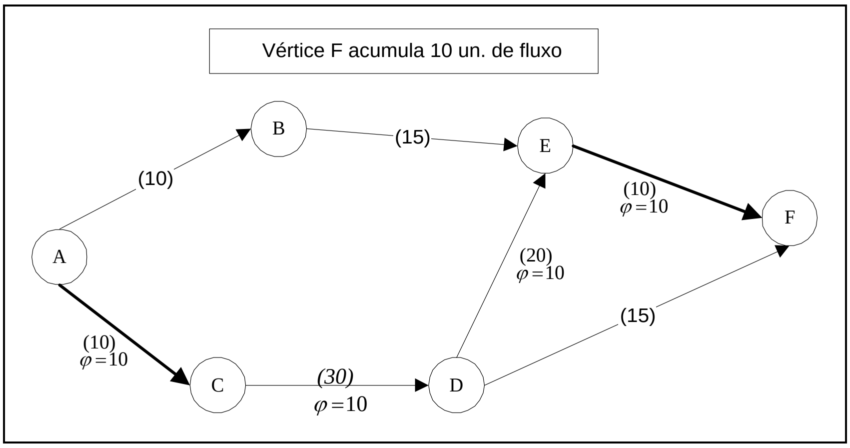
Uma cadeia diz-se **saturada quando se verifica, pelo menos, uma das seguintes situações:**

- pelo menos um arco tem, no sentido directo, capacidade restante nula;
- pelo menos um arco tem, no sentido inverso, fluxo nulo;

Resulta assim que *enquanto houver no grafo uma ou mais cadeias elementares não saturadas* ligando as Entrada e Saída da rede é possível reencaminhar fluxo e aumentar o que atinge a Saída da rede.

Exemplo :

Admita-se numa rede a seguinte situação com 10 unidades de fluxo:



Legenda: (10) = capacidade do arco ; φ=10 é o fluxo no arco

Na rede há 3 caminhos elementares de A (entrada da rede) a F (saída da rede) na seguinte situação:

- A - B - E - F : SATURADO; arco (E,F) com capacidade restante nula;
- A - C - D - E - F : SATURADO; arcos (A,C) e (E,F) com capacidade restante nula;
- A - C - D - F : SATURADO; arco (A,C) com capacidade restante nula;

Não sendo possível aumentar o fluxo recorrendo a caminhos elementares será que 10 unidades é o Fluxo Máximo transportável pela rede ?

Por simples inspecção verifica-se que se o fluxo de 10 unidades acumulado em D for reencaminhado para o arco (D,F) teremos:

- fluxo nulo nos arcos (D,E) e (E,F)
- caminho A - B - E - F **não saturado**

pelo que passa a ser possível encaminhar 10 unidades de fluxo pelo caminho A - B - E - F.

Deste modo, o fluxo acumulado em F que era de 10 unidades passa a ser de 20 unidades.

Ora este aumento pode identificar-se recorrendo à cadeia elementar não saturada A - B - E - D - F (arcos percorridos no "sentido directo" têm capacidade restante positiva e o percorrido no "sentido inverso" tem fluxo positivo). Nesta cadeia regista-se:

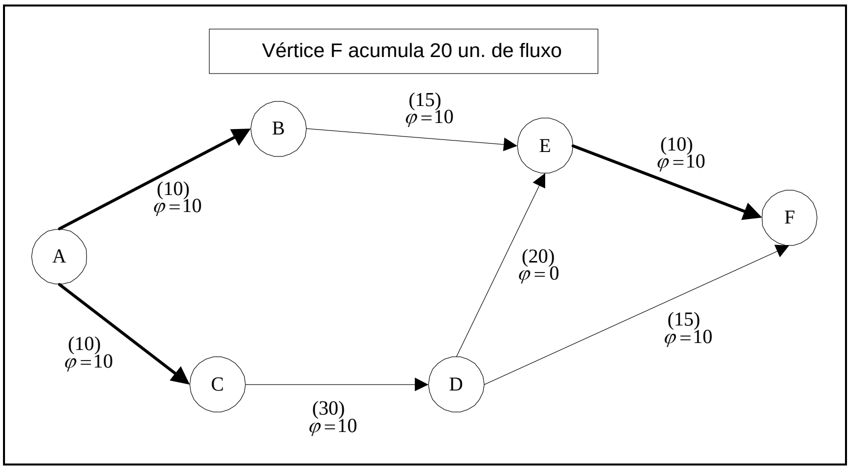
a capacidade restante nos arcos percorridos no "sentido directo" : AB=10 ; BE =15; DF = 15

o fluxo nos arcos percorridos no "sentido inverso": ED=10

O mínimo dos valores registados é α =10, que representa a quantidade de fluxo a lançar na cadeia do seguinte modo:

- aumentar o fluxo de α=10 nos arcos percorridos no "sentido directo"
- reduzir o fluxo de α=10 nos arcos percorridos no "sentido inverso"

O encaminhamento de fluxo passará a ser o seguinte:



f. Fluxo Máximo

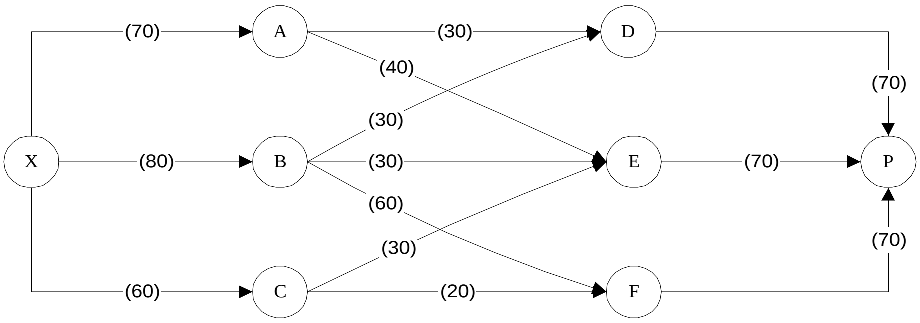
Sempre que entre os vértices Inicial (entrada) e Final (saída) da rede *todos os caminhos e cadeias elementares estão saturados o fluxo máximo foi atingido* (não é possível aumentar o fluxo recebido no vértice final).

g. Método de Ford-Fulkerson para cálculo do Fluxo Máximo

1º Passo : Saturar todos os caminhos elementares que ligam as Entrada e Saída da rede;

2º Passo : Saturar todas as cadeias elementares que ligam as Entrada e Saída da rede;

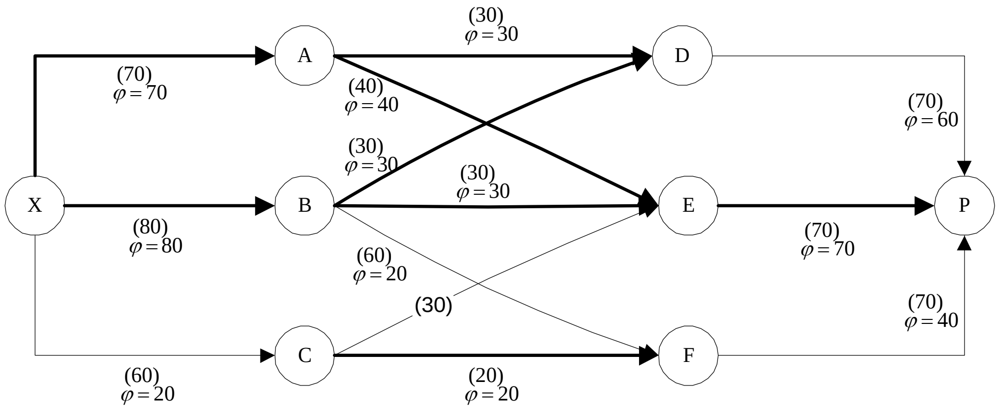
h. Resolução do problema proposto na alínea a.



1º Passo: Saturar Caminhos Elementares

Caminho	Arco(s) com menor capacidade restante	Fluxo saturante	Arco(s) saturado(s)
X - A - D - P	(A,D) = 30	30	(A,D)
X - A - E - P	(X,A)=40 ; (A,E)=40	40	(X,A) ; (A,E)
X - B - D - P	(B,D)=30	30	(B,D)
X - B - E - P	(B,E)=30 ; (E,P)=30	30	(B,E) ; (E,P)
X - B - F - P	(X,B)=20	20	(X,B)
X - C - F - P	(C,F)=20	20	(C,F)

Todos os caminhos elementares de X a P estão saturados (ver figura seguinte).



Terminado o 1º passo, de X sai o fluxo total de 70+80+20=170 acumulando P o fluxo 60+70+40=170.

2º Passo: Saturar Cadeias Elementares

Para detectar uma cadeia não saturada de X a P proceda-se do seguinte modo:

Em P : pode atingir-se no sentido directo quer de D quer de F pois (D,P) e (F,P) não estão saturados (estudar estes 2 vértices).

Em D : não pode ser atingido no sentido directo quer de A quer de B (arcos saturados); não se põe a hipótese de ser atingido no sentido inverso pois isso conduzia a P já estudado.

Em F : para encaminhar fluxo para P só o pode receber a partir de B no sentido directo (há capacidade restante em (B,F) pelo que B deve ser analisado).

Em B : só pode ser atingido no sentido inverso a partir de E pois o arco (B,E) tem fluxo (estudar E); não se coloca a hipótese de ser atingido no sentido inverso a partir de F pois já se concluiu que só usando (B,F) é possível aumentar o fluxo que atinge F.

Em E : pode atingir-se a partir de C no sentido directo pois (C,E) não está saturado (estudar C).

Em C: pode atingir-se a partir de X no sentido directo pois (X,C) não está saturado.

Porque é possível partir de X e atingir P pela cadeia elementar não saturada X - C - E - B - F - P o fluxo em P não é máximo. Percorrendo a cadeia e registando:

- a capacidade restante nos arcos percorridos no sentido directo:

(X,C)=40;(C,E)=30;(B,F)=40; (F,P)=30

e

- o fluxo dos arcos percorridos no sentido inverso:

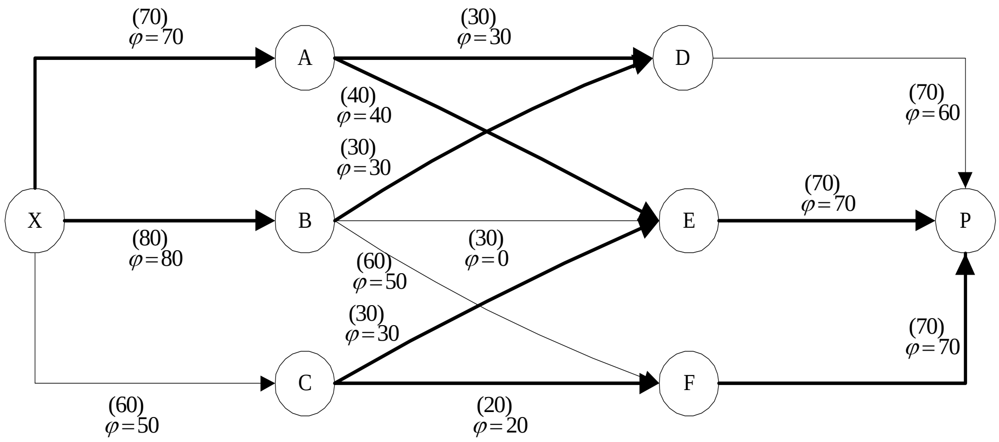
(B,E)=30

fixa-se o mínimo destes valores α=30.

Percorre-se agora a cadeia com o fluxo α=30:

- somando-o nos arcos percorridos no "sentido directo"
- subtraindo-o nos arcos percorridos no "sentido inverso"

após o que a situação é a seguinte (ver figura seguinte):



O fluxo em P que era de 170 unidades passou a ser de 170 + 30 = 200 unidades.

Será máximo ?

É necessário prosseguir com a saturação das cadeias elementares de X a P.

Em P o fluxo só aumenta se recebido de D pois só (D,P) não está saturado (estudar D).

Em D não pode ser recebido mais fluxo pois os arcos (A,D) e (B,D) estão saturados.

Assim sendo, as cadeias elementares de X a P estão saturadas terminando o 2º passo.

A solução óptima é então:

- atingem a praça P 200 viaturas/hora

A título de curiosidade veja-se que o arruamento (B,E), com fluxo nulo, pode ser encerrado ao trânsito por desnecessário.

i. Corte de Valor Máximo (Secção de capacidade mínima)

O conhecimento do Fluxo Máximo de uma rede não é em regra suficiente para o estudo da rede.

Designa-se genericamente por **Corte** o conjunto de arcos de que pelo menos um pertence a qualquer caminho que ligue as Entrada e Saída da rede. Uma rede pode admitir vários cortes sendo de interesse aquele cuja soma dos fluxo nos arcos é igual ao Fluxo máximo (Corte de valor máximo). Este corte corresponde à *secção de capacidade mínima da rede pelo que o aumento da capacidade desta só é possível <u>começando por aumentar</u> a capacidade de um ou mais arcos do corte.*

Para detectar o Corte de Valor Máximo inicia-se o estudo no vértice inicial (X) e marcam-se todos os vértices que é possível atingir *nas seguintes condições*:

- um arco só pode ser percorrido no sentido directo se tiver capacidade restante positiva;
- um arco só pode ser percorrido no sentido inverso se tiver fluxo positivo;

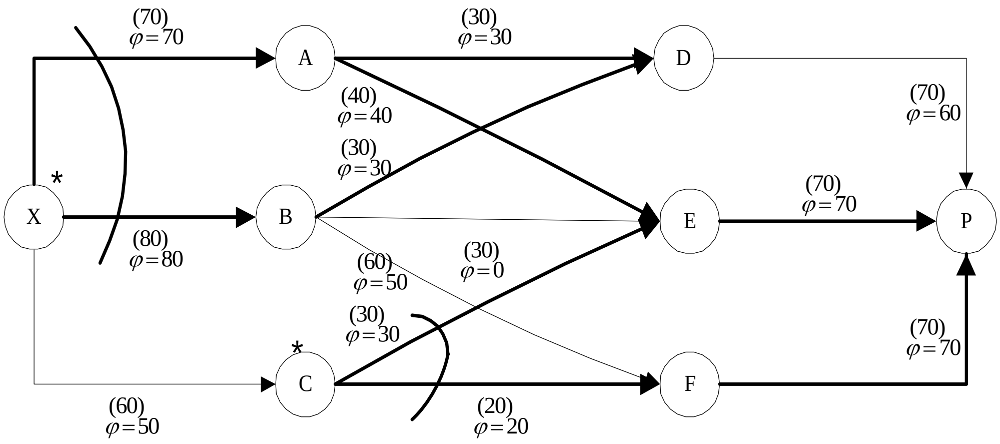
Começa-se então por marcar o vértice X.

De X só pode percorrer-se (X,C) porque tem capacidade restante positiva; marcar C;

Em C não se pode progredir no sentido directo porque (C,E) e (C,F) estão saturados.

Deste modo fica concluída a marcação (só X e C foram assinalados).

Para identificar o **Corte Máximo**, "***assinalam-se os arcos que ligam vértices marcados a vértices não marcados***" ou seja (X,A), (X,B), (C,E) e (C,F) (ver figura seguinte).



O fluxo no conjunto dos arcos cortados é 70+80+30+20= 200 =Fluxo Máximo.

Nota: se ao estudar o corte máximo fosse atingido P então haveria que concluir que o fluxo máximo ainda não tinha sido atingido ...

4. Auto Teste

a. Uma empresa de transportes planeia instalar a seguinte capacidade de transporte semanal entre os depósitos centrais A,B,C,D e os depósitos regionais R,S,T,U (viaturas de 5 toneladas):

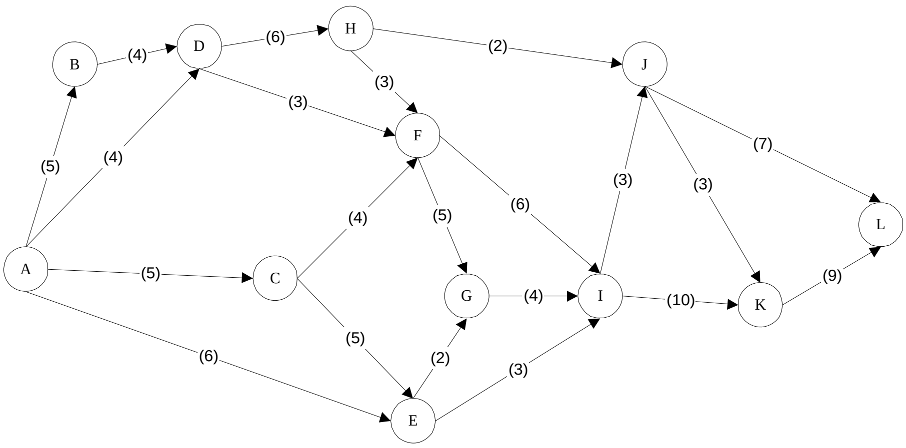
	R	S	T	U
A	3	1	1	
B	1		3	1
C	1	3		1
D		1	3	1

Considerando ser de 20 ton. a capacidade de armazenagem de cada um dos depósitos verifique se o sistema de transporte está bem planeado. Se tal não suceder apresente proposta de correcção.

b. A figura representa uma parte da rede de uma empresa de telecomunicações. Os vértices A e L representam dois centros de distribuição. Quando em "A" é recebida uma chamada a mesma é encaminhada para "L" através de um conjunto de terminais de reencaminhamento.

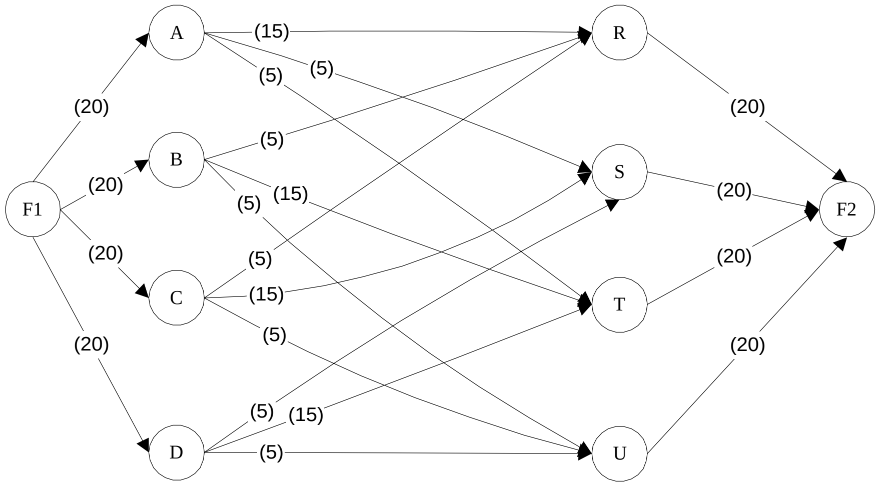
A capacidade de cada ligação está indicada em centenas de chamadas.

Considerando uma chamada como uma unidade de fluxo, pretende-se conhecer o número máximo de chamadas que é possível estabelecer simultaneamente entre A e L.



5. Solução do Auto Teste

a. Dado serem 4 quer as Origens quer os Destinos de fluxo, é necessário criar uma Entrada e uma Saída fictícias (F_1 e F_2) ligadas àquelas por arcos com capacidade igual às ofertas e procuras:



Uma solução é a seguinte:

1º Passo - Saturar Caminhos Elementares de F_1 a F_2 (uma opção):

Caminho	Fluxo saturante	Arco(s) Saturados	Fluxo em F_2
F_1- A - R - F_2	15	(A,R)	15
F_1- A - S - F_2	5	(F_1,A) ; (A,S)	20
F_1- B - R - F_2	5	(B,R), (R,F_2)	25
F_1- C - S - F_2	15	(C,S) ; (S,F_2)	40
F_1- B - T - F_2	15	(F_1,B) ; (B,T)	55
F_1- C - U - F_2	5	(F_1,C) ; (C,U)	60
F_1- D - T - F_2	5	(T,F_2)	65
F_1- D - U - F_2	5	(D,U)	70

2º Passo : Saturar cadeias elementares de F_1 a F_2 :

Cadeia	Fluxo saturante	Arco(s) Saturados	Fluxo em F_2
F_1 - D - T - B - U - F_2	5	(B,U)	75 = Fluxo Máximo

Na matriz seguinte encontram-se registados os fluxos:

- que saem dos depósitos centrais (diagonal principal)
- que passam em cada ligação entre depósitos
- que chegam aos depósitos regionais (diagonal principal)

	A	B	C	D	R	S	T	U
A	20				15	5		
B		20			5		10	5
C			20			15		5
D				15			10	5
R					20			
S						20		
T							20	
U								15

Corte de valor Máximo : arcos (B,U), (C,U), (D,U), (R,F_2), (S,F_2) (T,F_2) ; 75 u. De fluxo

Verifica-se que o depósito U só recebe 15 ton. enquanto D só escoa 15 ton. pelo que o sistema de transporte está mal dimensionado. Aumentando de 5 toneladas a capacidade do arco (D,U), pertencente ao corte, (o que pode fazer-se, por exemplo, por transferência da capacidade de transporte de (D,S) ou (D,T) onde há subaproveitamento) o problema fica resolvido.

Restam ainda excessos de capacidade de carga em algumas ligações o que não é analisado por inexistência de critério.

b. Número Máximo de chamadas = 14 centenas (fluxo máximo em L).

Na matriz seguinte encontra-se registado o número máximo de chamadas (centenas):

- que saem de A (diagonal principal)
- que passam em cada ligação
- que chegam a L (diagonal principal)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	14	1	4	4	5							
B				1								
C						4						
D						3		2				
E							2		3			
F							1		6			
G									3			
H										2		
I										3	9	
J												5
K												9
L												14

Corte de Valor Máximo = (H,J) , (I,J), (K,L) = 14 centenas de chamadas