INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

(Texto revisto para o ano lectivo 2002-2003)

António Carlos Morais da Silva

Professor de I.O.

1. Introdução

Ao contrário da programação linear não há um padrão do problema de Programação Dinâmica (PD).

A resolução de um problema de optimização, recorrendo à PD, conduz à decomposição daquele numa sequência de problemas isolados (mais simples) ligados entre si por via recursiva.

Em regra, um problema é susceptível de ser abordado com programação dinâmica se nele forem identificadas <u>*três características básicas*</u>:

- é um *problema de decisão* decomponível em ETAPAS DE DECISÃO distintas

  Exemplos:

  - um problema de investimentos anuais pode ser separado (para estudo decisional) pelos vários anos em questão;
  - um problema de encaminhamento de um local para outro pode ser decomposto nos vários pontos intermédios do itinerário (níveis de decisão);
  - um problema de programação inteira pode ser analisado de uma forma sequencial nas suas variáveis de decisão (níveis de decisão);

- em cada Etapa de decisão é possível definir o ESTADO da solução.

  Exemplos:

  - no início de um ano do problema de investimentos anuais cada **ESTADO** (ponto de situação) representa as várias situações resultantes das decisões tomadas anteriormente;
  - no problema de encaminhamento, o **ESTADO** em cada etapa corresponde ao vértice intermédio em que se pode estar (ponto de situação) como consequência da decisão tomada na etapa anterior;
  - no problema de programação inteira o **ESTADO** corresponde ao(s) valor(es) das variáveis de decisão (ponto de situação) em consequência de decisões tomadas em etapas anteriores;

- <u>em cada Etapa **DECIDE-SE, para cada estado**</u>, qual o ESTADO DA ETAPA SEGUINTE que oferece melhor retorno para a solução do problema (mudança de estado). Deste modo "estabelece-se um fio condutor" que liga a melhor sequência de decisões <u>ainda que em qualquer momento do processo sejam adoptadas decisões menos correctas</u>.

  Deve-se a Richard Bellman (1959) o Princípio de Optimalidade:

  > "Para um dado estado do sistema, a política óptima para os estados remanescentes **é independente da política de decisão adoptada em estados anteriores**".

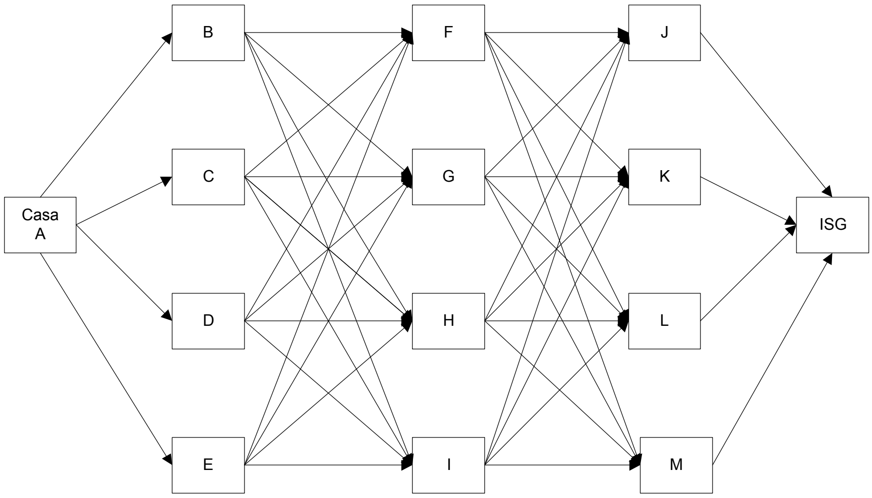
  Para garantir a optimalidade da decisão inerente à <u>mudança de um estado de uma dada etapa para outro estado da etapa seguinte</u>, é necessário estabelecer uma relação matemática que defina o encargo associado à transição (função de transição).

  Em regra, os problemas de PD são resolvidos "*recuando temporalmente no momento da decisão*", iniciando-se o processo de cálculo na última etapa do problema (última decisão) e deduzindo a partir desta, sucessivamente, as decisões óptimas das etapas antecessoras até atingir a etapa inicial.

Os problemas de PD podem ser **determinísticos** ou **probabilísticos** e tratados de forma **discreta** ou **contínua** .

2. Exemplo nº 1 – Encaminhamento Dinâmico (PD determinística e discreta)

Admita-se um aluno que pretende minimizar o custo de transporte entre a sua residência e o ISG utilizando os vários meios de transporte disponíveis na rede seguinte:



As matrizes de custos associados às ligações existentes são as seguintes:

	B	C	D	E
Casa (A)	20	25	15	30

	F	G	H	I
B	90	85	70	75
C	75	70	85	80
D	85	75	80	90
E	95	90	105	95

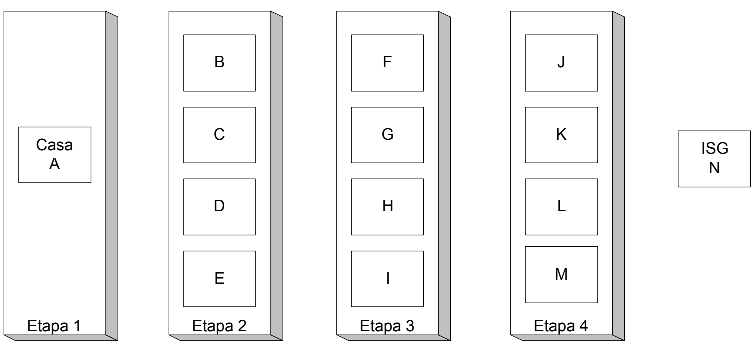
	J	K	L	M
F	55	60	70	65
G	70	75	65	80
H	75	55	70	65
I	65	70	75	60

	ISG (N)
J	30
K	30
L	30
M	30

Da análise da rede e matrizes de custos conclui-se que:

A rede não apresenta sub circuitos e o aluno sempre que atinge um dado vértice da rede(estado) tem que decidir qual o vértice seguinte do seu itinerário.

Sendo a casa do aluno o ponto inicial do itinerário as ETAPAS DE DECISÃO agrupam os vértices extremos de caminhos elementares com o mesmo comprimento relativamente ao ponto inicial pelo que o problema tem quatro Etapas (n=4) como mostra a figura seguinte:



Em cada uma das Etapas existe uma Variável de Estado (s_n):

- Etapa 1: {s_1= Casa do aluno}
- Etapa 2 : {s_2= B ou C ou D ou E}
- Etapa 3 : {s_3= F ou G ou H ou I}
- Etapa 4 : {s_4= J ou K ou L ou M}

Em cada uma das Etapas existe uma Variável de Decisão (x_n):

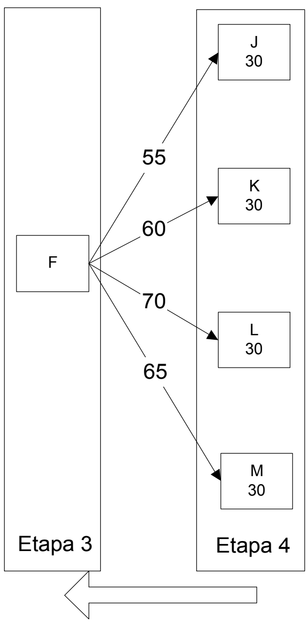
- Etapa 1 : {x1= B ou C ou D ou E}
  Quando o aluno está em casa (etapa 1) tem que decidir se segue para B, C, D ou E que são os estados possíveis da etapa seguinte (etapa 2).
- Etapa 2 : {x_2 = F ou G ou H ou I}
  Estando na etapa 2 o aluno poderá estar em B ou C ou D ou E (estados da etapa 2) onde deverá decidir se segue para F ou G ou H ou I que são os estados possíveis da etapa seguinte (etapa 3).
- Etapa 3 : {x_3 = J ou K ou L ou M}
  Estando na etapa 3 o aluno poderá estar em F ou G ou H ou I (estados da etapa 3) onde deverá decidir se segue para F ou G ou H ou I que são os estados possíveis da etapa seguinte (etapa 4).
- Etapa 4 : {x_4 = ISG}
  Estando na etapa 4 o aluno poderá estar em J ou K ou L ou M (estados da etapa 4) onde só poderá decidir que segue para o ISG (objectivo final).

É útil referir que nem sempre o objectivo final é atingido em estado único ou, o que é o mesmo, há problemas de PD em que o objectivo final também constitui uma Etapa com vários estados.

Estabelecidas as "n" Etapas, os "s_n" Estados de cada etapa, e as "x_n" Variáveis de Decisão é necessário fixar a relação entre estados → **Função de Transição** $f_n^*(s)$.

Fazendo o estudo no sentido inverso (**última etapa → primeira etapa**), esta função serve para estabelecer uma relação recursiva que identifica a política óptima na etapa "n" conhecida que seja a política óptima na etapa "n+1". Sendo "c_{sx_n}" o custo do transporte associado à decisão x_n, quando o aluno se encontra no estado "s_n" (vértice da rede da etapa "n"), tem-se para o encaminhamento $f_n^*(s) = Min \left\{ c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n) \right\}$.

Veja-se o exemplo da figura seguinte para melhor esclarecer o significado desta função:



Seja a etapa n=3 e nesta o estado s_3 = F.

Na etapa "n+1= 4" a decisão óptima para qualquer dos estados s_4 = J ou K ou L ou M tem o valor $f_4^*(x_4 = ISG)$ =30$.

A ligação de F a cada destes estados da etapa 4 tem os seguintes custos:

- para J: 55$ (implica x_3 = J)
- para K: 60$ (implica x_3 = K)
- para L: 70$ (implica x_3 = L)
- para M: 65$ (implica x_3 = M)

Valor óptimo da transição $f_3^*(J)$ é:

Min { 55+30, 60+30, 70+30, 65+30 } = 85$ = $f_3^*(J)$ com $x_3^* = J$

Cálculo da solução óptima pela ordem $f_n^*(4)$, $f_n^*(3)$, $f_n^*(2)$, $f_n^*(1)$

Quando o aluno se encontra em qualquer dos estados da etapa 4 (s_4 = J ou K ou L ou M) a única decisão possível é transitar para o vértice ISG pelo que a política óptima associada a qualquer dos estados "s_4" é a seguinte:

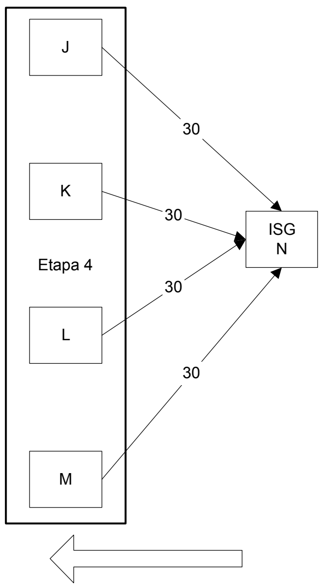
- $f_4(s_4, x_4) = c_{sx_4} = 30\$$
- $x_4^* = ISG$

No quadro seguinte estão registados os dados correntes e as decisões associadas:

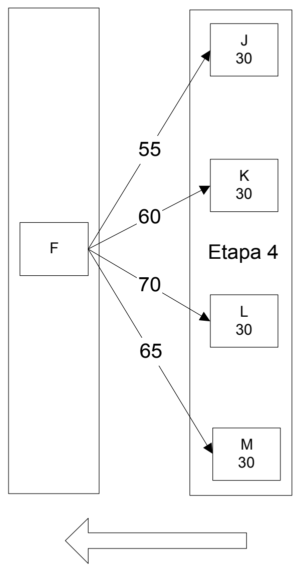
$s \backslash x_4$	$f_4(s,x_4) = c_{sx_4}$ ISG	$f_4^*(s)$	x_4^*
J	30	30	ISG
K	30	30	ISG
L	30	30	ISG
M	30	30	ISG

Descrição do quadro da Etapa 4

- estados da etapa (valores admissíveis para a variável de estado s_4)
- estados futuros (valores admissíveis para a variável de decisão x_4)
- custo da transição entre estados c_{sx_4}
- valor da função de transição entre estados $f_4(s,x_4) = c_{sx_4}$
- valor da política óptima para cada estado da etapa $f_4^*(s)$
- valor óptimo da variável de decisão x_4^* para cada um dos estados da etapa



"Recuando" para a etapa anterior (etapa 3) o cálculo é agora mais laborioso dado que a etapa 4 tem vários estados para onde o aluno pode transitar a partir dos estados da etapa 3. Veja-se como o cálculo é efectuado admitindo o aluno no estado "F" (s_3 = F na etapa 3):



Para cada um dos pares (F,J), (F,K), (F,L) e (F,M) existe um custo imediato de 55$, 65$, 70$ e 65$, respectivamente (valores de c_{sx_3}).

O custo total da transição de "F" para J, K, L ou M é igual à soma do custo imediato com o custo óptimo associado aos estados J, K, L ou M da etapa seguinte (valores de $f_4^*(s)$ registados no quadro da etapa 4).

Assim, a função de transição é, como se disse, a seguinte:

$$f_3(s, x_3) = c_{sx_3} + f_4^*(x_3)$$

O valor desta função, para cada mudança de estado, estando no estado "F" é o seguinte:

$$F \to J : f_3(s_3 = F, x_3 = J) = (c_{FJ} = 55) + f_4^*(x_3 = J) = 55 + 30 = 85\$$$
$$F \to K : f_3(s_3 = F, x_3 = K) = (c_{FK} = 60) + f_4^*(x_3 = K) = 60 + 30 = 90\$$$
$$F \to L : f_3(s_3 = F, x_3 = L) = (c_{FL} = 70) + f_4^*(x_3 = L) = 70 + 30 = 100\$$$
$$F \to M : f_3(s_3 = F, x_3 = M) = (c_{FM} = 65) + f_4^*(x_3 = M) = 65 + 30 = 95\$$$

Conhecidos os valores das políticas possíveis no estado "F", decide-se a política óptima a adoptar neste estado:

$$f_3^*(F) = Min\{85,90,100,95\} = 85\$$$

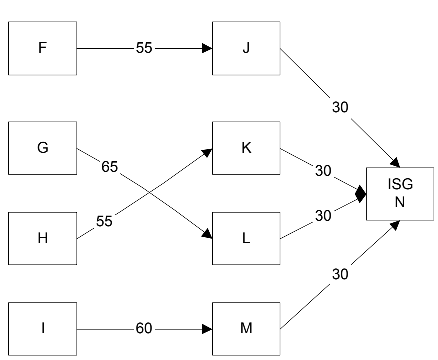
$$x_3^* = J$$

Procedendo de modo idêntico para os estados G, H e I os resultados são os registados no quadro seguinte:

s \ x_3	$f_3(s,x_3) = c_{sx_3} + f_4^*(x_3)$				$f_3^*(s)$	x_3^*
	J	K	L	M		
F	55+30=85*	60+30=90	70+30=100	65+30=95	85	J
G	70+30=100	75+30=105	65+30=95*	80+30=110	95	L
H	75+30=105	55+30=85*	70+30=100	65+30=95	85	K
I	65+30=95	70+30=100	75+30=105	60+30=90*	90	M

Nota : $f_4^*(x_3) = f_4^*(s_4)$ *com* $s_4 = \{J, K, L, M\}$ *que são os estados da etapa* 4

O estado da decisão é, no momento, o seguinte:

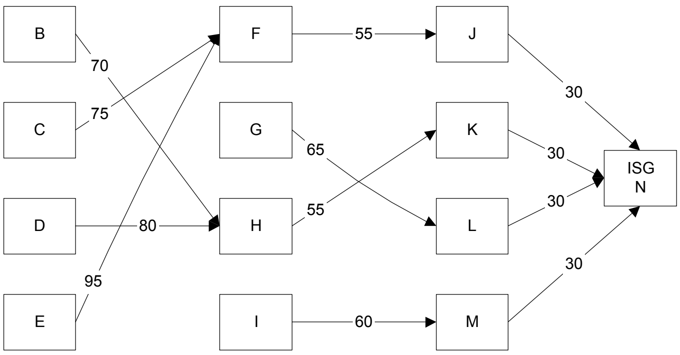


Procedendo de forma similar na Etapa 2 obtém-se o quadro seguinte:

$s \backslash x_2$	$f_2(s,x_2)=c_{sx_2}+f_3^*(x_2)$				$f_2^*(s)$	x_2^*
	F	G	H	I		
B	90+85=175	85+95=180	70+85=155*	75+90=165	155	H
C	75+85=160*	70+95=165	85+85=170	80+90=170	160	F
D	85+85=170	75+95=170	80+85=165*	90+90=180	165	H
E	95+85=180*	90+95=185	105+85=190	95+90=185	180	F

Nota : $f_3^*(x_2)=f_3^*(s)$ *com* $s=\{F,G,H,I\}$ *que são os estados da etapa* 3

O estado da decisão é, no momento, o seguinte:



Procedendo de forma similar na Etapa 1 obtém-se o quadro seguinte:

$s \backslash x_1$	$f_1(s,x_1)=c_{sx_1}+f_2^*(x_1)$				$f_1^*(s)$	x_1^*
	B	C	D	E		
Casa	20+155=175*	25+160=185	15+165=180	30+180=210	175	B

Nota : $f_2^*(x_1)=f_2^*(s)$ *com* $s=\{B,C,D,E\}$ *que são os estados da etapa* 2

Pode agora concluir-se que a política óptima tem o custo total mínimo de $f_1^*(s)$ =175$ correspondente às seguintes decisões sucessivas:

<u>No Estado A (casa do aluno) da Etapa 1</u>:

- no quadro da Etapa 1 a decisão óptima para o Estado = Casa é x_1^* = B pelo que deve usar o transporte que liga a B com o custo de 20$.

<u>No Estado B da Etapa 2</u>:

- no quadro da Etapa 2 a decisão óptima para o Estado = B é x_2^* = H pelo que deve usar o transporte que liga a H com o custo de 70$.

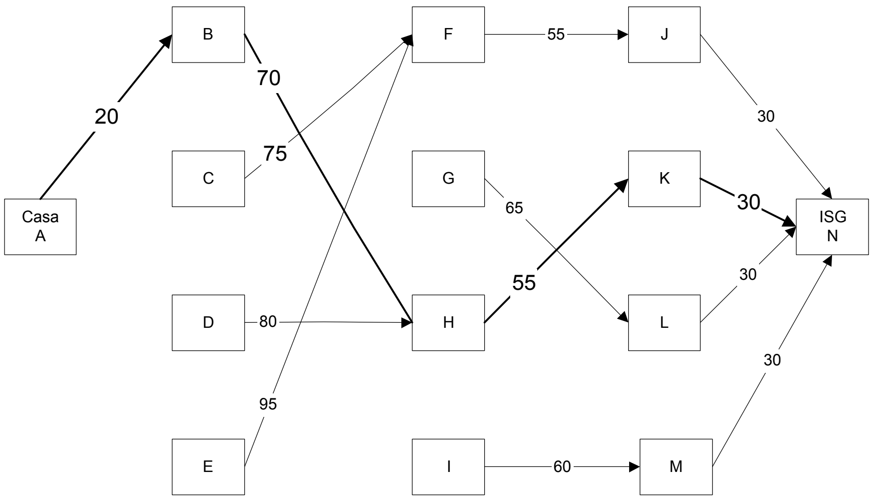
<u>No Estado H da Etapa 3</u>:

- no quadro da Etapa 3 a decisão óptima para o Estado = H é usar x_3^* = K pelo que deve usar o transporte que liga a K com o custo de 55$.

<u>No Estado K da Etapa 4</u>:

- no quadro da Etapa 4 a decisão óptima para o Estado = K é usar $x_4^* =$ ISG pelo que deve usar o transporte que liga ao ISG com o custo de 30$.

Na figura seguinte encontra-se assinalado o itinerário óptimo (175$):



3. Exemplo nº 2 – Um problema de afectação múltipla (PD determinística e discreta)

Um aluno está prestes a iniciar a sua época de exames em três cadeiras sendo de 3 dias o tempo disponível para preparação. Adicionalmente o aluno durante um dia só estuda para um dos exames, por uma questão de método, e quer estar presente em todos eles.

A previsão do aluno para a classificação em cada uma das cadeiras, em função do tempo (dias) de preparação para cada uma delas, é a seguinte:

Dias \ Cadeiras	A	B	C
0	8	9	10
1	10	11	12
2	14	15	16
3	15	16	17

O aluno pretende saber qual o plano de estudo (dias de estudo/cadeira) que maximizará a média das classificações dos exames.

O problema pode resolver-se por recurso ao modelo de PL a seguir apresentado.

Considerando para variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se o aluno estuda } i \text{ dias para a cadeira } j \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (i = 0,1,2,3\,;\, j = A, B, C)$$

tem-se:

$$\text{Max } \frac{1}{3}(8\,x_{0A} + 10\,x_{1A} + 14\,x_{2A} + 15\,x_{3A} + 9\,x_{0B} + 11\,x_{1B} + 15\,x_{2B} + 16\,x_{3B} + 10\,x_{0C} + 12\,x_{1C} + 16\,x_{2C} + $$
$$+ 17\,x_{3C})$$

s.a

$$x_{0A} + x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 1$$
$$x_{0B} + x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 1$$
$$x_{0C} + x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 1$$
$$1\,x_{1A} + 2\,x_{2A} + 3\,x_{3A} + 1\,x_{1B} + 2\,x_{2B} + 3\,x_{3B} + 1\,x_{1C} + 2\,x_{2C} + 3\,x_{3C} \leq 3$$
$$x_{ij} \in \{\,0,\,1\,\},\ i = 0,\,1,\,2,\,3,\,;\ j = \text{A, B, C}$$

O problema é resolúvel recorrendo ao método do Simplex para obter a solução óptima da versão linear a partir da qual se utiliza o algoritmo “branch and bound” (programação inteira binária).

Outra via para a resolução do problema é recorrer à programação dinâmica dado estarem presentes as características básicas referidas na Introdução.

O processo de decisão consiste em escolher o número de dias de estudo para cada um dos três exames pelo que são identificáveis três momentos distintos (3 etapas) em que se decide o número de dias de estudo para as cadeiras A (etapa 1), B (etapa 2) e C (etapa 3) respectivamente.

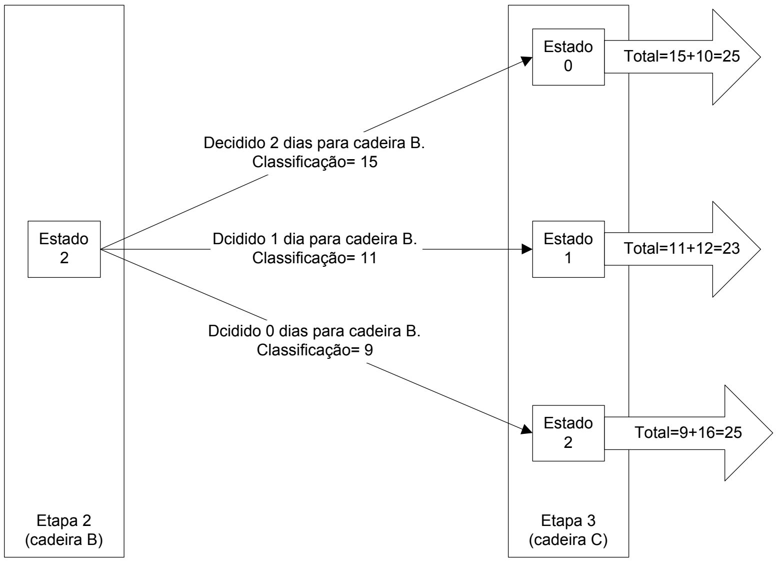
Porque precisamos de definir os estados possíveis em cada etapa e a função de transição, estudemos, por exemplo, estar no estado 2 (ainda há 2 dias para estudar) na etapa 2 (cadeira B).

As decisões possíveis são (consultar figura):

- estudar 0 dias (classificação=9); como consequência na etapa 3 (cadeira C) o estado resultante é de 2 dias (classificação=16). A classificação acumulada em B e C é de 9+16 = 25.

- estudar 1 dia (classificação=11); como consequência na etapa 3 (cadeira C) o estado resultante é de 1 dia (classificação=12). A classificação acumulada em B e Cé de 11+12 = 23.
- estudar 2 dias (classificação=15); como consequência na etapa 3 (cadeira C) o estado resultante é de 0 dias (classificação=10). A classificação acumulada em B e C é de 15+10 = 25.

Veja-se graficamente a explicação anterior:



Das 3 hipóteses a classificação acumulada mais favorável é de 25 correspondente a decidir 0 dias para B e 2 dias para C ou 2 dias para B e 0 dias para C.

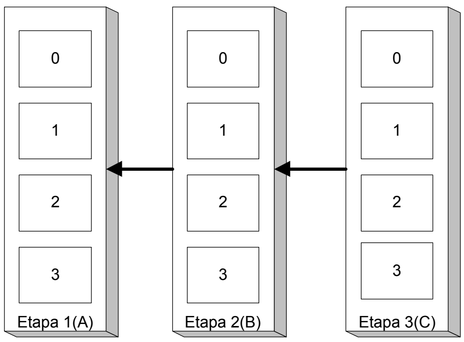
Da análise desta situação (uma das várias a analisar) podemos ensaiar a formalização necessária para o cálculo. Em qualquer das etapas os estados possíveis são s_n= 0 ou 1 ou 2 ou 3 (**dias sobrantes para estudo**). Considerando $c_i(x_i)$ a classificação da cadeira "i" para que são estudados "x_i" dias e sequenciando a decisão no sentido "**última etapa → primeira etapa"** o retorno associado à ligação entre 2 estados (um da etapa "n" e o outro da etapa "n+1" é:

$$f_n(s_n, x_n) = c_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)$$

Em cada etapa a função de transição $f_n^*(s_n)$ será igual ao valor máximo de classificação acumulada para as decisões associadas ao estado s_n , ou seja,

$$f_n^*(s_n) = Max\left\{c_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)\right\} = Max\left\{f_n^*(s_n, x_n)\right\}$$

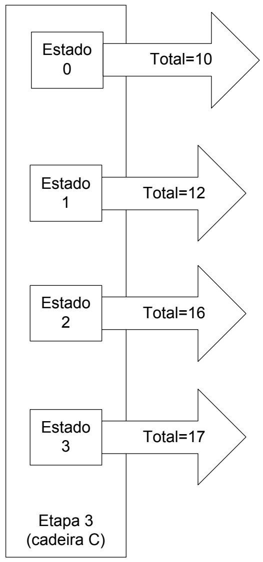
Há agora condições para iniciar o cálculo (a fazer da última para a primeira etapa) utilizando quadros similares aos do exemplo 1.



Etapa 3 (cadeira C)

Os valores de $c_n(x_n) = c_3(x_3)$ são os constantes na tabela de classificações. Sendo 0, 1, 2 ou 3 dias para estudo da cadeira C (estados possíveis nesta etapa), os valores de $f_3(s_3, x_3)$ são os de $c_3(x_3)$ pelo que os valores óptimos da variável de decisão são $x_3^* = s_3$ e os valores óptimos da função de transição para cada estado são $f_n^*(s_3) = c_3(x_3)$ como está registado no quadro seguinte:

s_3 \ x_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	10	0
1	12	1
2	16	2
3	17	3



Etapa 2 (cadeira B)

Quando o aluno procura decidir sobre o número de dias a dedicar à cadeira B verifica que pode dispor ainda de 0, 1, 2 ou 3 dias (valores admissíveis para a variável de estado s_2) do que resulta:

- se dispuser de 0 dias ($s_2 = 0$) a decisão x_2 só pode ser de 0 dias para a cadeira B.
- se dispuser de 1 dia ($s_2 = 1$) a decisão x_2 pode ser de 0 ou 1 dia para a cadeira B.
- se dispuser de 2 dias ($s_2 = 2$) a decisão x_2 pode ser de 0 ou 1 ou 2 dias para a cadeira B.
- se dispuser de 3 dias ($s_2 = 3$) a decisão x_2 pode ser de 0 ou 1 ou 2 ou 3 dias para a cadeira B.

Assim, por exemplo, com s_2=2 dias e decidindo $x_2 = 0$ resultará:

- 0 dias para a cadeira B a que corresponde a classificação de 9
- restarem 2 dias para a cadeira C a que corresponde uma classificação de 16
- uma classificação acumulada de $c_2 (x_2 = 0) + c_3(x_3=2) = 9 + 16 = 25$.

Actuando deste modo o quadro da etapa 2 é o seguinte:

s_2 \ x_2	$f_2(s_2, x_2) = c_2(x_2) + f_3^*(s_2 - x_2)$				$f_2^*(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3		
0	9+10=19*				19	0
1	9+12=21*	11+10=21*			21	0 ou 1
2	9+16=25*	11+12=23	15+10=25*		25	0 ou 2
3	9+17=26	11+16=27*	15+12=27*	16+10=26	27	1 ou 2

Etapa 1 (cadeira A)

Actuando de forma similar obtém-se o quadro seguinte (notar que sendo a 1ª etapa estão disponíveis 3 dias):

s_1 \ x_1	$f_1(s_1,x_1)=c_1(x_1)+f_2^*(s_1-x_1)$				$f_1^*(s_1)$	x_1^*
	0	1	2	3		
3	8+27=35*	10+25=35*	14+21=35*	15+19=34	35	0, 1 ou 2

A política óptima é a que permite acumular 35 valores a que corresponde a média de $\frac{35}{3}\,valores$.

No quadro seguinte indicam-se as soluções óptimas de "35" valores acumulados:

Solução	Cadeira A (dias)	Cadeira B (dias)	Cadeira C (dias)	Classificação acumulada
I	0	1	2	8+11+16 = 35
II	0	2	1	8+15+12 = 35
III	1	0	2	10+9+16 = 35
IV	1	2	0	10+15+10 = 35
V	2	0	1	14+9+12 = 35
VI	2	1	0	14+11+10 = 35

Veja-se como é lida a solução I com classificação acumulada "8+11+16=35":

<u>*Etapa 1*</u>*: o valor óptimo "35*" resulta da soma de 8+27 em que:*

- *"8" é a classificação associada à decisão* $x_1 = 0$ (0 dias para A)
- *"27" é o valor da política óptima* $f_2^*(s_1 - x_1) = f_2^*(3-0) = f_2^*(3)$

<u>*Etapa 2*</u>*: para o estado 3 o valor óptimo "27*" resulta da soma de 11+16 (ou 15+12) em que:*

- *"11" é a classificação associada à decisão* $x_2 = 1$ (1dia para B)
- *"16" é o valor da política óptima* $f_1^*(s_2 - x_2) = f_1^*(3-1) = f_1^*(2)$

<u>*Etapa 3*</u>*: para o estado 2 o valor óptimo "16*" está associado à decisão* $x_3 = 2$ dias para C

4. Exemplo nº 3 – Um problema de PL (PD determinística e contínua)

Consideremos agora uma outra aplicação da programação dinâmica em que o conjunto de estados de uma etapa não são discretos.

Um problema de programação linear pode ser encarado como uma sequência de decisões sobre os valores das variáveis face aos recursos existentes.

Considere-se o seguinte modelo de PL (x_1 = nível da produção de A; x_2 = nível da produção de B)

$$
\begin{aligned}
&Max\ f(X) = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.a. \\
&x_1 \le 4 \\
&2x_2 \le 12 \\
&3x_1 + 2x_2 \le 18 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Para calcular a solução óptima aplicando a PD comecemos por identificar as Etapas do processo de decisão e os Estados associados.

<u>Etapas</u>:

São necessárias duas decisões sequenciais e interrelacionadas:

- qual o nível da produção de A (valor a considerar para a variável x_1)?
- qual o nível da produção de B (valor a considerar para a variável x_2), tendo em conta os recursos já consumidos na produção de A ?

Considerem-se então as etapas 1 e 2 destinadas a decidir os valores de x_1 e x_2 respectivamente.

<u>Estados</u>:

Ao longo do processo de decisão atribuindo valor a uma variável os recursos vão sendo reduzidos pelo que, em cada uma das etapas, os estados correspondem à quantidade de recurso ainda disponível para as actividades remanescentes. Como neste problema há três recursos a variável de estado, de cada uma das etapas, é um vector com três componentes.

Assim, na etapa 2, a variável de estado é $s_2 = \begin{bmatrix} 4 - x_1 \\ 12 \\ 18 - 3x_1 \end{bmatrix}$ e na etapa 1 é $s_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$.

<u>Função de Transição</u>:

Numa etapa "n", o valor óptimo da função de transição será:

$$f_n^*(b_1, b_2, b_3) = \underset{x_n}{Max}\ f_n(b_1, b_2, b_3, x_n)$$

pelo que na etapa 2 (etapa inicial do cálculo) teremos:

- $f_2^*(b_1, b_2, b_3) = \underset{\substack{2x_2 \le b_2 \\ 2x_2 \le b_3 \\ x_2 \ge 0}}{Max}\ (5x_2)$

e na etapa 1 (etapa final do cálculo) teremos:

- $f_1^*(4,12,18) = \underset{\substack{x_1 \le 4 \\ 3x_1 \le 18 \\ x_1 \ge 0}}{Max} \left\{ 3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1) \right\}$

Cálculo na Etapa 2:

O valor de x_2 deve ser tão elevado quanto o permitam os recursos sobrantes das etapas anteriores. Sendo a variável de estado dos recursos, $s_2 = \begin{bmatrix} 4 - x_1 \\ 12 \\ 18 - 3x_1 \end{bmatrix}$ então x_2^* deve satisfazer simultaneamente $\begin{cases} 2x_2 \leq 12 \\ 2x_2 \leq 18 - 3x_1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

pelo que o valor máximo de x_2 é igual a $Min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18-3x_1}{2}\right\}$.

O quadro da etapa 2 é então:

Recursos restantes	$f_2^*(recursos\ restantes)$	x_2^*
$12 \geq 0$ $18 - 3x_1 \geq 0$	$5 * Min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18-3x_1}{2}\right\}$	$Min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18-3x_1}{2}\right\}$

Cálculo na Etapa 1:

Tendo $f_1^*(4,12,18) = \underset{\substack{x_1 \leq 4 \\ 3x_1 \leq 18 \\ x_1 \geq 0}}{Max}\left\{3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)\right\}$ já fixado anteriormente, substituindo f_2^* tem-se:

$$f_1^*(4,12,18) = \underset{\substack{x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 \geq 0}}{Max}\left\{3x_1 + 5 * Min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18-3x_1}{2}\right\}\right\}$$

Das restrições tem-se $x_1 \leq 4$ pelo que $Min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18-3x_1}{2}\right\} = \begin{cases} 6\ para\ 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 9 - \frac{3}{2}x_1\ \ para\ 2 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$

Substituindo em $f_1^*(4,12,18)$ tem-se: $\begin{cases} 3x_1 + 30\ para\ 0 \leq x_1 \leq 2 & (valor\ máximo = 36\ com\ x_1 = 2) \\ 45 - \frac{9}{2}x_1\ \ para\ 2 \leq x_1 \leq 4 & (valor\ máximo = 36\ com\ x_1 = 2) \end{cases}$

Tem-se então $f_1^* = 36\ e\ x_1^* = 2$ pelo que $x_2^* = Min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18-3x_1}{2}\right\} = 6$.

5. Exemplo nº 4 – Problema da Mochila (PD determinística e discreta)

O problema do "saco" ou "mochila" é típico da programação dinâmica (knapsack problem).

Há uma capacidade limitada de peso transportável no "saco" e um conjunto de artigos distintos com peso conhecido e de cujo transporte resulta um determinado lucro (retorno) unitário.

Sendo

- N = número de tipos de artigos
- p_n = peso unitário do artigo "n" (n=1, 2 ,…, N)
- c_n = lucro unitário do transporte do artigo "n" (n=1, 2 ,…, N)
- x_n = número de unidades a transportar do artigo "n" (n=1, 2 ,…, N)
- P = capacidade máxima de transporte em unidades de peso

o modelo de PL para optimizar a utilização da capacidade de transporte é o seguinte:

$$Max\ f(X) = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$$

$$s.a.$$

$$\sum_{n=1}^{N} p_n x_n \le P$$

$$x_n \ge 0 \ e\ Inteiro$$

Considere-se o exemplo numérico seguinte para uma capacidade máxima de 10 kg:

Artigo	Peso unitário (kg)	Lucro unitário do transporte ($)
A	$p_1 = 2$	$c_1 = 79$$
B	$p_2 = 1$	$c_2 = 17$$
C	$p_3 = 4$	$c_3 = 187$$
D	$p_4 = 5$	$c_4 = 245$$
E	$p_5 = 3$	$c_5 = 140$$

Etapas

São em número de 5 correspondentes a decidir o número de unidades de A, B, C ,D e E a transportar.

Estados

Exceptuando a etapa inicial em que o "saco" está vazio pelo que há um único estado s_1 =10 kg, nas restantes etapas os estados possíveis são 10 pois em cada uma delas a capacidade restante disponível para transporte pode variar entre 0 e 10 kg.

Função de transição (resolvendo o problema partindo da última etapa em que se decide o número de unidades a transportar do artigo E)

Para cada estado "s_n" (capacidade de transporte disponível) da etapa "n" a decisão "x_n" (número de artigos do tipo "n" a transportar) só é admissível se $p_n x_n \le s_n$ (peso não excede a capacidade restante) sendo o lucro associado igual a $f_n(s_n, x_n) = c_n x_n + f_{n+1}(s_n - p_n x_n)$.

A política óptima para o estado "s_n" é então $Max\left[c_n x_n + f_{n+1}(s_n - p_n x_n)\right]$.

Estudo na etapa 5 (decisão sobre transporte do artigo E com p_5 = 3kg):

Nota: $x_5 \leq 10kg/3kg$ e inteiro implica que os valores admissíveis para x_5 são 0, 1, 2 ou 3 unidades de E

x_5 \ s_5 (kg)	$f_5(s_5, x_5) = 140x_5$					
	x_5=0	x_5=1	x_5=2	x_5=3	$f_5^*(s_5)$	x_5^*
0	0$	-	-	-	0$	0
1	0$	-	-	-	0$	0
2	0$	-	-	-	0$	0
3	0$	140$*	-	-	140$	1
4	0$	140$*	-	-	140$	1
5	0$	140$*	-	-	140$	1
6	0$	140$	280$*	-	280$	2
7	0$	140$	280$*	-	280$	2
8	0$	140$	280$*	-	280$	2
9	0$	140$	280$	420$*	420$	3
10	0$	140$	280$	420$*	420$	3

Estudo na etapa 4 (decisão sobre transporte do artigo D com p_4 = 5kg):

Nota: $x_4 \leq 10kg/5kg$ e inteiro implica que os valores admissíveis para x_4 são 0, 1 ou 2 unidades de D

x_4 \ s_4 (kg)	$f_4(s_4, x_4) = 245x_4 + f_5(s_4 - 5x_4)$				
	x_4=0	x_4=1	x_4=2	$f_4^*(s_4)$	x_4^*
0	0+0=0	-	-	0	0
1	0+0=0	-	-	0	0
2	0+0=0	-	-	0	0
3	0+140=140*	-	-	140	0
4	0+140=140*	-	-	140	0
5	0+140=140	245+0=245*	-	245	1
6	0+280=280*	245+0=245	-	280	0
7	0+280=280*	245+0=245	-	280	0
8	0+280=280	245+140=385*	-	385	1
9	0+420=420*	245+140=385	-	420	0
10	0+420=420	245+140=385	490+0=490*	490	2

Veja-se que, por exemplo, se ainda há disponibilidade para transportar 5kg (s_4 = 5) a decisão só pode ser não transportar "D" ou transportar 1 unidade de "D" (peso de 5 kg).

No 1º caso (x_4 = 0) então os 5 kg de disponibilidade permitem transportar artigo(s) da(s) próxima(s) etapa(s) de decisão) pelo que:

$f_4(s_4=5,x_4=0) = 245x_4 + f_5(s_4-5x_4) = 0 + f_5(5-0) = f_5(5) = 140\$$ a que corresponde transportar 1 unidade de "E".

No 2º caso (x_4 = 1) então os 5 kg de disponibilidade permitem transportar 1 unidade de "D" (lucro de 245$) não restando disponibilidade para transportar artigo(s) da(s) próxima(s) etapa(s) de decisão) pelo que:

$f_4(s_4=5,x_4=1) = 245x_4 + f_5(s_4-5x_4) = 245 + f_5(5-5) = 245 + f_5(0) = 245\$$.

Das decisões possíveis a melhor regista-se no 2º caso pelo que, nesta etapa, a política óptima para 5kg de disponibilidade é $f_4^*(5) = 245\$$ para a decisão $x_4^* = 1$.

Estudo na etapa 3 (decisão sobre transporte do artigo C com p_3 = 4kg):

Nota: $x_3 \leq 10kg/4kg$ e inteiro implica que os valores admissíveis para x_3 são 0, 1 ou 2 unidades de C

x_3 / s_3 (kg)	$f_3(s_3,x_3) = 187x_3 + f_4(s_3 - 4x_3)$			$f_3^*(s_3)$	x_3^*
	x_3=0	x_3=1	x_3=2		
0	0+0=0	-	-	0	0
1	0+0=0	-	-	0	0
2	0+0=0	-	-	0	0
3	0+140=140*	-	-	140	0
4	0+140=140	187+0=187*	-	187	1
5	0+245=245*	187+0=187	-	245	0
6	0+280=280*	187+0=187	-	280	0
7	0+280=280	187+140=327*	-	327	1
8	0+385=385*	187+140=327	374+0=374	385	0
9	0+420=420	187+245=432*	374+0=374	432	1
10	0+490=490*	187+280=467	374+0=374	490	0

Veja-se que, por exemplo, se ainda há disponibilidade para transportar 8kg (s_3 = 8) a decisão só pode ser não transportar "C" ou transportar 1 unidade de "C" (peso de 3 kg) ou transportar 2 unidades de "C" (peso de 6 kg).

No 1º caso (x_3 = 0) restam 8 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_3(s_3=8,x_3=0) = 187x_3 + f_4(s_3- 4x_3) = 0 +f_4(8-0) = f_4(8) = 385\$.$$

No 2º caso (x_3 = 1) então os 8 kg de disponibilidade permitem transportar 1 unidade de "C" (lucro de 187$) restando 4 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_3(s_3=8,x_3=1) = 187x_3 + f_4(s_3- 4x_3) = 187 +f_4(8-4) = 187 + f_4(4) =187+140 = 327\$.$$

Notar que os 140$ adicionados correspondem a decidir "0 unidades de D "(porque pesa 5kg) e "1 unidade de E" (peso 3kg).

No 3º caso (x_3 = 2) então os 8 kg de disponibilidade permitem transportar 2 unidade de "C" (lucro de 374$) não restando disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_3(s_3=8,x_3=2) = 187x_3 + f_4(s_3- 4x_3) = 374 +f_4(8-8) = 374 + f_4(0) =374+0 = 374\$.$$

Das decisões possíveis a melhor regista-se no 1º caso pelo que, nesta etapa, a política óptima para 8kg de disponibilidade é $f_3^*(8) = 385\$$ para a decisão $x_3^* = 0$.

Estudo na etapa 2 (decisão sobre transporte do artigo B com p_2 = 1kg):

Nota: $x_2 \leq 10kg/1kg$ *e inteiro implica que os valores admissíveis para* x_3 *de 0 a 10 unidades de B*

x_2 \ s_2 (kg)	$f_2(s_2,x_2)=17x_2+f_3(s_2-x_2)$											$f_2^*(s_2)$	x_2^*
	x_2=0	x_2=1	x_2=2	x_2=3	x_2=4	x_2=5	x_2=6	x_2=7	x_2=8	x_2=9	x_2=10		
0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0
1	0	17*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17	1
2	0	17	34*	-	-	-	-	-	-	-	-	34	2
3	140*	17	34	51	-	-	-	-	-	-	-	140	0
4	187*	157	34	51	68	-	-	-	-	-	-	187	0
5	245*	204	174	51	68	85	-	-	-	-	-	245	0
6	280*	262	221	191	68	85	102	-	-	-	-	280	0
7	327*	297	279	238	208	85	102	119	-	-	-	327	0
8	385*	344	314	296	255	225	102	119	136	-	-	385	0
9	432*	402	361	331	313	272	242	119	136	153	-	432	0
10	490*	449	419	378	348	330	289	259	136	153	170	490	0

Veja-se que, por exemplo, se ainda há disponibilidade para transportar 4kg (s_2 = 4) a decisão só pode ser transportar 0, 1 , 2, 3 ou 4 unidades de "B" (peso de 1 kg).

No 1º caso (x_2 = 0) então restam 4 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_2(s_2=4,x_2=0) = 17x_2 + f_3(s_2- x_2) = 0 +f_3(4-0) = f_3(4) =187\$.$$

No 2º caso (x_2 = 1) então os 4 kg de disponibilidade permitem transportar 1 unidade de "B" (lucro de 17$) restando 3 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_2(s_2=4,x_2=1) = 17x_2 + f_3(s_2- x_2) = 17 +f_3(4-1) = 17 + f_3(3) =17 + 140 = 157\$.$$

No 3º caso (x_2 = 2) então os 4 kg de disponibilidade permitem transportar 2 unidade de "B" (lucro de 34$) restando 2 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_2(s_2=4,x_2=2) = 17x_2 + f_3(s_2- x_2) = 34 +f_3(4-2) = 34 + f_3(2) = 34 + 0 = 34\$.$$

No 4º caso (x_2 = 3) então os 4 kg de disponibilidade permitem transportar 3 unidade de "B" (lucro de 51$) restando 1 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_2(s_2=4,x_2=3) = 17x_2 + f_3(s_2- x_2) = 51 +f_3(4-3) = 51 + f_3(1) = 51 + 0 = 51\$.$$

No 5º caso (x_2 = 4) então os 4 kg de disponibilidade permitem transportar 4 unidade de "B" (lucro de 51$) não restando disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_2(s_2=4,x_2=4) = 17x_2 + f_3(s_2- x_2) = 68 +f_3(4-4) = 68 + f_3(0) = 68 + 0 = 68\$.$$

Das decisões possíveis a melhor regista-se no 1º caso pelo que, nesta etapa, a política óptima para 4kg de disponibilidade é $f_2^*(4) = 187\$$ para a decisão $x_2^* = 0$.

Estudo na etapa 1 (decisão sobre transporte do artigo A com p_1 = 4kg):

Nota: $x_1 \leq 10kg/2kg$ *e inteiro implica que os valores admissíveis para* x_3 *são 0, 1, 2 , 3 , 4 ou 5 unidades de A.*

Na etapa 1 considera-se apenas o estado s_1 *= 10 kg dado que nesta etapa o "saco" está vazio.*

x_1 / s_1 (kg)	$f_1(s_1,x_1) = 79x_1 + f_2(s_1 - 2x_1)$						$f_1^*(s_1)$	x_1^*
	x_1=0	x_1=1	x_1=2	x_1=3	x_1=4	x_1=5		
10	490*	464	438	424	350	395	490	0

Veja-se que, por exemplo, sendo a disponibilidade para transportar de 10kg (s_1 = 10) a decisão só pode ser transportar 0, 1 , 2, 3, ou 5 unidades de "A" (peso de 2 kg).

No 1º caso (x_1 = 0) então restam 10 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_1(s_1=10,x_1=0) = 79x_1 + f_2(s_1- 2x_1) = 0 + f_2(10-0) = f_2(10) =490\$.$$

No 2º caso (x_1 = 1) então restam 8 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_1(s_1=10,x_1=1) = 79x_1 + f_2(s_1- 2x_1) = 79 +f_2(10-2) = 79 + f_2(8) = 79 + 385 = 464\$.$$

No 3º caso (x_1 = 2) então restam 6 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_1(s_1=10,x_1=2) = 79x_1 + f_2(s_1- 2x_1) = 158 +f_2(10-4) = 158 + f_2(6) = 158 + 280 = 438\$.$$

No 4º caso (x_1 = 3) então restam 4 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_1(s_1=10,x_1=3) = 79x_1 + f_2(s_1- 2x_1) = 237 +f_2(10-6) = 237 + f_2(4) = 237 + 187 = 424\$.$$

No 5º caso (x_1 = 4) então restam 2 kg de disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_1(s_1=10,x_1=4) = 79x_1 + f_2(s_1- 2x_1) = 316 +f_2(10-8) = 316 + f_2(2) = 316 + 34 = 350\$.$$

No 6º caso (x_1 = 5) então não resta disponibilidade para transportar artigo(s) das próximas etapas de decisão pelo que:

$$f_1(s_1=10,x_1=5) = 79x_1 + f_2(s_1- 2x_1) = 395 +f_2(10-10) = 395 + f_2(0) = 395 + 0 = 395\$.$$

Das decisões possíveis a melhor regista-se no 1º caso pelo que, nesta etapa, a política óptima para 10kg de disponibilidade é $f_1^*(10) = 490\$$ para a decisão $x_1^* = 0$.

Terminado o estudo em todas as etapas, na etapa 1 conclui-se que a melhor solução é a de lucro total de 490$ a que correspondem as decisões óptimas:

Artigo A : 0 unidades

Artigo B : 0 unidades

Artigo C : 0 unidades

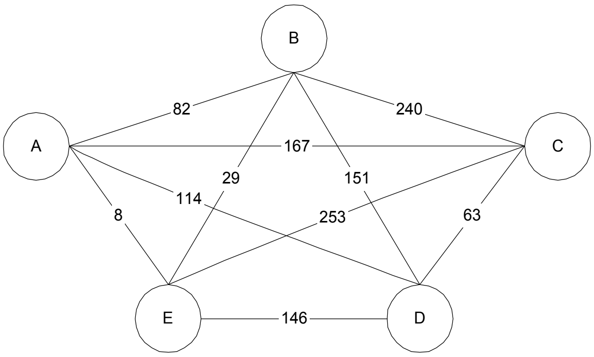
Artigo D : 2 unidades

Artigo E : 0 unidades

6. Exemplo nº 5 – Problema do caixeiro viajante (PD determinística e discreta)

Uma viatura de uma empresa situada em "A" necessita entregar encomendas em B, C, D, E (clientes) e regressar à empresa.

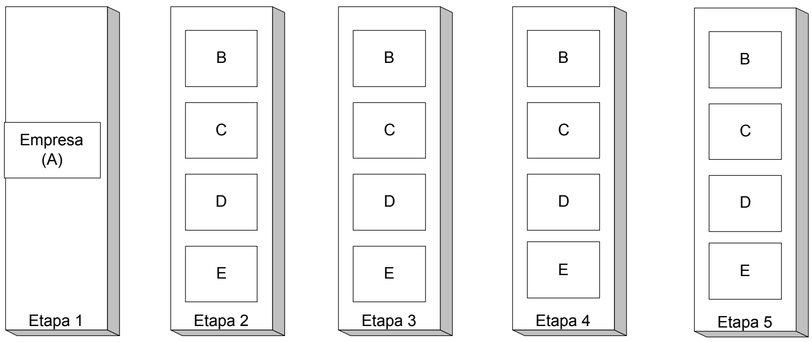
Se pretender passar uma e só uma vez em cada vértice e percorrer a menor distância total (km) qual o itinerário a utilizar?



	A	B	C	D	E
A		82	167	114	8
B	82		240	151	29
C	167	240		63	253
D	114	151	63		146
E	8	29	253	146	

O problema pode ser abordado dinamicamente dado que:

- verifica-se que é necessário decidir, após terminado o serviço a um cliente, qual o próximo cliente do itinerário;
- no decorrer do tempo a viatura pode estar junto de qualquer dos clientes (excepto A que é a sede da empresa);



O problema tem 5 etapas de decisão dado que "A" é o início do ciclo e que quando for atingido o 4º cliente a decisão remanescente é regressar à empresa.

Em qualquer das etapas (excepto a nº1) a viatura pode estar em B, C, D ou E que são portanto os valores admissíveis da variável de estado.

Estabelecidas as "n=5" Etapas, os "s_n" Estados de cada etapa, e as "x_n" Variáveis de Decisão é necessário fixar a relação entre estados → **Função de Transição** $f_n^*(s)$.

Fazendo o estudo no sentido inverso (última etapa → primeira etapa), esta função serve para estabelecer uma relação recursiva que identifica a política óptima na etapa "n" conhecida que seja a política óptima na etapa "n+1". Sendo "c_{sx_n}" a distância associada à decisão x_n, quando a viatura se encontra no cliente "s_n" (vértice da rede da etapa "n"), tem-se para o encaminhamento $f_n^*(s) = Min\left\{c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n)\right\}$. Importa ainda referir que para aquele estado "s_n" a decisão "x_n" só é admissível se, conectada com as decisões óptimas antes fixadas, não originar ciclos parasitas.

Estudo na etapa 5

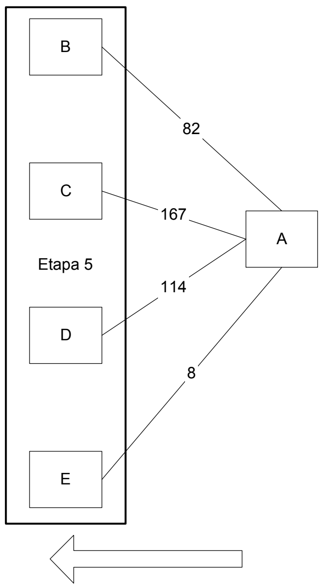
Quando a viatura se encontra em qualquer dos clientes (s_5 = B, C, D ou E) a decisão possível é transitar para o vértice "A".

No quadro seguinte estão registados os dados correntes e as decisões associadas:

s \ x_5	$f_5(s,x_5)=c_{sx_5}$		
	x_5 = A	$f_5^*(s)$	x_5^*
B	82	82	A
C	167	167	A
D	114	114	A
E	8	8	A

Descrição do quadro da Etapa 5

- estados da etapa (valores admissíveis para a variável de estado s_5).
- estados futuros (valores admissíveis para a variável de decisão x_5)
- custo da transição entre estados c_{sx_5}
- valor da função de transição entre estados $f_5(s,x_5)=c_{sx_5}$
- valor da política óptima para cada estado da etapa $f_5^*(s)$
- valor óptimo da variável de decisão x_5^* para cada um dos estados da etapa



Estudo na etapa 4

s \ x_4	$f_4(s,x_4)=c_{sx_4}+f_5^*(x_4)$					
	B	C	D	E	$f_4^*(s)$	x_4^*
B	-	240+167=407	151+114=265	29+8=37*	37	E
C	240+82=322	-	63+114=177*	253+8=261	177	D
D	151+82=233	63+167=230	-	146+8=154*	154	E
E	29+82=111*	253+167=420	146+114=260	-	111	B

Estudo na etapa 3

x_3 / s	$f_3(s,x_3) = c_{sx_3} + f_4^*(x_3)$				$f_3^*(s)$	x_3^*
	B	C	D	E		
B	-	240+177=417	151+154=305*	*Ciclo B, E, B*	305	D
C	240+37=277	-	63+154=217*	253+111=364	217	D
D	151+37=188*	*Ciclo D, C, D*	-	146+111=257	188	B
E	*Ciclo E, B, E*	253+177=430*	*Ciclo E, D, E*	-	430	C

Estudo na etapa 2

x_2 / s	$f_2(s,x_2) = c_{sx_2} + f_3^*(x_2)$				$f_2^*(s)$	x_2^*
	B	C	D	E		
B	-	240+217=457*	*Ciclo B, D, B*	29+430=459	457	C
C	240+217=457	-	63+188=251*	*Ciclo C, E, C*	251	D
D	*Ciclo D, B, D*	*Ciclo D, C, D*	-	*Ciclo D, E, C, D*	-	-
E	*Ciclo E,B,D,E*	*Ciclo E,C,D,E*	*Ciclo E,D,B,E*	-	-	-

Estudo na etapa 1

x_1 / s	$f_1(s,x_1) = c_{sx_1} + f_2^*(x_1)$				$f_1^*(s)$	x_1^*
	B	C	D	E		
A	82+457=539	167+251=418*	-	-	418	C

A política óptima (ciclo óptimo para a viatura) corresponde à distância mínima igual a $f_1^*(s) = 418$ km .

O itinerário associado é A → C → D → B → E → A que se obtém do seguinte modo:

Do quadro da etapa 1 (estado A; decisão C):

A → C (167km)

Do quadro da etapa 2 (estado C; decisão D):

C → D (63 km)

Do quadro da etapa 3 (estado D; decisão B):

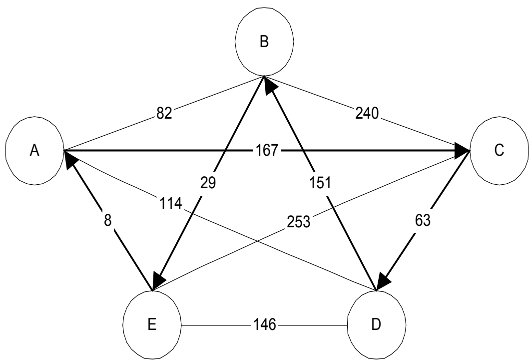
D → B (151 km)

Do quadro da etapa 4 (estado B; decisão E):

B → E (29 km)

Do quadro da etapa 5 (estado E; decisão A):

E → A (8 km)



7. Exemplo nº 6 – Problema de produção (PD probabilística e discreta)

Uma empresa produz maquinaria para tratamento e circulação de água em piscinas mantendo com os seus clientes contratos de manutenção.

Do histórico da produção sabe que quando produz o componente X e o aplica na maquinaria há defeito de fabrico em 60% dos casos.

Os custos associados a uma sessão de produção são os seguintes:

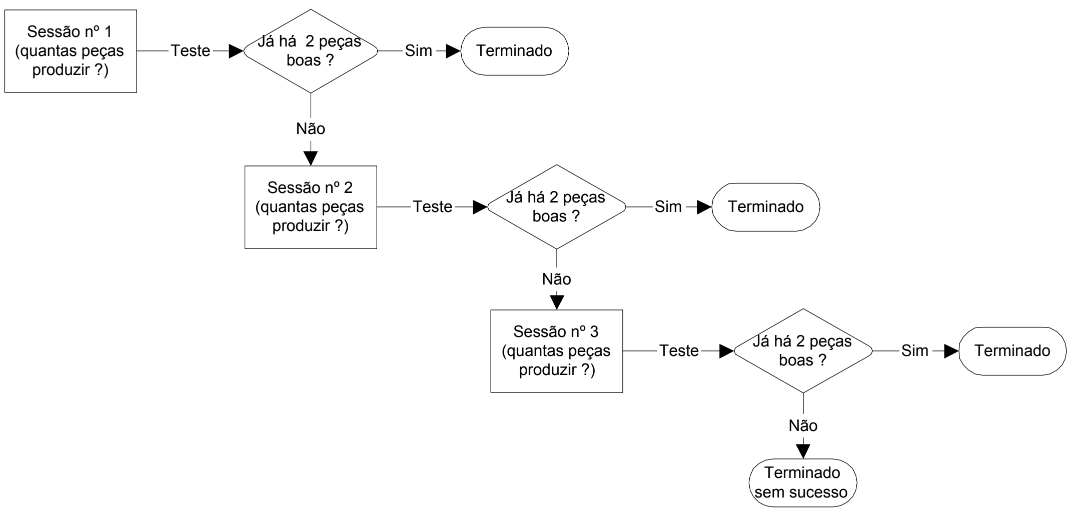
- Custos fixos = 100 u.m.
- Custo unitário de produção = 75 u.m.

No contrato de manutenção a empresa garante reparações com este componente no prazo máximo de 15 dias indemnizando o cliente em 1500 u.m. se tal não for cumprido.

Admita ser necessário substituir dois componentes X no equipamento do cliente W e que no planeamento da empresa se verifica ser possível disponibilizar tempo e pessoal para levar a cabo, no máximo, três sessões de produção de peças (nota: só após montagem e teste é que se conclui sobre a qualidade da peça).

Qual o plano de produção a adoptar para minimizar o <u>custo total esperado</u> ?

Comecemos por constatar que só na fase de teste se pode saber quantas peças das produzidas funcionam correctamente e assim concluir ser ou não necessário realizar nova sessão de produção. Há portanto uma sequência temporal de decisões como mostra a figura seguinte:



Da figura conclui-se haver 3 etapas (sessões de produção).

Resolvendo o problema no sentido inverso ao do tempo decisional, consideremo-nos, por exemplo, <u>no momento em que terminou o teste das peças produzidas na 2ª etapa</u>. As situações possíveis são as seguintes:

- Número de peças boas = 0 $\rightarrow$ passar à etapa 3 em estado $s_3 = 2$ (são necessárias 2 peças boas);
- Número de peças boas = 1 $\rightarrow$ passar à etapa 3 em estado $s_3 =1$ (é necessária mais 1 peça boa);
- Número de peças boas = 2 $\rightarrow$ processo terminado (etapa 3 com custo nulo porque não se repete a produção);

Conclui-se assim que em cada uma das "n=3" etapas a variável de estado *"s_n" representará o número de peças boas ainda em falta* pelo que terá o valor 0, 1 ou 2.

Na etapa "n" e no estado $s_n \neq 0$ será necessário decidir o valor de x_n (número de peças a produzir). Se, por exemplo, se decidir produzir 3 peças pode suceder, quando testadas, haver 0, 1, 2 ou 3 peças boas o que mostra que, neste problema, fixar o valor da variável de decisão em ambiente probabilístico difere do modo como se actuou em ambiente determinístico (*será necessário em cada etapa e estado simular a produção de tantas peças quantas as necessárias para concluir sobre o custo esperado mínimo*).

Vejamos então como actuar na etapa final (3ª sessão) para os diferentes valores da variável de estado s_3 que são:

- $s_3 = 0$ (são ainda necessárias 0 peças boas)

  O processo está terminado. Custo esperado na 3ª etapa é $E[f(s_3 = 0, x_3 = 0)] = 0$.

- $s_3 = 1$ (é ainda necessária 1 peça boa)

  Produzir x_3 peças para obter 1 peça boa. O custo esperado é o seguinte:

  $E[f_3(s_3, x_3)] = Custo\ \ fixo\ (100) + Custo\ \ Produção\ (75x_3) + Custo\ do\ insucesso\ [1500 * P_0]$

  Nota: P_0 *é probabilidade de obter 0 peças boas em* x_3 *peças produzidas*

  Necessitando 1 peça boa se forem obtidas 0 peças boas a situação é de insucesso

- $s_3 = 2$ (são ainda necessárias 2 peças boas)

  Produzir x_3 peças para obter 2 boas. O custo esperado é o seguinte:

  $E[f_3(s_3, x_3)] = Custo\ \ fixo\ (100) + Custo\ \ Produção\ (75x_3) + Custo\ do\ insucesso\ \ [1500 * (P_0 + P_1)]$

  Nota: P_0 *é probabilidade de obter 0 peças boas em* x_3 *peças produzidas*

  P_1 *é probabilidade de obter 1 peça boa em* x_3 *peças produzidas*

  Necessitando 2 peças boas se forem obtidas 0 ou 1 peça boas a situação é de insucesso

Se for produzida uma única peça, a probabilidade de a mesma ser boa é de p=0.4 pelo que é de q=0.6 a probabilidade contrária. Se forem produzidas "x_n" peças a probabilidade de obter "k" peças boas (ou seja "k" sucessos e (x_n – k) insucessos) é dada por:

$$P_k = C_k^{x_n} p^k q^{x_n - k} = \frac{x_n!}{k!(x_n - k)} p^k q^{x_n - k} \quad \text{(distribuição binomial)}$$

Para k = 0, 1 , 2 , x_n a distribuição corresponde aos termos do binómio $(p+q)^{x_n}$:

$$(p+q)^{x_n} = q^{x_n} + C_1^{x_n} p^1 q^{x_n - 1} + C_2^{x_n} p^2 q^{x_n - 2} + C_3^{x_n} p^3 q^{x_n - 3} + ... + p^{x_n}$$

É agora possível desenvolver o cálculo de Custos Totais Esperados na Etapa 3:

<u>Para s_3=1</u>:

- Decidindo x_3 =0 : $E[f(s_3 = 1, x_3 = 0)] = 1500$ u.m. associado ao insucesso;
- Decidindo x_3 =1: $E[f(s_3 = 1, x_3 = 1] = 100 + 75(1) + 1500 * P_0 = 100 + 75 + 1500 * 0.6 = 1075\ u.m.$

  (em que P_0 é a probabilidade de obter 0 peças boas em 1 peça produzida);
- Decidindo x_3=2:

  $E[f(s_3 = 1, x_3 = 2] = 100 + 75(2) + 1500 * P_0 = 100 + 150 + 1500 * 0.6^2 = 790\ u.m.$ (em que P_0 é a probabilidade de obter 0 peças boas em 2 peças produzidas);
- Decidindo x_3 =3 :

  $E[f(s_3 = 1, x_3 = 2] = 100 + 75(3) + 1500 * P_0 = 100 + 225 + 1500 * 0.6^3 = 649\ u.m.$ (em que P_0 é a probabilidade de obter 0 peças boas em 3 peças produzidas);

Continuando, obtêm-se de igual modo os custos esperados para decisões de produzir 4, 5, 6, 7, 8 e 9 peças.

Para $s_3 = 2$:

- Decidindo $x_3 = 0$: $E\big[f(s_3 = 2, x_3 = 0)\big] = 1500$ u.m. associado ao insucesso;
- Decidindo $x_3 = 1$: $E\big[f(s_3 = 2, x_3 = 1)\big] = 1500$ u.m. associado ao insucesso;
- Decidindo $x_3=2$: $E\big[f(s_3 = 2, x_3 = 2\big] = 100 + 75(2) + 1500 * (P_0 + P_1)$ (em que P_0 e P_1 são as probabilidades de 0 ou 1 peças boas em 2 peças produzidas). Dado que $P_0 = 0.6^2 = 0.36$ e $P_1 = 2(0.4)(0.6) = 0.48$ fica $E\big[f(s_3 = 2, x_3 = 2\big] = 100 + 75(2) + 1500 * (0.36 + 0.48) = 1510$ *u.m.*
- Decidindo $x_3=3$: $E\big[f(s_3 = 2, x_3 = 3\big] = 100 + 75(3) + 1500 * (P_0 + P_1)$ (em que P_0 e P_1 são as probabilidades de 0 ou 1 peças boas em 3 peças produzidas). Dado que:

  $P_0 = 0.6^3 = 0.2160$ e $P_1 = 3(0.4)(0.6)^2 = 0.432$ então,

  $E\big[f(s_3 = 2, x_3 = 3\big] = 100 + 75(3) + 1500 * (0.216 + 0.432) = 1297$ *u.m.*

Continuando, obtêm-se de igual modo os custos esperados para decisões de produzir 4, 5, 6, 7, 8 e 9 peças.

Dado que para cada estado, o custo esperado óptimo é $f_3^*(s_3) = Min\,\{\, f_3(s_3, x_3)\,\}$, o quadro seguinte apresenta os custos esperados para cada par (estado, decisão) e as políticas óptimas:

s_3 \ x_3	$f_3(s_3, x_3) = 100 + 75x_3 + 1500\,(\sum_{k=0}^{s_3-1} P_k)$											
	$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$x_3=4$	$x_3=5$	$x_3=6$	$x_3=7$	$x_3=8$	$x_3=9$	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	0	-		-	-	-	-	-	-	-	-	0
1	1500	1075	790	649	594	592*	620	667	725	790	592	5
2	1500	1500	1510	1297	1113	980	900	863	860*	881	860	8

Deste quadro conclui-se para a Etapa 3:

Se ainda forem necessárias 0 peças boas, produzem-se 0 peças com custo total esperado de 0 u.m.

Se ainda for necessária 1 peça boa, produzem-se 5 peças com custo total esperado de 592 u.m.

Se ainda forem necessárias 2 peças boas, produzem-se 8 peças com custo total esperado de 860 u.m.

Estudo para a Etapa 2

É necessário conhecer a função de transição de um estado da etapa 2 para outro estado da etapa 3.

Comecemos por analisar o estado $s_2 = 1$ (ainda é necessário mais uma peça boa).

Se resultarem 0 peças boas nas x_2 peças produzidas é necessário passar ao estado 1 da etapa 3 pelo que o custo esperado do insucesso será calculado não com base em 1500 u.m. mas no valor de $f_{n+1}^*(1) = 592$ u.m. que é o custo óptimo na etapa 3 se ainda for necessária uma peça boa não obtida na etapa 2.

Vejamos agora esta o estado $s_2 = 2$ (ainda são necessárias duas peças boas), onde há duas hipóteses:

1ª hipótese

Se resultarem 0 peças boas será necessário passar ao estado 2 da etapa 3 pelo que o custo esperado será calculado com base no valor de $f_{n+1}^*(2) = 860$ que é o custo óptimo na etapa 3 se ainda forem necessárias duas peças boas não obtidas na etapa 2.

2ª hipótese

Se resultar apenas 1 peça boa será necessário passar ao estado 1 da etapa 3 pelo que o custo esperado será calculado com base no valor de $f_{n+1}^*(1) = 592$ que é o custo óptimo na etapa 3 se ainda for necessária uma peça boa não obtida na etapa 2.

Com base no exposto e actuando, no cálculo restante, de forma similar à etapa anterior tem-se o seguinte quadro-resumo para a etapa 2:

s_2 \ x_2	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$x_2=5$	$x_2=6$	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0	-		-	-	-	-		
1	592	530	463	453*	477	521	578	453	3
2	860	927	843	766	716	695*	701	695	5

A título de exemplo veja-se o cálculo de:

- $f_2(s_2 = 1, x_2 = 4) = 477$
  - a probabilidade de 0 peças boas, produzindo 4 é de $0.6^4 = 0.1296$;
  - o valor de $E[f_2(1,4)]$ é de $100 + 75(4) + 0.1296 * f_{n+1}^*(1) = 100 + 300 + 0.1296 * 592 = 477\,u.m.$
- $f_2(s_2 = 2, x_2 = 4) = 716$
  - a probabilidade de 0 peças boas, produzindo 4 é de $0.6^4 = 0.1296$;
  - a probabilidade de 1 peça boa, produzindo 4 é de $4(0.6^3)(0.4)=0.3456$;
  - o valor de $E[f_2(2,4)]$ é de:

$$100 + 75(4) + 0.1296 * f_{n+1}^*(2) + 0.3456 * f_{n+1}^*(1) = 100 + 300 + 0.1296(860) + 0.3456(592) = 716\,u.m.$$

<u>Estudo para a Etapa 1</u>

Dado ser a 1ª sessão de produção há um único estado $s_1 = 2$ (são necessárias 2 peças boas).

Nesta etapa a função de transição é definida de modo igual ao descrito na etapa 2:

$$\{\, 100 + 75x_n + P(0\ boas\ em\ x_1\ produzidas) * 695 + P(1\ boa\ em\ x_1\ produzidas) * 453 \,\}$$

O quadro-resumo para a etapa 1 é o seguinte:

s_1 \ x_1	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$	$x_1=6$	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
2	695	773	718	671	647	646*	667	646	5

Para $x_1=0$ será necessário passar ao estado 2 na etapa 2 (custo esperado=695)

Para $x_1=1$ peça produzida o custo esperado é de 100+75(1)+0.6(695)+0.4(453)=773 u.m.

Nota:

Obtendo 0 boas, é necessário passar ao estado 2 da etapa 2 pelo que se adiciona 0.6*695

Obtendo 1 boa, é necessário passar ao estado 1 da etapa 2 pelo que se adiciona 0.4*453

Para x_1=2 peças produzidas o custo esperado é de $100+75(2)+0.6^2(695)+(2)(0.4)(0.6)(453)=718$ u.m.

Nota:

Obtendo 0 boas, é necessário passar ao estado 2 da etapa 2 pelo que se adiciona $0.6^2 *695$

Obtendo 1 boa, é necessário passar ao estado 1 da etapa 2 pelo que se adiciona $2*0.4*0.6*453$

Para x_1=3 peças produzidas o custo esperado é de $100+75(3)+ 0.6^3 *695+3*0.4*0.6^2 *453=671$ u.m.

Nota:

Obtendo 0 boas, é necessário passar ao estado 2 da etapa 2 pelo que se adiciona $0.6^3 *695$

Obtendo 1 boa, é necessário passar ao estado 1 da etapa 2 pelo que se adiciona $3*0.4*0.6^2 *453$

Para x_1=4 peças produzidas o custo esperado é de $100+75(4)+ 0.6^4 *695+4*0.4*0.6^3 *453=647$ u.m.

Nota:

Obtendo 0 boas, é necessário passar ao estado 2 da etapa 2 pelo que se adiciona $0.6^4 *695$

Obtendo 1 boa, é necessário passar ao estado 1 da etapa 2 pelo que se adiciona $4*0.4*0.6^3 *453$

Para x_1=5 peças produzidas o custo esperado é de $100+75(5)+ 0.6^5 *695+5*0.4*0.6^4 *453=646$ u.m.

Nota:

Obtendo 0 boas, é necessário passar ao estado 2 da etapa 2 pelo que se adiciona $0.6^5 *695$

Obtendo 1 boa, é necessário passar ao estado 1 da etapa 2 pelo que se adiciona $5*0.4*0.6^4 *453$

Para x_1=6 peças produzidas o custo esperado é de $100+75(6)+ 0.6^6 *695+6*0.4*0.6^5 *453=667$ u.m.

Nota:

Obtendo 0 boas, é necessário passar ao estado 2 da etapa 2 pelo que se adiciona $0.6^6 *695$

Obtendo 1 boa, é necessário passar ao estado 1 da etapa 2 pelo que se adiciona $6*0.4*0.6^5 *453$

Como para 6 peças o custo esperado aumentou, a produção óptima é de 5 peças a que corresponde o custo esperado de 646 u.m.

Da análise dos quadros elaborados para cada uma das etapas **o plano óptimo (minimização do custo total esperado) é o seguinte:**

Etapa	Peças necessárias (ainda)	Peças a produzir	Custo Total Esperado
1	2	5	646
2	0	0	
	1	3	453
	2	5	695
3	0	0	
	1	5	592
	2	8	860

8. Exemplo nº 7 – Problema de Stocks (PD determinística e discreta)

Uma empresa de construção civil adquire, *mensalmente*, tijolo em paletes de que prevê, para os próximos 6 meses, a procura média de 50, 30, 40, 20, 40 e 20 paletes, respectivamente.

O fornecedor satisfaz, em prazo máximo de 48 horas, encomendas tipificadas de 10, 20, 30, 40 ou 50 paletes com custo unitário de 3 u.m. e oferece os seguintes descontos de quantidade:

Encomenda (paletes)	Desconto na aquisição (u.m.)
10	3%
20	5%
30	10%
40	20%
50	30%

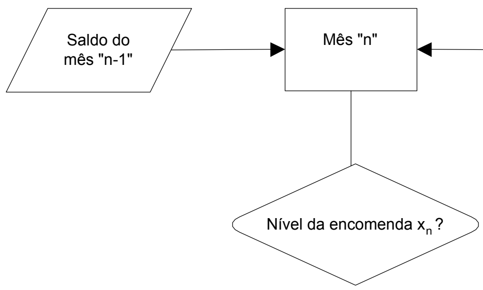
Mensalmente, a diferença entre o stock activo e a procura não deve exceder 40 paletes por questões de armazenagem.

O custo de encomenda é de 12 u.m.

O custo de posse/mês é de 0.2 u.m./palete (incidindo sobre o stock activo no final de cada mês).

Admitindo que a gestão do stock se inicia com stock nulo e se pretende que também termine com stock nulo no final do 6º mês, determine a política óptima de gestão do stock.

Examinando o diagrama seguinte,



conclui-se ser necessário decidir "mês a mês" pelo que podem considerar-se 6 etapas de decisão.

Dada a limitação de armazenagem, no início de cada mês (etapa) a empresa pode ter em stock 0, 10, 20, 30 ou 40 paletes que representam os valores admissíveis da variável de estado "s_n".

Considere-se a seguinte simbologia particular para este tipo de problema:

C_a ≡ Custo unitário de aquisição = 3 u.m.

C_e ≡ Custo de encomenda = 12 u.m.

C_p ≡ Custo de posse (unidade/mês) = 0.2 u.m.

p_n ≡ Procura na etapa "n"

d_{x_n} ≡ taxa de desconto para a encomenda de x_n paletes

A_n ≡ stock activo no final do mês "n" e que transita para o mês "n+1"

Dado que as encomendas são típicas é conveniente calcular o custo total de x_n paletes :

x_n (paletes)	Aquisição (u.m) ($C_a x_n$)	Desconto (u.m.) ($d_n x_n$)	Custo Encomenda (u.m.) (C_e)	Total (u.m.) (t_{x_n})
10	30	0.03*30=0.9	12	41.1
20	60	0.05*60=3	12	69
30	90	0.1*90=9	12	93
40	120	0.2*120=24	12	108
50	150	0.3*150=45	12	117

Estudemos agora as restrições lógicas associadas à variável de decisão "x_n" (quantidade a encomendar):

- $A_{n-1} + x_n - p_n \le 40 \Rightarrow \; x_n \le 40 + p_n - A_{n-1}$

  O stock de "A_{n-1}" paletes que transitam para o mês "n", adicionado à encomenda de "x_n" paletes no mês "n", constitui a disponibilidade total para este mês. Subtraindo a procura de "p_n" paletes resta o saldo para o mês seguinte que não deve exceder a capacidade do armazém.

- $s_n + x_n - p_n \le \sum_{n+1}^{6} p_n \Rightarrow \; x_n \le \sum_{n+1}^{6} p_n + p_n - s_n$

  Na etapa "n", a soma da variável de estado (stock activo) com a quantidade encomendada deduzida da procura do mês "n" ,não pode exceder a soma das procuras médias de todos os meses restantes, para garantir stock nulo no final do período de 6 meses.

- $s_n + x_n \ge p_n \Rightarrow \; x_n \ge p_n - s_n$

  Na etapa "n", a soma da variável de estado (stock activo) com a quantidade encomendada deve, no mínimo, satisfazer a procura do mês "n" (não se admite a ruptura do stock).

Para todas as etapas (excepto o 6º e último mês) é necessário estabelecer a função de transição.

Ao iniciar-se o mês "n", o stock encontra-se no estado "s_n" e são encomendadas "x_n" paletes . O custo associado é "t_{x_n}" (aquisição+encomenda-desconto) acrescido dos custos de posse de "$s_n + x_n - p_n$" paletes existentes no fim do mês. <u>*Como esta quantidade sobrante transita para o mês seguinte*</u>, a ligação entre qualquer estado da etapa "n" com outro estado da etapa "n+1" é feita através da função de custo:

$$f_n(s_n, x_n) = t_{x_n} + C_p(s_n + x_n - p_n) + f^*_{n+1}(s_n + x_n - p_n)$$

Para cada estado "s_n" da etapa "n", o custo óptimo é $f^*_n(s_n) = Min \{ f_n(s_n, x_n) \}$.

Conhecidas as etapas, os valores admissíveis da variável de estado de cada etapa e a função de transição pode iniciar-se o cálculo que será sequenciado do último mês do período (mês 6) para o mês inicial.

<u>Estudo na etapa n=6 (mês 6)</u> ; Procura p_6 =20

x_6 / s_6	$f_6(s_6, x_6) = t_{x_n}$						$f_6^*(s_6)$	x_6^*
	x_6=0	x_6=10	x_6=20	x_6=30	x_6=40	x_6=50		
0	-	-	69*	-	-	-	69	20
10	-	41.1*	-	-	-	-	41.1	10
20	0*	-	-	-	-		0	0

Para que o mês termine com stock nulo a existência inicial (s_n) adicionada à encomenda x_n deve ser igual à procura, ou seja, $s_n + x_n = p_n \Leftrightarrow s_n + x_n = 20$.

Não se consideraram pela razão exposta os estados de 30 e 40 paletes em stock no início do mês pois tal não sucederá face às restrições lógicas associadas às variáveis de decisão "x_n".

<u>Estudo na etapa n=5 (mês 5)</u> ; Procura p_5 =40

s_5 \ x_5	$f_5(s_5,x_5) = t_{x_5} + C_p(s_5 + x_5 - p_5) + f_6^*(s_5 + x_5 - p_5)$						$f_5^*(s_5)$	x_5^*
	x_5=0	x_5=10	x_5=20	x_5=30	x_5=40	x_5=50		
0					177	160.1*	160.1	50
10				162	151.1	121*	121	50
20			138	136.1	112*		112	40
30		110.1	112.1	97*			97	30
40	69*	84.2	73				69	0

A variável x_5 deve satisfazer simultaneamente:

$$\begin{cases} x_n \leq 40 + p_n - A_{n-1} \Leftrightarrow x_5 \leq 40 + p_5 - s_5 \Leftrightarrow x_5 \leq 80 - s_5 \quad (capacidade\ \ de\ armazenamento) \\ x_n \leq \sum_{n+1}^{6} p_n + p_n - s_n \Leftrightarrow x_5 \leq p_6 + p_5 - s_5 \Leftrightarrow x_5 \leq 20 + 40 - s_5 \Leftrightarrow x_5 \leq 60 - s_5 \quad (stock\ \ final = 0) \\ x_n \geq p_n - s_n \Leftrightarrow x_5 \geq p_5 - s_5 \Leftrightarrow x_5 \geq 40 - s_5 \quad (impedir\ ruptura\ \ do\ stock) \end{cases}$$

que se reduz a:

$$\begin{cases} x_5 \leq 60 - s_5 \\ x_5 \geq 40 - s_5 \end{cases}$$

<u>Descrição sumária do cálculo de alguns dos custos registados no quadro:</u>

- $f_5(s_5 = 10, x_5 = 40) = 151.1$ u.m.

  → aquisição de 40 paletes =**108 u.m.** (ver quadro de custos)

  → paletes para venda = s_5 + x_5 = 10 + 40 = 50 paletes

  → procura no mês 5 = 40 paletes

  → stock no final do mês 5 =50 – 40 = 10 paletes

  → custos de posse no mês 5= 10*C_p = 10 * 0.2 = **2 u.m.**

  → stock inicial do mês 6 = stock final do mês 5 = 10 paletes

  → estado inicial do mês 6 = stock inicial do mês 6 → s_6 = 10 paletes

  → custo optimizado no mês 6 para estado inicial s_6 = 10 → $f_6^*(s_6 = 10)$ = **41.1 u.m.**

  → $f_5(s_5 = 10, x_5 = 40) =$ **custo total = 108 + 2 + 41.1 = 151.1 u.m.**

- $f_5(s_5 = 40, x_5 = 0) = 69$ u.m.

  → aquisição de 0 paletes = **0 u.m.**

  → paletes para venda = s_5 + x_5 = 40 + 0 = 40 paletes

  → procura no mês 5 = 40 paletes

  → stock no final do mês 5 =40 – 40 = 0 paletes

  → custos de posse no mês 5= 0*C_p = **0 u.m.**

  → stock inicial do mês 6 = stock final do mês 5 = 0 paletes

  → estado inicial do mês 6 = stock inicial do mês 6 → s_6 = 0 paletes

  → custo optimizado no mês 6 para estado inicial s_6 = 0 → $f_6^*(s_6 = 0)$ = **69 u.m.**

  → $f_5(s_5 = 40, x_5 = 0) =$ **custo total = 0 + 0 + 69 = 69 u.m.**

<u>Estudo na etapa n=4 (mês 4)</u> ; Procura p_4 =20

x_4 \ s_4	$f_4(s_4,x_4)=t_{x_4}+C_p(s_4+x_4-p_4)+f_5^*(s_4+x_4-p_4)$						$f_4^*(s_4)$	x_4^*
	x_4=0	x_4=10	x_4=20	x_4=30	x_4=40	x_4=50		
0			229.1	216*	224	220	216	30
10		201.2	192*	209	211	194	192	20
20	160.1*	164.1	185	196	185		160.1	0
30	123*	157.1	172	170			123	0
40	116*	144.1	146				116	0

A variável x_4 deve satisfazer simultaneamente:

$$\begin{cases} x_n \le 40 + p_n - A_{n-1} \Leftrightarrow x_4 \le 40 + p_4 - s_4 \Leftrightarrow x_4 \le 60 - s_4 \quad (capacidade\ \ de\ armazenamento) \\ x_n \le \sum_{n+1}^{6} p_n + p_n - s_n \Leftrightarrow x_4 \le p_5 + p_6 + p_4 - s_4 \Leftrightarrow x_4 \le 80 - s_4\ (stock\ \ final = 0) \\ x_n \ge p_n - s_n \Leftrightarrow x_4 \ge p_4 - s_4 \Leftrightarrow x_4 \ge 20 - s_4 \quad (impedir\ ruptura\ \ do\ stock) \end{cases}$$

que se reduz a:

$$\begin{cases} x_4 \le 60 - s_4 \\ x_4 \ge 20 - s_4 \end{cases}$$

<u>Estudo na etapa n=3 (mês 3)</u> ; Procura p_3 = 40

x_3 \ s_3	$f_3(s_3,x_3)=t_{x_3}+C_p(s_3+x_3-p_3)+f_4^*(s_3+x_3-p_3)$						$f_3^*(s_3)$	x_3^*
	x_3=0	x_3=10	x_3=20	x_3=30	x_3=40	x_3=50		
0					324	311*	311	50
10				309	302	281.1*	281.1	50
20			285	287	272.1	246*	246	50
30		257.1	263	257.1	237*	241	237	40
40	216*	235.1	233.1	222	232		216	0

A variável x_3 deve satisfazer simultaneamente:

$$\begin{cases} x_n \le 40 + p_n - A_{n-1} \Leftrightarrow x_3 \le 40 + p_3 - s_3 \Leftrightarrow x_3 \le 80 - s_3 \quad (capacidade\ \ de\ armazenamento) \\ x_n \le \sum_{n+1}^{6} p_n + p_n - s_n \Leftrightarrow x_3 \le p_4 + p_5 + p_6 + p_3 - s_3 \Leftrightarrow x_3 \le 120 - s_3 \quad (stock\ \ final = 0) \\ x_n \ge p_n - s_n \Leftrightarrow x_3 \ge p_3 - s_3 \Leftrightarrow x_3 \ge 40 - s_3 \quad (impedir\ ruptura\ \ do\ stock) \end{cases}$$

que se reduz a:

$$\begin{cases} x_3 \le 80 - s_3 \\ x_3 \ge 40 - s_3 \end{cases}$$

<u>Estudo na etapa n=2 (mês 2)</u> ; Procura $p_2 = 30$

s_2 \ x_2	$f_2(s_2,x_2)=t_{x_2}+C_p(s_2+x_2-p_2)+f_3^*(s_2+x_2-p_2)$						$f_2^*(s_2)$	x_2^*
	x_2=0	x_2=10	x_2=20	x_2=30	x_2=40	x_2=50		
0				404	391.1	367*	367	50
10			380	376.1	358*	360	358	40
20		352.1	352.1	343	351	341*	341	50
30	311*	324.2	319	336	332			0
40	283.1*	291.1	312	317				0

A variável x_2 deve satisfazer simultaneamente:

$$\begin{cases} x_n \le 40 + p_n - A_{n-1} \Leftrightarrow x_2 \le 40 + p_2 - s_2 \Leftrightarrow x_2 \le 70 - s_2 & (\textit{capacidade de armazenamento}) \\ x_n \le \sum_{n+1}^{6} p_n + p_n - s_n \Leftrightarrow x_2 \le p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_2 - s_2 \Leftrightarrow x_2 \le 150 - s_2 & (\textit{stock final} = 0) \\ x_n \ge p_n - s_n \Leftrightarrow x_2 \ge p_2 - s_2 \Leftrightarrow x_2 \ge 30 - s_2 & (\textit{impedir ruptura do stock}) \end{cases}$$

que se reduz a:

$$\begin{cases} x_2 \le 70 - s_2 \\ x_2 \ge 30 - s_2 \end{cases}$$

<u>Estudo na etapa n=1 (mês 1)</u> ; Procura $p_1 = 50$

s_1 \ x_1	$f_1(s_1,x_1)=t_{x_1}+C_p(s_1+x_1-p_1)+f_2^*(s_1+x_1-p_1)$						$f_1^*(s_1)$	x_1^*
	x_1=0	x_1=10	x_1=20	x_1=30	x_1=40	x_1=50		
0						484*	484	50

Stock inicial = 0.

A variável x_1 deve satisfazer simultaneamente:

$$\begin{cases} x_n \le 40 + p_n - A_{n-1} \Leftrightarrow x_1 \le 40 + p_1 - s_1 \Leftrightarrow x_1 \le 90 - s_1 & (\textit{capacidade de armazenamento}) \\ x_n \le \sum_{n+1}^{6} p_n + p_n - s_n \Leftrightarrow x_1 \le p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_1 - s_1 \Leftrightarrow x_1 \le 200 - s_1 & (\textit{stock final} = 0) \\ x_n \ge p_n - s_n \Leftrightarrow x_1 \ge p_1 - s_1 \Leftrightarrow x_1 \ge 50 - s_1 & (\textit{impedir ruptura do stock}) \end{cases}$$

que se reduz a:

$$\begin{cases} x_1 \le 90 - s_1 \\ x_1 \ge 50 - s_1 \end{cases}$$

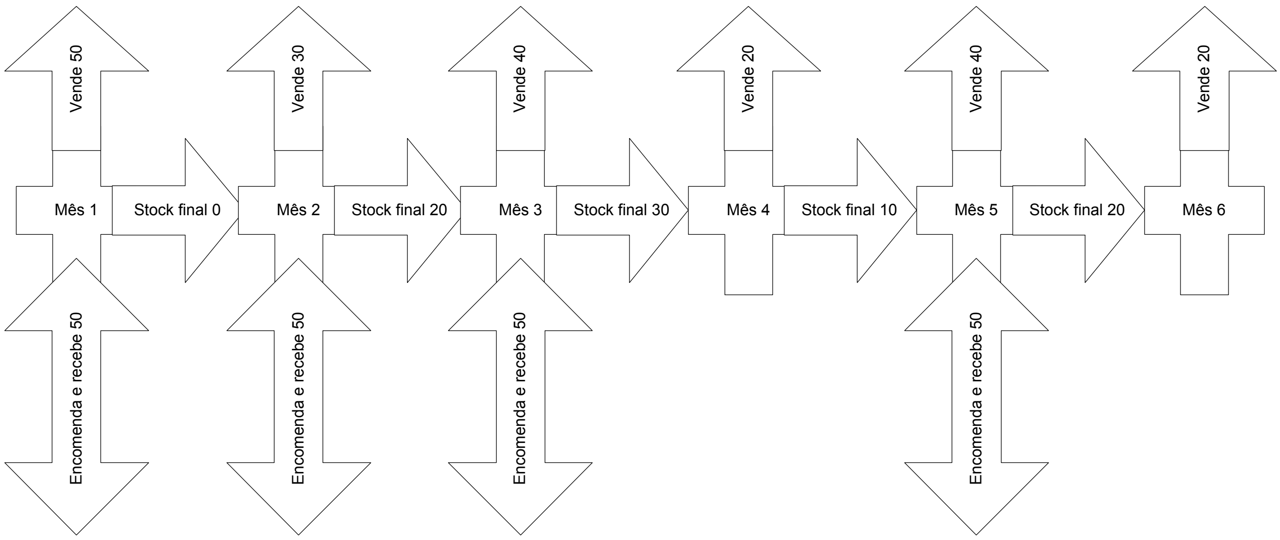
Conclusões

A política óptima de gestão do stock tem Custo Total Mínimo = 484 u.m.

Gestão do stock e custos parcelares:

Mês	Stock anterior	Encomenda	Procura	Stock p/mês seguinte	$C_a + C_e$+Desconto	C_p	Custo Total
1	0	50	50	0	117	0	117
2	0	50	30	20	117	4	121
3	20	50	40	30	117	6	123
4	30	0	20	10	0	2	2
5	10	50	40	20	117	4	121
6	20	0	20	0	0	0	0

Total 484



1. A Leontina frequenta um curso de pós-graduação que no final deste semestre tem 5 exames (Produção, Finanças, Marketing, Métodos Quantitativos e Estatística).

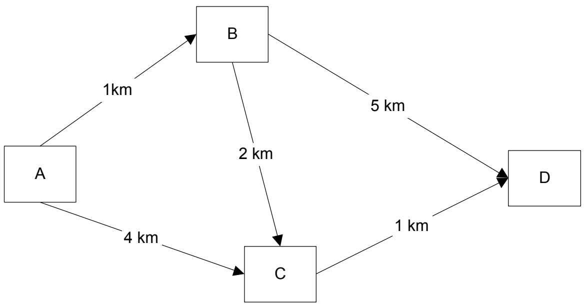
A escala de classificação dos exames é, por ordem decrescente, A (5 pontos) , B (4 pontos) , C (3 pontos) e D (1 ponto).

A Leontina, que poderá disponibilizar 50 horas para preparação dos exames, estabeleceu o seguinte quadro de expectativas (classificação em função do número de horas de preparação):

	Classificação em função do tempo de preparação			
Área	5h	10h	15h	20h
Produção	D (1)	C (3)	B (4)	A (5)
Finanças	C (3)	B (4)	A (5)	A (5)
Marketing	D (1)	C (3)	B (4)	A (5)
M. Quantitativos	B (4)	A (5)	A (5)	A (5)
Estatística	C (3)	B (4)	A (5)	A (5)

Calcular o plano óptimo de preparação para os exames recorrendo à programação dinâmica.

2. No grafo seguinte determinar o encaminhamento óptimo (menor distância) entre os vértices A e D.



3. Recorrendo à programação dinâmica determine a solução óptima do seguinte problema linear:

$$
\begin{aligned}
& Min\ f(X) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\
& s.a. \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5 \\
& 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\
& -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Nota: inicie o cálculo determinando o valor óptimo da variável x_3 de acordo com os recursos existentes

4. Recorrendo à programação dinâmica determine a solução óptima do seguinte problema não linear:

$$Max\ f(X) = 36x_1 + 9x_1^2 - 6x_1^3 + 36x_2 - 3x_2^3$$

$$\text{s.a:} \quad \begin{aligned} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5. A AEISG está a organizar uma festa de finalistas nos jardins do palácio. Os alunos responsáveis pela execução das tarefas A, B, C e D informaram que estão com atraso significativo e necessitam de reforço urgente.

A AE dispõe de 5 equipas (com efectivo de 4 alunos) que pode mobilizar para estas tarefas sendo necessário estudar a respectiva afectação. Reunindo com os responsáveis das tarefas estabeleceram que, em função do número de equipas afectadas , a redução em tempo (horas) na execução das tarefas seria a seguinte:

	Redução de tempo (horas) da execução das tarefas			
Equipas Afectadas	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	5	3	6	4
2	7.5	5	9	8
3	9	8	10	12
4	10.5	12	11	14
5	12	15	12	16

Calcular a afectação que maximiza globalmente a redução do tempo de execução de todas as tarefas.

6. Uma empresa tem que efectuar uma auditoria urgente (Organização, Pessoal e Contabilidade).

Em regra, para tarefas deste tipo e em situação normal, destaca uma equipa de 3 técnicos (um para cada área).

Dada a urgência pedida pelo cliente (4 semanas), os técnicos informaram o seguinte:

- Técnico A (Organização):

  Actuando sozinho tem a probabilidade de 0.75 de terminar a sua tarefa no prazo fixado;

  Reforçado com outro técnico tal probabilidade passará a ser de 0.85;

  Se receber o reforço de dois técnicos tal probabilidade passará a ser de 0.95;
- Técnico B (Pessoal)

  Se actuar sozinho tem a probabilidade de 0.8 de terminar a sua tarefa no prazo fixado;

  Se receber o reforço de um técnico tal probabilidade passará a ser de 0.88;

  Se receber o reforço de dois técnicos tal probabilidade passará a ser de 0.96;
- Técnico C (Contabilidade)

  Se actuar sozinho tem a probabilidade de 0.6 de terminar a sua tarefa no prazo fixado;

  Se receber o reforço de um técnico tal probabilidade passará a ser de 0.75;

  Se receber o reforço de dois técnicos tal probabilidade passará a ser de 0.85;

A empresa, que sabe que o orçamento do cliente é de 7500 u.m. , tem as seguintes tabelas de preços para auditoria (unidades monetárias):

	Preço de 1, 2 ou 3 técnicos		
Tipo de Técnico	1	2	3
Organização	1000	1500	2000
Pessoal	2000	3100	3500
Contabilidade	2500	3500	3750

A empresa necessita calcular a probabilidade máxima de cumprimento do prazo do cliente (com custo máximo de 7500 u.m.) para decidir se aceita ou não realizar a auditoria.

1.

Etapas : cadeiras para exame (n=5)

Estados s_n : <u>*número de horas ainda disponíveis para a cadeira “n”*</u> (0 a 50 com incremento de 5 horas)

Variáveis de decisão x_n : <u>*horas atribuídas à cadeira “n”*</u> (0 a 20 com incremento de 5 horas)

Função de transição (excepto última etapa):

$$f_n(s_n, x_n) = c_{s,x} + f^*_{n+1}(s_n - x_n)$$ ≡ pontuação <u>acumulada</u>

Para o estado s_n o valor óptimo da função é $Max\,\{f_n(s_n, x_n)\}$

Solução Óptima:

A Leontina dispõe de várias alternativas com pontuação máxima de 19 pontos.

Uma destas soluções é a seguinte:

Área	Horas	Pontuação
Produção	10	3
Finanças	15	5
Marketing	10	3
M.Quantitativos	10	5
Estatística	5	3
Totais	50	19

Processo iterativo:

Etapa 5 (Estatística)

s_5 (horas)	f^*_5 (pontos)	x^*_5 (horas)
0	0	0
5	3	5
10	4	10
15	5	15
20	5	20
25	5	25
30	5	30
35	5	35
40	5	40
45	5	45
50	5	50

Restam 5 horas
Decidido x_4 = 5 h → 4 pontos
Restam 5 – 5 = 0 h para etapa 5 → 0 pontos
Total = 4 + 0 = 4 pontos

Restam 25 horas
Decidido x_4 = 10 h → 5 pontos
Restam 25 – 10 = 15 h para etapa 5 → 5 pontos
Total = 5 + 5 = 10 pontos

Etapa 4 (M.Quantitativos)

s_4 (h) \ x_4	0 h	5 h	10 h	15 h	20 h	f^*_4 (pontos)	x^*_4 (horas)
0	0*					0	0
5	3	4*				4	5
10	4	7*	5			7	5
15	5	8*	8*	5		8	5 ou10
20	5	9*	9*	8	5	9	5 ou 10
25	5	9	10*	9	8	10	10
30	5	9	10*	10*	9	10	10 ou 15
35	5	9	10*	10*	10*	10	10,15 ou 20
40	5	9	10*	10*	10*	10	10,15 ou 20
45	5	9	10*	10*	10*	10	10,15 ou 20
50	5	9	10*	10*	10*	10	10,15 ou 20

Etapa 3 (Marketing)

s_3 (h) \ x_3	0 h	5 h	10 h	15 h	20 h	f_3^* (pontos)	x_3^* (horas)
0	0*					0	0
5	4*	1				4	0
10	7*	5	3			7	0
15	8*	8*	7	4		8	0 ou 5
20	9	9	10*	8	5	10	10
25	10	10	11*	11*	9	11	10 ou 15
30	10	11	12*	12*	12*	12	10 ,15 ou 20
35	10	11	13*	13*	13*	13	10,15 ou 20
40	10	11	13	14*	14*	14	15 ou 20
45	10	11	13	14	15*	15	20
50	10	11	13	14	15*	15	20

Etapa 2 (Finanças)

s_2(h) \ x_2	0 h	5 h	10 h	15 h	20 h	f_2^* (pontos)	x_2^* (horas)
0	0*					0	0
5	4*	3				4	0
10	7*	7*	4			7	0 ou 5
15	8	10*	8	5		10	5
20	10	11*	11*	9	5	11	5 ou 10
25	11	13*	12	12	9	13	5
30	12	14*	14*	13	12	14	5 ou 10
35	13	15*	15*	15*	13	15	5,10 ou 15
40	14	16*	16*	16*	15	16	5,10 ou 15
45	15	17*	17*	17*	16	17	5,10 ou 15
50	15	18*	18*	18*	17	18	5,10 ou 15

Etapa 1 (Produção)

s_1(h) \ x_1	0 h	5 h	10 h	15 h	20 h	f_1^* (pontos)	x_1^* (horas)
50	18	18	19*	19*	19*	19	10,15 ou 20

Óptimo
19 pontos

2.

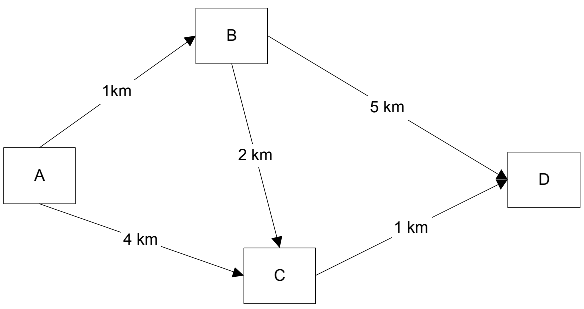
Etapas : são os conjuntos de vértices de <u>igual nível relativamente ao vértice inicial</u> (A). Para fixar estes níveis, organiza-se a matriz booleana do grafo e calcula-se o fecho transitivo directo do vértice inicial "A" modificando o algoritmo por forma a *<u>registar todos os vértices antecessores e assim detectar os vértices pertencentes a mais do que um nível</u>*.

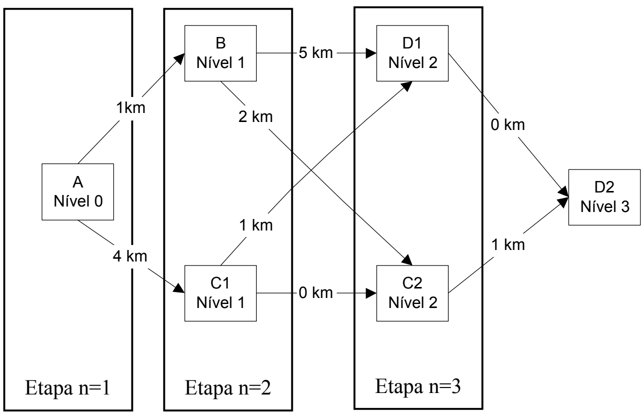
	A	B	C	D	Nìveis			
A		1	1		0			
B			1	1		1_A		
C				1		1_A	2_B	
D							2_B, 2_C	3_C

"C" no nível 2 com antecessor "B"

"D" no nível 2 com antecessores "B" e "C"

Verifica-se que o vértice "C" pertence aos níveis 1 e 2 e o vértice "D" pertence aos níveis 2 e 3.
Como *cada um dos níveis é uma etapa onde se decide a mudança de estado*, é necessário repetir os vértices "C" e "D" nos níveis adjacentes a que pertencem e ligá-los por arco de 0 km.
As figuras seguinte mostram o grafo inicial e o grafo modificado para cálculo (este indicando os vértices de cada nível).





Calculando o encaminhamento por ordem decrescente de nível (sentido inverso) têm-se 3 etapas.

Estados s_n : vértices (extremos iniciais) pertencentes ao nível "n" (etapa "n")

Variáveis de decisão x_n : vértices (extremos finais) pertencentes à etapa "n+1"

Função de transição (excepto última etapa):

$$f_n(s_n, x_n) = c_{s,x} + f^*_{n+1}(x_n) \quad (c_{s,x} \text{ é a distância do vértice } s_n \text{ ao vértice } x_n)$$

Para o estado s_n o valor óptimo da função é $Min\{f_n(s_n, x_n)\}$

Solução Óptima: Encaminhamento A → B → C → D com distância óptima de 4 km.

Processo iterativo:

<u>Etapa 3</u>

s_3	f^*_3	x^*_3
D_1	0*	D_2
C_2	1*	D_2

Etapa 2

s_2 \ x_2	D_1	C_2	f_2^*	x_2^*
B	5+0=5	2+1=3*	3	C_2
C_1	1+0=1*	0+1=1*	1	D1, C2

Etapa 3

s_1 \ x_1	B	C_1	f_1^*	x_1^*
A	1+3=4*	4+1=5	4	B

Lendo os quadros por ordem inversa da adoptada para o cálculo detecta-se o encaminhamento óptimo $A \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow D_2$ com distância associada de 4 km.

3.

Este problema tem três etapas de decisão correspondentes a cada uma das suas variáveis. Na primeira etapa pretende-se apenas determinar o valor de x_1. Na segunda etapa pretende-se determinar o valor de x_2 com base nos recursos restantes (parte foi consumida pela variável x_1). Finalmente na terceira etapa determina-se o valor da variável x_3 face à utilização dos recursos entretanto decidida para as outras duas variáveis.

Iniciando o cálculo pela última etapa (determinar o valor óptimo da variável x_3 de acordo com os recursos existentes) tem-se:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } f_3 = x_3 \\
&\text{s.a:} \quad -x_3 \leq 5 - x_1 - 2x_2 \\
&\qquad\quad 2x_3 = 2 - 2x_1 + x_2 \\
&\qquad\quad 2x_3 \geq 1 + x_1 - 2x_2 \\
&\qquad\quad x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Reescrevendo as restrições em ordem a x_3 ficamos com os limites do intervalo admissível:

$$\begin{aligned}
&x_3 \geq -5 + x_1 + 2x_2 \\
&x_3 = 1 - x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \\
&x_3 \geq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_1 - x_2 \\
&x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Na 2ª restrição temos o valor da variável x_3 mas, para garantir a admissibilidade, é necessário que os dois limites inferiores sejam menores ou iguais àquele valor. Assim sendo, substitui-se o valor de x_3 nos dois limites obtendo-se :

$$\begin{aligned}
&-5 + x_1 + 2x_2 \leq 1 - x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 &&\Leftrightarrow\quad x_2 \leq 4 - \tfrac{4}{3}x_1 \\
&\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 1 - x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 &&\Leftrightarrow\quad x_2 \geq -\tfrac{1}{3} + x_1 \\
&0 \leq 1 - x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 &&\Leftrightarrow\quad x_2 \geq 2x_1 - 2
\end{aligned}$$

Limitados os valores das variáveis x_1 e x_2 a elas fica associado o valor óptimo da variável x_3 na etapa:

$$\begin{aligned}
&x_3^* = 1 - x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \\
&f_3^*(\,5 - x_1 - 2x_2,\; 2 - 2x_1 + x_2,\; 1 + x_1 - 2x_2\,) = 1 - x_1 + \tfrac{1}{2}x_2
\end{aligned}$$

A função de transição entre a 2ª e a 3ª etapa é utilizada agora para obter o valor óptimo para a variável x_2:

$$f_2^*(\,5 - x_1, 2 - 2x_1, 1 + x_1\,) = \underset{x_2}{Min}\ \{f_3^*(\,5 - x_1 - 2x_2, 2 - 2x_1 + x_2, 1 + x_1 - 2x_2\,) + 4x_2\} =$$

$$= \underset{x_2}{Min}\ \{1 - x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 4x_2\} = \underset{x_2}{Min}\ \{\tfrac{9}{2}x_2 + 1 - x_1\}$$

Este valor só é admissível se forem observadas as condições anteriormente impostas aos valores das variáveis x_1 e x_2:

$$x_2 \leq 4 - \tfrac{4}{3}\, x_1$$
$$x_2 \geq -\tfrac{1}{3} + x_1$$
$$x_2 \geq 2\, x_1 - 2$$
$$x_2 \geq 0$$

Com base nestas restrições é possível enquadrar o valor de x_2 e tirar conclusões sobre a admissibilidade do sub problema:

$$\text{Max}\ \{\, 0\,,\ -\tfrac{1}{3} + x_1\,,\ \ 2\,x_1 - 2 \,\} \ \leq \quad x_2 \quad \leq\ 4 - \tfrac{4}{3}\, x_1$$

A admissibilidade exige que os dois limites para a variável x_2 sejam válidos pelo que o limite superior não pode ser inferior ao limite inferior. Como este é o valor máximo de um conjunto de três valores, naturalmente o limite superior terá que ser:

$$\begin{cases} 4 - \frac{4}{3}x_1 \geq 0 \\ 4 - \frac{4}{3}x_1 \geq -\frac{1}{3} + x_1 \\ 4 - \frac{4}{3}x_1 \geq 2x_1 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_1 \leq \frac{13}{7} \\ x_1 \leq \frac{9}{5} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq \tfrac{9}{5}$$

Se esta condição não se verificar, o problema é impossível. No caso de se verificar, e dado que se pretende minimizar a função e a variável x_2 tem um coeficiente positivo na mesma, o valor óptimo da variável x_2 será igual ao seu limite inferior:

$$x_2^* = \text{Max}\ \{\, 0\,,\ -\tfrac{1}{3} + x_1\,,\ 2\,x_1 - 2 \,\}$$

Para decidir qual o valor de x_2 é necessário verificar a relação de ordem entre os três valores:

$$2\,x_1 - 2 \ \geq\ -\tfrac{1}{3} + x_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \ \geq\ \tfrac{5}{3}$$
$$2\,x_1 - 2 \ \geq\ 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \geq 1$$
$$-\tfrac{1}{3} + x_1 \ \geq\ 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \geq \tfrac{1}{3}$$

Dispõe-se agora do valor óptimo da variável x_2 em função do valor da variável x_1. Termina-se assim a segunda etapa com o valor óptimo:

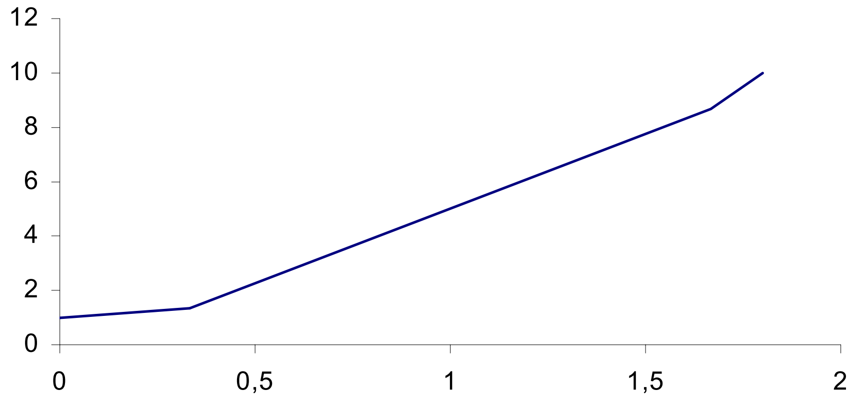
$$x_2^* = \begin{cases} 0, & se\ \ 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} + x_1, & se\ \ \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{5}{3} \\ -2 + 2x_1, & se\ \ \frac{5}{3} \leq x_1 \leq \frac{9}{5} \\ \textit{não existe}, & se\ x_1 > \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$f_2^*(\,5 - x_1, 2 - 2\,x_1, 1 + x_1\,) = \begin{cases} 1 - x_1, & se\ 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3} \\ \dfrac{7}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}, & se\ \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{5}{3} \\ -8 + 8x_1, & se\ \frac{5}{3} \leq x_1 \leq \frac{9}{5} \\ \textit{não existe}, & se\ x_1 > \frac{9}{5} \end{cases}$$

Passemos para a primeira etapa onde será determinado valor de x_1 a partir do valor óptimo obtido para a segunda etapa:

$$f_1^*(5, 2, 1) = \underset{x_1}{Min}\ \{f_2^*(5 - x_1, 2 - 2x_1, 1 + x_1) + 2x_1\} = \underset{x_1}{Min} \begin{cases} 1 - x_1, & se\ 0 \le x_1 \le \frac{1}{3} \\ \frac{7}{2}x_1 - \frac{1}{2}, & se\ \frac{1}{3} \le x_1 \le \frac{5}{3} \\ -8 + 8x_1, & se\ \frac{5}{3} \le x_1 \le \frac{9}{5} \\ não\ existe, & se\ x_1 > \frac{9}{5} \end{cases}$$

A figura seguinte mostra a variação do valor da função associada à primeira etapa em função da variação do valor x_1:



O gráfico mostra que o valor da variável x_1 que minimiza a função é igual a 0. Utilizando agora as relações já estabelecidas para a determinação dos valores óptimos das variáveis x_2 e x_3, conclui-se que a solução óptima do problema proposto é:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad Min\ f(X^*) = 1$$

4.

Comecemos pela resolução do sub problema correspondente à segunda etapa do problema (calcular x_2):

$$Max\ f_2(X) = 36x_2 - 3x_2^3$$

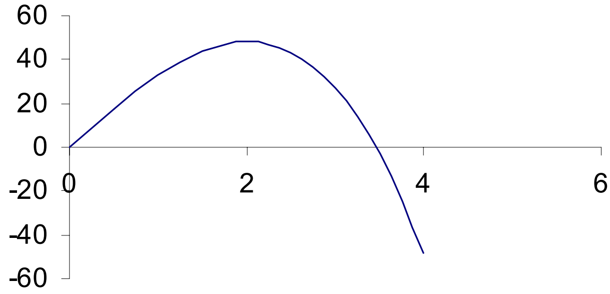
$$\text{s.a:} \quad \begin{array}{l} x_2 \le 3 - x_1 \\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

Derivando a função objectivo é possível determinar onde poderão situar-se os seus máximos relativos:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_2 = 36 - 9\,x_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2 \quad \vee \quad x_2 = -2$$

Como a variável x_2 só pode assumir valores não negativos, o único valor que pode ser considerado como um máximo relativo será o valor 2.

A figura seguinte apresenta o comportamento da função f_2 para alguns valores da variável x_2.



Do gráfico conclui-se que se o limite superior imposto à variável x_2 for superior a 2, então a função atinge o máximo em 2; se o limite superior for inferior a 2, o máximo da função é atingido precisamente no valor correspondente a esse limite superior; se o limite superior for inferior a 0, o problema não tem solução:

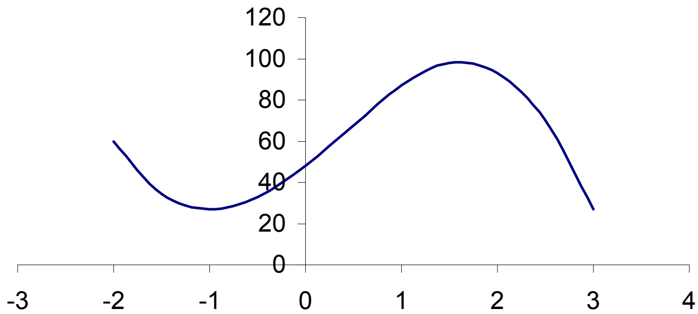
$$x_2^* = \begin{cases} 2, \textit{para } 3 - x_1 \geq 2 \\ 3 - x_1, \textit{para } 0 \leq 3 - x_1 \leq 2 \\ \textit{sem solução se } 3 - x_1 < 0 \end{cases}$$

$$f_2^*(3 - x_1) = \begin{cases} 48, \textit{ se } 3 - x_1 \geq 2 \\ 108 - 3x_1 - 3(3 - x_1)^3, \textit{ se } 0 \leq 3 - x_1 \leq 2 \\ \textit{sem solução se } 3 - x_1 < 0 \end{cases}$$

O valor óptimo associado à primeira etapa é agora determinado com base neste valor obtido para a segunda etapa:

$$f_1^*(3) = \underset{x_1}{Max}\left\{ f_2^*(3 - x_1) + 36x_1 + 9x_1^2 - 6x_1^3 \right\} = \begin{cases} 3(16 + 12x_1 + 3x_1{}^2 - 2x_1{}^3), & \textit{se } x_1 \leq 1 \\ 3(9 + 27x_1 - 6x_1{}^2 - x_1{}^3), & \textit{se } 1 \leq x_1 \leq 3 \\ \textit{não existe}, & \textit{se } x_1 > 3 \end{cases}$$

A figura seguinte representa a variação da função associada à primeira etapa. É possível identificar que o valor da variável x_1 que maximiza a função é $\sqrt{13} - 2$. Usando este valor na relação estabelecida entre as duas variáveis de decisão obtemos a solução óptima do problema:



$$X^* = \begin{bmatrix} \sqrt{13} - 2 \\ 5 - \sqrt{13} \end{bmatrix} \quad ; \quad f(X^*) = 78\sqrt{13} - 243$$

5.

Solução óptima :

1 equipa para a tarefa A ; 1 equipa para a tarefa C ; 3 equipas para a tarefa D

Redução total de tempo = 5 +6+ 12 = 23 horas.

Nota: Considere 4 etapas de decisão para afectar equipas a A, B, C e D.

6.

Dada a independência das 3 áreas da auditoria a probabilidade de cumprimento do prazo com "x" técnicos de Organização, "y" técnicos de Pessoal e "z" técnicos de Contabilidade é P(x).P(y).P(z).

O problema pode resolver-se com PD estruturando-o do seguinte modo:

Etapas = n = 3

Cada uma das áreas de auditoria constitui uma etapa de decisão.

Em cada uma delas a variável de decisão x_n pode tomar os valores 0, 1, 2 ou 3 (técnicos da área "n").

Estados

Na Etapa "n" os valores admissíveis para a variável de estado s_n devem representar a disponibilidade restante do orçamento previsto (será necessário estabelecer intervalos adequados dado ser diferente o custo associado à decisão x_n).

Função de transição

Em qualquer etapa "n" (excepto a última pois o cálculo vai ser efectuado em sentido inverso), o valor da função de transição é a probabilidade conjunta resultante do produto da probabilidade associada à decisão x_n com a probabilidade óptima que na etapa "n+1" está associada à política óptima associada ao orçamento restante. A relação matemática é então $f_n(s_n, x_n) = p_{x_n} . f^*_{n+1}(s_n - c_{s,x_n})$.

Para cada estado s_n da etapa "n" a política óptima é $f^*_n = Max\ \{ f_n(s_n, x_n) \}$.

Estudo da Área de Contabilidade (Etapa 3)

Custos (c_{s,x_3}) :

x_3 = 1 técnico → $(c_{s,1})$ = 2500 u.m.

x_3 = 2 técnicos: $(c_{s,2})$ = 3500 u.m.

x_3 = 3 técnicos: $(c_{s,3})$ = 3750 u.m.

Probabilidade (p_{x_3}) :

x_3 = 1 técnico → (p_{x_3}) = 0.60

x_3 =2 técnicos → (p_{x_3}) = 0.75

x_3 = 3 técnicos → (p_{x_3}) = 0.85

Orçamento restante : 0 a 7500 u.m.

Estados possíveis (valores da variável de estado s_n)

0 a 2499 u.m. permitindo aplicar 0 técnicos

2500 a 3499 u.m. permitindo aplicar 0, ou 1 técnicos

3500 a 3749 u.m. permitindo aplicar 0, 1, ou 2 técnicos

3750 a 7500 u.m. permitindo aplicar 0, 1, 2, ou 3 técnicos

Quadro de resultados da etapa 3:

x_3 / s (u.m.)	$f_3(s, x_3) = p_{x_3}$			$f_3^*(s)$	x_3^*
	1	2	3		
0 a 2499	-	-	-	-	-
2500 a 3499	0.60			0.60	1
3500 a 3749		0.75		0.75	2
3750 a 7500			0.85	0.85	3

<u>Estudo da Área de Pessoal</u> (Etapa 2)

<u>Custos</u> (c_{s,x_2}) :

x_2 = 1 técnico $\rightarrow$ $(c_{s,1})$ = 2000 u.m

x_2 = 2 técnicos: $(c_{s,2})$ = 3100 u.m.

x_2 = 3 técnicos: $(c_{s,3})$ = 3500 u.m.

<u>Probabilidade</u> (p_{x_2}) :

x_2 = 1 técnico $\rightarrow$ (p_{x_2}) = 0.80

x_2 =2 técnicos $\rightarrow$ (p_{x_2}) = 0.88

x_2 = 3 técnicos $\rightarrow$ (p_{x_2}) = 0.96

<u>Orçamento restante</u> : 0 a 7500 u.m.

<u>Estados possíveis</u> (valores da variável de estado s_n)

Porque o orçamento que resta desta etapa se deve enquadrar nos estados (intervalos) da etapa 3, é necessário estudar os valores da variável de estado na etapa 2:

Para a hipótese de 1 técnico com custo 2000 u.m. teremos os seguintes limites de intervalo:

2000 + 2499 = 4499 u.m.

2000 + 3499 = 5499 u.m.

2000 + 3749 = 5749 u.m.

Para a hipótese de 2 técnicos com custo 3100 u.m. teremos os seguintes limites de intervalo:

3100 + 2499 = 5599 u.m.

3100 + 3499 = 6599 u.m.

3100 + 3749 = 6849 u.m.

Para a hipótese de 3 técnicos com custo 3500 u.m. teremos os seguintes limites de intervalo:

3500 + 2499 = 5999 u.m.

3500 + 3499 = 6999 u.m.

3500 + 3749 = 7249 u.m.

Ordenando os limites superiores 4499, 5499, 5599, 5749, 5999, 6599, 6849, 6999 e 7249 estabelecem--se os intervalos adequados para a variável de estado como mostra o quadro seguinte:

x_2 / s (u.m.)	$f_2(s,x_2) = p_{x_2}.f_3^*(s-c_{sx_2})$			$f_2^*(s)$	x_2^*
	1	2	3		
0 a 4499	0	-	-	0	0
4500 a 5499	0.48*	0	-	0.48	1
5500 a 5599	0.60*	0	0	0.60	1
5600 a 5749	0.60*	0.528	0	0.60	1
5750 a 5999	0.68*	0.528	0	0.68	1
6000 a 6599	0.68*	0.528	0.576	0.68	1
6600 a 6849	0.68*	0.66	0.576	0.68	1
6850 a 6999	0.68	0.748*	0.576	0.748	2
7000 a 7249	0.68	0.748*	0.720	0.748	2
7250 a 7500	0.68	0.748	0.816*	0.816	3

Exemplificação do cálculo de alguns valores do quadro da etapa 2:

Intervalo 0 a 4499 u.m. (há ainda 0 a 4499 u.m. para pagamento de técnicos de Pessoal)

Se decidir 1 técnico de pessoal (x_2 = 1), o custo é de 2000 u.m. sobrando 2499 u.m. para a etapa seguinte (Contabilidade). Consultando o quadro da etapa 3, verifica-se que a probabilidade associada ao estado 0 a 2499 u.m. é nula (a verba é insuficiente para 1 técnico de Contabilidade pois este tem o custo de 2500 u.m.). Resulta assim que para a combinação de 1 técnico de pessoal e 0 técnicos de contabilidade é nula a probabilidade de cumprir o prazo do cliente.

Intervalo 6000 a 6599 u.m. (há ainda 6000 a 6599 u.m. para pagamento de técnicos de Pessoal)

Dispondo de 6599 u.m. pode decidir-se 1 técnico de pessoal (x_2 = 1) com custo = 2000 u.m. :

- *probabilidade elementar de observar prazo =* $p_{x_2} = 0.80$
- *sobram 6599 - 2000 = 4599 u.m. para a etapa 3 (Contabilidade)*
- *consultando o quadro da etapa 3 para o estado 3750 ≤* ***4599 u.m.*** *≤ 7500 verifica-se que a probabilidade associada é* $f_s^* = 0.85$ *com* $x_3^* = 3$ *técnicos de contabilidade*

x_3 / s (u.m.)	$f_3(s,x_3) = p_{x_3}$			$f_3^*(s)$	x_3^*
	1	2	3		
3750 a 7500			0.85	0.85	3

- *a probabilidade, de cumprir o prazo do cliente, associada à combinação de 1 técnico de pessoal e 3 técnicos de contabilidade é (0.80)(0.85)= 0.68 (registado no quadro):*

x_2 / s (u.m.)	$f_2(s,x_2) = p_{x_2}.f_3^*(s-c_{sx_2})$			$f_2^*(s)$	x_3^* x_2^*
	1	2	3		
6000 a 6599	0.68				

Dispondo de 6599 u.m. pode ainda decidir-se 2 técnicos de pessoal (x_2 = 2) com custo = 3100 u.m. :

- *probabilidade elementar de observar prazo =* $p_{x_2} = 0.88$
- *sobram 6599 - 3100 = 3499 u.m. para a etapa seguinte (Contabilidade)*
- *consultando o quadro da etapa 3 para o estado 2500 ≤ **3499 u.m**. ≤ 3499 verifica-se que a probabilidade associada é* $f_s^* = 0.60$ *com* $x_3^* = 1$ *técnico de contabilidade*:

x_3 \ s (u.m.)	$f_3(s,x_3) = p_{x_3}$				
	1	2	3	$f_3^*(s)$	x_3^*
2500 a 3499	0.60			0.6	1

- *a probabilidade, de cumprir o prazo do cliente, associada à combinação de 2 técnicos de pessoal e 1 técnico de contabilidade é (0.88)(0.60)= 0.528 :*

x_2 \ s (u.m.)	$f_2(s,x_2) = p_{x_2}.f_3^*(s-c_{sx_2})$				
	1	2	3	$f_2^*(s)$	x_2^*
6000 a 6599		0.528			

Dispondo de 6599 u.m. pode ainda decidir-se 3 técnicos de pessoal (x_2 = 3) com custo = 3500 u.m. :

- *probabilidade elementar de observar prazo =* $p_{x_2} = 0.96$
- *sobram 6599 - 3500 = 3099 u.m. para a etapa seguinte (Contabilidade)*
- *consultando o quadro da etapa 3 para o estado 2500 ≤ **3099 u.m.** ≤ 3499 verifica-se que a probabilidade associada é* $f_s^* = 0.60$ *com* $x_3^* = 1$ *técnico de contabilidade*

x_3 \ s (u.m.)	$f_3(s,x_3) = p_{x_3}$				
	1	2	3	$f_3^*(s)$	x_3^*
2500 a 3499	0.60			0.6	1

- *a probabilidade, de cumprir o prazo do cliente, associada à combinação de 3 técnicos de pessoal e 1 técnico de contabilidade é (0.96)(0.60)= 0.576 (registado no quadro):*

x_2 \ s (u.m.)	$f_2(s,x_2) = p_{x_2}.f_3^*(s-c_{sx_2})$				
	1	2	3	$f_2^*(s)$	x_2^*
6000 a 6599			0.576		

Para este intervalo de <u>6000 a 6599 u.m</u>, na etapa 2, a política óptima é:

$$f_2^* = Max\left\{0.68\ ,\ 0.528\ ,\ 0.576\right\} = 0.576\ com\ x_2^* = 3$$, e no quadro tem-se:

x_2 \ s (u.m.)	$f_2(s,x_2) = p_{x_2}.f_3^*(s-c_{sx_2})$				
	1	2	3	$f_2^*(s)$	x_2^*
6000 a 6599	0.60	0.528	0.576*	0.576	3

Estudo da Área de Organização (Etapa 1)

Custos (c_{s,x_1}) :

x_1 = 1 técnico → $(c_{s,1})$ = 1000 u.m

x_1 = 2 técnicos: $(c_{s,2})$ = 1500 u.m.

x_1 = 3 técnicos: $(c_{s,3})$ = 2000 u.m.

Probabilidade (p_{x_2}) :

x_2 = 1 técnico → (p_{x_2}) = 0.75

x_2 =2 técnicos → (p_{x_2}) = 0.85

x_2 = 3 técnicos → (p_{x_2}) = 0.95

Orçamento restante : 0 a 7500 u.m.

Estados possíveis : porque é a 1ª etapa há um único valor para a variável de estado (7500 u.m.)

x_1 / s (u.m.)	$f_1(s,x_1) = p_{x_1}.f_2^*(s - c_{sx_1})$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	1	2	3		
7500	0.51	0.578*	0.570	0.578	2

Os valores de $f_1(s,x_1) = p_{x_1}.f_2^*(s - c_{sx_1})$ foram calculados do seguinte modo:

Para x_1 = 1 técnico com custo 1000 u.m. :

- *probabilidade elementar de observar prazo =* $p_{x_1} = 0.75$
- *sobram 7500 - 1000 = 6500 u.m. para a etapa seguinte (Pessoal)*
- *consultando o quadro da etapa 2 para estado 6000 ≤ **6500 u.m**. ≤ 6599 verifica-se que a probabilidade associada é* $f_s^* = 0.68$ *com* $x_2^* = 1$:
- *a probabilidade, de cumprir o prazo do cliente, associada à combinação de 1 técnico de organização e 1 técnico de pessoal é (0.75)(0.68)= 0.51.*

Para x_1 = 2 técnicos com custo 1500 u.m. :

- *probabilidade elementar de observar prazo =* $p_{x_1} = 0.85$
- *sobram 7500 - 1500 = 6000 u.m. para a etapa seguinte (Pessoal)*
- *consultando o quadro da etapa 2 para estado 6000 ≤ **6500 u.m**. ≤ 6599 verifica-se que a probabilidade associada é* $f_s^* = 0.68$ *com* $x_2^* = 1$:
- *a probabilidade, de cumprir o prazo do cliente, associada à combinação de 2 técnicos de organização e 1 técnico de pessoal é (0.85)(0.68)= 0.578.*

Para x_1 = 3 técnicos com custo 2000 u.m. :

- *probabilidade elementar de observar prazo =* $p_{x_1} = 0.95$
- *sobram 7500 - 2000 = 5500 u.m. para a etapa seguinte (Pessoal)*

- *consultando o quadro da etapa 2 para estado 5500 ≤ **5500 u.m**. ≤ 5599 verifica-se que a probabilidade associada é* $f_s^* = 0.60$ *com* $x_2^* = 1$:
- *a probabilidade, de cumprir o prazo do cliente, associada à combinação de 2 técnicos de organização e 1 técnico de pessoal é (0.95)(0.60)= 0.57.*

Conclusão:

A probabilidade máxima de conclusão da auditoria, no prazo fixado, é de 0.578 organizando-a do seguinte modo:

Área de Organização: 2 técnicos (custo = 1500 u.m.)

Área de Pessoal: 1 técnicos (custo = 2000 u.m.)

Área de Contabilidade: 3 técnicos (custo = 3750 u.m.)

O custo global é de 1500 + 2000 + 3750 = 7250 u.m. < 7500 u.m.

A probabilidade conjunta é de (0.85) . (0.80) . (0.85) = 0.578

Explicação detalhada da solução óptima:

Etapa 1

- por leitura directa extrai-se x_1^* = 2 técnicos de organização com custo de 1500 u.m.

Etapa 2

- disponibilidade restante do orçamento é de 7500 – 1500 = 6000 u.m.
- no intervalo 6000 a 6599 u.m. tem-se x_2^* = 1 técnico de pessoal com custo de 2000 u.m.

Etapa 3

- disponibilidade restante do orçamento é de 7500 – 1500 - 2000 = 4500 u.m.
- no intervalo 3750 a 7500 u.m. tem-se x_3^* = 3 técnicos de contabilidade com custo de 3750 u.m.