

X. Colorir os Vértices de um Grafo

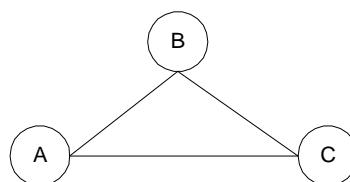
a. Número cromático do grafo

Considere-se que um aluno necessita frequentar as cadeiras A, B e C.

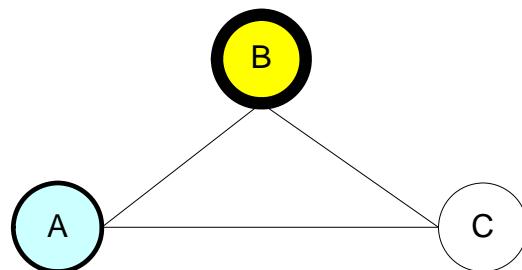
Quantos momentos diferentes necessitam ser reservados no horário para que o aluno possa estar presente às aulas das referidas cadeiras ?

Dada a simplicidade da questão é fácil concluir serem necessários 3 momentos distintos.

A mesma conclusão pode obter-se recorrendo a um grafo não orientado em que os vértices representam as cadeiras e as arestas conectam cadeiras que não podem ter lugar em simultâneo:



Organizado o grafo, o objectivo é *minimizar o número de cores necessárias para colorir todos os vértices de forma a que, vértices adjacentes, não tenham a mesma cor*¹.

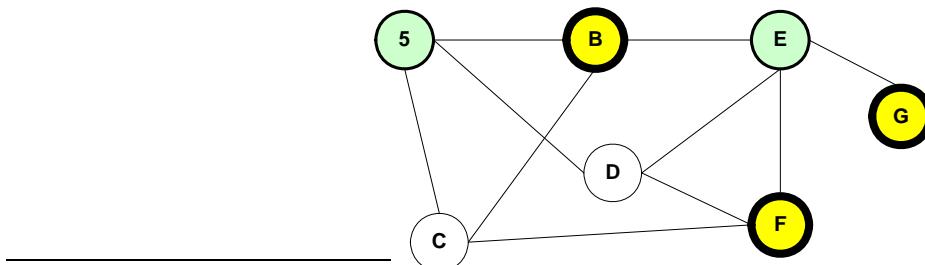


Considere-se a relação dos exames requeridos, na mesma época, pelos alunos de uma escola:

Número do aluno	Cadeiras requeridas
1	A,B
2	A,D
3	D,E,F
4	B,C
5	A,C
6	B,E
7	C,F
8	E,G

Admitindo que o aluno só pode executar, no máximo, 1 exame por dia, qual é o menor número de dias necessário para executar todos os exames ?

O grafo com a *coloração óptima dos vértices* é o seguinte:



¹ Denomina-se “número cromático do grafo” .

O número cromático é 3. São necessários, no mínimo, 3 dias para realizar os subconjuntos de exames $\{A, E\}$, $\{C, D\}$ e $\{B, F, G\}$.

Há vários métodos para calcular o número cromático de um grafo. O método a seguir apresentado baseia-se no nível de saturação e grau de cada vértice. A primeira cor é atribuída ao vértice de maior grau e a análise de cada um dos vértices restantes é efectuada por ordem decrescente do respectivo grau de saturação¹.

Veja-se a aplicação do método ao grafo anterior em que a matriz de adjacências é a seguinte:

Vértice	Vért. adjacentes	Grau
A	B, C, D	3
B	A, C, E	3
C	A, B, F	3
D	A, E, F	3
E	B, D, F, G	4
F	C, D, E	3
G	E	1

1º Passo: Ordenar os vértices por ordem decrescente de grau

E	A	B	C	D	F	G
---	---	---	---	---	---	---

2º Passo: Atribuir cor ao 1º vértice : exame “E” com cor 1

3º Passo: Ordenar os vértices não coloridos por ordem decrescente do grau de saturação. Os vértices B, D , F e G têm grau de saturação 1 pois são adjacentes de “E” que já tem cor. Como os três primeiros são do mesmo grau a sua ordenação é arbitrária ficando “G” após eles. Os restantes vértices têm grau de saturação nulo ficando ordenados de forma arbitrária:

Vector ordenado:	B	D	F	G	A	C
------------------	---	---	---	---	---	---

4º Passo : Atribuir cor a “B” (1º vértice do vector ordenado): é adjacente de “E” com cor 1, pelo que recebe cor 2

A partir de agora repetem-se os passos 3 e 4 até ter colorido todos os vértices.

Vector ordenado	Cor atribuída
A C D F G	Colorir “A” com cor 1 (adjacente da cor 2)
C D F G	Colorir “C” com cor 3 (adjacente das cores 1 e 2)
F D G	Colorir “F” com cor 2 (adjacente das cores 1 e 3)
D G	Colorir “D” com cor 3 (adjacente das cores 1 e 2)
G	Colorir “G” com cor 2 (adjacente da cor 1)

O número cromático é 3. Os exames necessitam de 3 dias assim distribuídos (por exemplo):

1º dia	2º dia	3ºdia
“A” e “E”	“B” , “F” e “G”	“C” e “D”

¹ número de cores distintas nos vértices adjacentes

2. Auto Teste

- a. Considere-se a relação dos exames requeridos, na mesma época, pelos alunos de uma escola:

Número do aluno	Cadeiras requeridas
1	A, E
2	C, E
3	B, E, F
4	D, H
5	C, G
6	B, E, F
7	B, I, J
8	E, J
9	C, F
10	A, C, E

Admitindo que o aluno só pode executar 1 exame por dia, no máximo, qual é o menor número de dias necessário para executar todos os exames ?

- b. Calcule o número cromático de um grafo cuja matriz booleana é a seguinte:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
A	1	1					1		1						
B	1							1	1						
C	1		1					1			1				
D				1	1										1
E				1		1					1	1		1	1
F				1		1		1							1
G	1		1				1			1					
H		1			1			1					1		1
I	1	1					1		1				1		
J			1			1			1				1		
K				1							1				1
L					1							1			
M						1	1	1					1		
N					1					1	1			1	
O				1	1	1		1							1

- c. Considere o registo de 68 pedidos de exames.

Determine o número mínimo de dias úteis para realizar os exames (o aluno não pode ser examinado mais do que uma vez por dia) e os subconjuntos daqueles que podem ter lugar no mesmo dia.

Nota: elabore a matriz para calcular o número cromático ou automatize esta tarefa (Excel por exemplo).

Número do aluno	Código da disciplina
5	110
5	111
5	321
8	113
8	121
22	111
22	112
34	113
34	122

Número do aluno	Código da disciplina
133	311
182	216
182	217
203	121
203	212
203	217
204	125
204	213
204	221

Número do aluno	Código da disciplina
34	125
47	114
47	115
51	110
51	111
51	115
52	110
52	112
52	122
52	123
54	123
55	111
55	123
55	210
55	214
73	211
74	211
86	211
92	212
92	222
102	212
133	123
133	211
133	213
133	221

Número do aluno	Código da disciplina
257	224
257	310
261	311
263	213
263	312
263	316
307	312
307	313
335	313
335	314
362	123
362	313
362	314
375	315
376	315
378	315
380	316
380	316
384	312
384	315
384	317
396	319
407	319
407	320
492	320

3. Solução do Auto Teste

- a. A matriz booleana do grafo, em que os vértices representam os exames e as arestas a ligação entre aqueles que não podem ocorrer na mesma unidade tempo, é a seguinte:

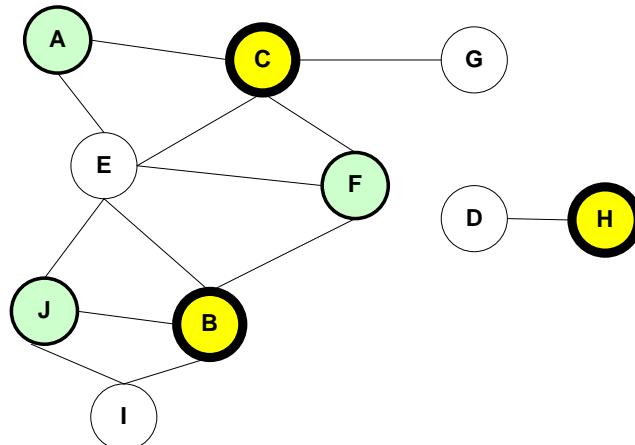
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1			1						
B		1			1	1			1	1
C	1		1		1	1	1			
D				1				1		
E	1	1	1		1					1
F	1	1		1	1					
G		1				1				
H			1				1			
I		1						1		
J	1			1				1		1

O processo iterativo para calcular o número cromático é o seguinte:

Vértice	Adjacentes	Grau	Vector ordenado	Cor atribuída
A	C, E	2	E B C F J A I D G H	E : cor 1
B	E, F, I, J	4	B C F J A I D G H	B : cor 2
C	A, E, F, G	4	F J C A I D G H	F : cor 3
D	H	1	C J A I D G H	C : cor 2
E	A, B, C, F, J	5	J A I G D H	J : cor 3
F	B, C, E	3	A I G D H	A : cor 3
G	C	1	I G D H	I : cor 1
H	D	1	G D H	G : cor 1
I	B, J	2	D H	D : cor 1
J	B, E, I	3	H	H : cor 2

O número cromático do grafo é 3; são necessários 3 dias, no mínimo, para realizar os exames.

Estes agrupam-se nos três subconjuntos {A, F, J} , {B , C, H} e {D, E, G ,I} (ver figura seguinte):

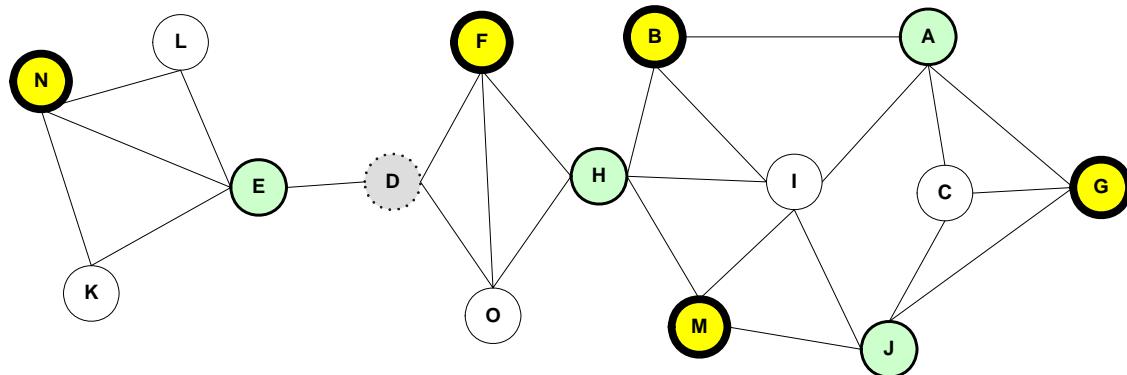


b. O número cromático é 4.

Os subconjuntos são os seguintes :

nº 1	nº 2	nº 3	nº 4
A	B	C	D
E	F	I	
H	G	K	
J	M	L	
N	O		

A figura seguinte mostra o grafo com as cores (padrões) aplicadas:



c. Matriz do grafo (ligação entre exames pedidos pelo mesmo aluno)

110	111	112	113	114	115	121	122	123	125	210	211	212	213	214	216	217	221	222	224	310	311	312	313	314	315	316	317	319	320	321		
110	1	1			1	1	1	1																				1				
111	1		1			1			1																				1			
112	1	1							1	1																						
113										1	1																					
114										1																						
115	1	1								1																						
121																																
122	1		1	1																												
123	1	1	1							1																						
125				1					1																							
210										1																						
211										1																						
212										1																						
213										1	1	1																				
214	1									1	1	1																				
216																																
217										1																						
221										1	1	1	1																			
222													1																			
224																																
310																																
311										1		1	1																			
312												1																				
313													1																			
314													1																			
315																																
316																																
317																																
319																																
320																																
321	1	1																														

Distribuição dos exames (uma solução):

Relatório				
Conjuntos de exames que podem executar-se no mesmo dia				
Dia nº 1	Dia nº 2	Dia nº 3	Dia nº 4	Dia nº 5
115	110	111	112	211
121	113	122	210	
123	114	212	213	
125	214	311		
216	217	313		
222	221	317		
224	310			
315	312			
316	314			
320	319			
321				

Número mínimo de dias = 5